

## Analisi Matematica 1B - a.a. 2020–2021 - Lezione 15

# Integrale di Riemann in $\mathbb{R}^n$ .

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 10 maggio 2021)

Possiamo estendere il concetto di integrale di Riemann che abbiamo già definito per funzioni di una variabile anche al caso di funzioni di più variabili. Per semplicità di esposizione in questa lezione ci concentreremo su funzioni di due variabili definite su domini rettangolari. Tutto quello che presenteremo si estende in modo analogo e naturale anche al caso di  $n$  variabili.

## 1 Somme di Darboux per funzioni di due variabili

Un rettangolo di  $\mathbb{R}^2$  con lati paralleli agli assi cartesiani non è altro che il prodotto cartesiano di due intervalli, a partire da suddivisioni di tali intervalli possiamo produrre una suddivisione del rettangolo in una griglia di rettangolini. Abbiamo già definito le suddivisioni di un intervallo nella lezione 7.

**Definizione 1.1.** Siano  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  con  $a \leq b$  e  $c \leq d$ . Sia  $R$  il rettangolo ottenuto come prodotto cartesiano dei due intervalli chiusi e limitati  $I = [a, b]$  e  $J = [c, d]$ ,

$$R := I \times J = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Chiameremo *suddivisione* del rettangolo  $R$  il prodotto cartesiano  $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2$  di una suddivisione  $\sigma_1$  dell'intervallo  $I$  e una suddivisione  $\sigma_2$  dell'intervallo  $J$ .

Supponiamo che  $\sigma_1$  scomponga  $I$  in  $n$  intervalli,

$$\sigma_1 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad [a, b] = \bigcup_{i=1}^n I_i, \quad I_i = [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n,$$

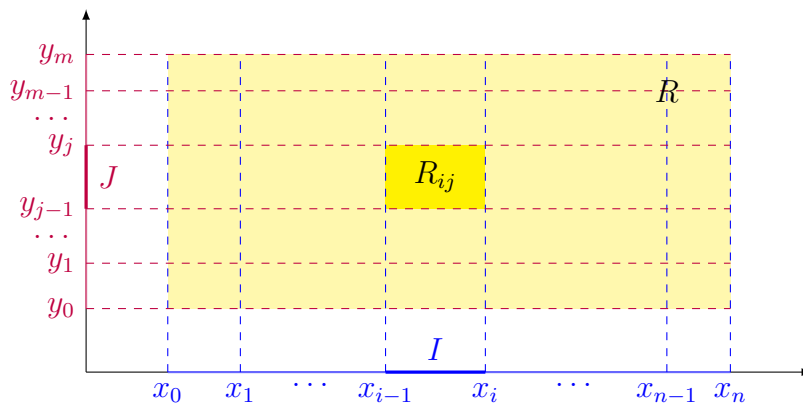
e che  $\sigma_2$  scomponga  $J$  in  $m$  intervalli,

$$\sigma_2 : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d, \quad [c, d] = \bigcup_{j=1}^m J_j, \quad J_j = [y_{j-1}, y_j], \quad j = 1, \dots, m;$$

allora abbiamo che  $\sigma$  scompone  $R$  nell'unione di  $nm$  rettangoli essenzialmente disgiunti (ovvero senza che due di essi abbiano punti interni in comune).

$$\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2 = \{(x_i, y_j) : i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m\},$$

$$R = \bigcup_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} R_{ij}, \quad R_{ij} = I_i \times J_j = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],$$



L'area del rettangolo  $R$  coincide con la somma delle aree dei rettangoli in cui viene suddiviso,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(R) &= \mathcal{L}(I)\mathcal{L}(J) = (b - a)(d - c) = \\ &= \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} \mathcal{A}(R_{ij}) = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} \mathcal{L}(I_i)\mathcal{L}(J_j) = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

Date due suddivisioni  $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2$  e  $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_1 \times \tilde{\sigma}_2$  del rettangolo  $R$ , diremo che  $\tilde{\sigma}$  è un *raffinamento* di  $\sigma$  quando  $\tilde{\sigma}_1$  è un raffinamento di  $\sigma_1$  (come suddivisione di  $I$ ) e  $\tilde{\sigma}_2$  è un raffinamento di  $\sigma_2$  (come suddivisione di  $J$ ).

Date due suddivisioni di uno stesso intervallo, non è detto che una sia più fine dell'altra, ma è sempre possibile trovarne eventualmente un'altra che sia un raffinamento di entrambe.

**Lemma 1.2.** *Se  $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2$  e  $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_1 \times \tilde{\sigma}_2$  sono due suddivisioni del rettangolo  $R$ , allora la suddivisione definita da*

$$\sigma_\star := (\sigma_1 \cup \tilde{\sigma}_1) \times (\sigma_2 \cup \tilde{\sigma}_2)$$

*è ancora una suddivisione di  $R$  ed è un raffinamento sia di  $\sigma$  e sia di  $\tilde{\sigma}$ .*

Possiamo definire somme di Darboux inferiori e superiori per funzioni e suddivisioni definite su domini rettangolari procedendo nello stesso modo usato per funzioni di una variabile.

**Definizione 1.3.** Consideriamo ora una funzione  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  definita sul rettangolo

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

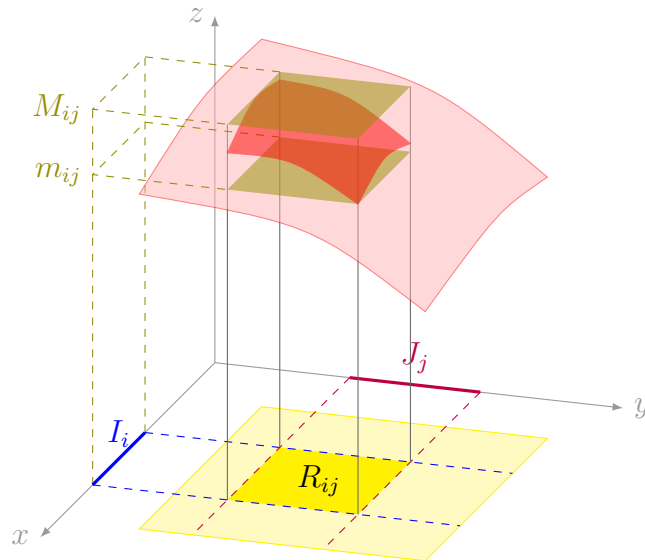
e richiediamo come unica ipotesi che  $f$  sia *limitata* (ovvero che assuma valori in un intervallo limitato di  $\mathbb{R}$ ). Sia  $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2$  una suddivisione del rettangolo  $R$ . Utilizzando le notazioni usate nella definizione 1.1, per ogni  $i = 1, \dots, n$  e per ogni  $j = 1, \dots, m$ , definiamo gli estremi dell'intervallo che contiene i valori che la funzione assume sul rettangolino  $R_{ij}$ ,

$$m_{ij} := \inf_{(x,y) \in R_{ij}} f(x,y), \quad M_{ij} := \sup_{(x,y) \in R_{ij}} f(x,y).$$

Il parallelepido con base  $R_{ij}$  e altezza  $m_{ij}$  ha volume (algebrico) dato  $m_{ij}\mathcal{A}(R_{ij})$ ; analogamente, il parallelepido con base  $R_{ij}$  e altezza  $M_{ij}$  ha volume (algebrico) dato  $M_{ij}\mathcal{A}(R_{ij})$ . Sommando algebricamente i volumi di tutti i parallelepidi otteniamo la *somma inferiore* e la *somma superiore* di Darboux associate alla funzione  $f$  e alla suddivisione  $\sigma$ ,

$$\underline{S}(f, \sigma) := \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} m_{ij}\mathcal{A}(R_{ij}), \quad \overline{S}(f, \sigma) := \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} M_{ij}\mathcal{A}(R_{ij}), \quad (1)$$

dove  $\mathcal{A}(R_{ij}) = \mathcal{L}(I_i)\mathcal{L}(J_j) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ .



*Osservazione 1.4.* Quando la funzione  $f$  è non negativa il suo *sottografico* è dato dalla regione

$$\text{sottografico}(f) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Il valore  $m_{ij}$  fornisce l'altezza del più alto parallelepido con base  $R_{ij}$  contenuto nel sottografico di  $f$ , mentre il valore  $M_{ij}$  fornisce l'altezza del più basso parallelepido con base  $R_{ij}$  che contiene tutta la porzione del sottografico di  $f$  soggiacente al rettangolino  $R_{ij}$ . Pertanto le somme inferiori e le somme superiori forniscono, rispettivamente, delle stime per difetto e delle stime per eccesso per il volume del sottografico di  $f$ .

Procedendo esattamente come nel caso unidimensionale si dimostra che ogni somma inferiore è minore o uguale ad ogni somma superiore.

**Proposizione 1.5.** Siano  $\sigma$  e  $\tilde{\sigma}$  due suddivisioni del rettangolo  $[a, b] \times [c, d]$  su cui è definita la funzione limitata  $f$ . Allora si ha sempre che

$$\underline{S}(f, \sigma) \leq \overline{S}(f, \tilde{\sigma}).$$

## 2 Integrale di Riemann su rettangoli

Per la proposizione 1.5 abbiamo che l'insieme dei valori delle somme inferiori è superiormente limitato e l'insieme dei valori delle somme superiori è inferiormente limitato, ed inoltre,

$$\sup_{\sigma} \underline{S}(f, \sigma) \leq \inf_{\tilde{\sigma}} \overline{S}(f, \tilde{\sigma}).$$

**Definizione 2.1.** Sia  $f$  una funzione limitata definita sul rettangolo  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Chiamiamo *integrale inferiore* e *integrale superiore* di  $f$  su  $R$  i valori definiti da

$$\underline{\iint}_R f := \sup_{\substack{\sigma \\ \text{suddivisione} \\ \text{di } R}} \underline{S}(f, \sigma), \quad \overline{\iint}_R f := \sup_{\substack{\sigma \\ \text{suddivisione} \\ \text{di } R}} \overline{S}(f, \sigma).$$

Esattamente come nel caso unidimensionale possiamo definire la condizione di integrabilità secondo Riemann.

**Definizione 2.2.** Data una funzione  $f$  limitata e definita sul rettangolo  $R = [a, b] \times [c, d]$  diremo che la funzione  $f$  è *integrabile secondo Riemann* su  $R$  quando i valori del suo integrale inferiore e del suo integrale superiore coincidono; questo valore comune definisce quello che chiameremo *integrale di Riemann* della funzione  $f$  su  $R$ , e che indicheremo con  $\iint_R f$ , oppure, per metter meglio in evidenza le variabili usate per descrivere il dominio di integrazione, con  $\iint_R f(x, y) dx dy$ . Dunque,

$$\iint_R f(x, y) dx dy := \underline{\iint}_R f = \overline{\iint}_R f.$$

quando queste ultime quantità coincidono.

Esattamente come nel caso unidimensionale vale il seguente criterio di integrabilità.

**Teorema 2.3.** Sia  $f$  una funzione limitata definita sul rettangolo  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Le seguenti proposizioni sono tra loro equivalenti:

- (A) la funzione  $f$  è integrabile secondo Riemann su  $R$ ;
- (B) per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una suddivisione  $\sigma$  di  $R$  per la quale si ha

$$\overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) < \varepsilon.$$

Anche per il caso bidimensionale abbiamo che le funzioni continue definite su rettangoli risultano essere sempre integrabili; l'integrabilità di una funzione è strettamente legata alla "misura nulla", in un certo senso che chiariremo tra poco, dell'insieme dei suoi punti di discontinuità. Inoltre, vale ancora il fatto che una funzione integrabile composta con una funzione lipschitziana è integrabile.

Come nel caso unidimensionale, anche per integrali su rettangoli continuano a valere le proprietà fondamentali. Siano  $f$  e  $g$  integrabili su  $R$  e siano  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

- Proprietà algebriche: la somma  $f + g$  e il prodotto  $fg$  sono ancora funzioni integrabili su  $R$ .
- Proprietà di monotonia: se  $f(x, y) \leq g(x, y)$  per  $(x, y) \in R$  allora  $\iint_R f \leq \iint_R g$ .
- Proprietà di linearità:  $\iint_R (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_R f + \mu \iint_R g$ .
- Stima del valore assoluto:  $|\iint_R f| \leq \iint_R |f|$ .

---

**Esercizio 2.4.** Ripassa le cose che abbiamo visto per l'integrale di Riemann per funzioni di una variabile e verifica che le proprietà enunciate in questa sezione possono essere dimostrate allo stesso modo.

---

### 3 Formule di riduzione per integrali doppi

Per quanto riguarda il calcolo di un integrale di una funzione di due variabili possiamo ricondurci al calcolo di due integrali in una variabile, integrando prima la funzione rispetto ad una variabile tenendo fissa l'altra, e poi integrando quello che si ottiene rispetto alla seconda variabile. Valgono infatti le formule di riduzione descritte dal seguente teorema.

**Teorema 3.1.** Sia  $f(x, y)$  integrabile sul rettangolo  $R = [a, b] \times [c, d]$ .

1. Se per ogni  $y \in [c, d]$  la funzione di una variabile  $x \mapsto f(x, y)$  è integrabile sull'intervallo  $[a, b]$ , allora la funzione  $y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$  è integrabile sull'intervallo  $[c, d]$  e vale la formula

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (2)$$

2. Se per ogni  $x \in [a, b]$  la funzione di una variabile  $y \mapsto f(x, y)$  è integrabile sull'intervallo  $[c, d]$ , allora la funzione  $x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$  è integrabile sull'intervallo  $[a, b]$  e vale la formula

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (3)$$

*Dimostrazione.* Vediamo come dimostrare il punto 1), per il punto 2) poi basterà ripetere la dimostrazione scambiando il ruolo delle variabili  $x$  e  $y$ .

Per ipotesi è ben definita la funzione  $F(y) := \int_a^b f(x, y) dx$  per ogni  $y \in [c, d]$ . Consideriamo una suddivisione  $\sigma_1$  dell'intervallo  $[a, b]$  e una suddivisione  $\sigma_2$  dell'intervallo  $[c, d]$ . Utilizziamo le notazioni introdotta a pagina 1 per indicare i punti delle due suddivisioni e a pagina 3 per definire le somme di Darboux. Fissato  $y \in [c, d]$ , sia  $g(x) := f(x, y)$  per ogni  $x \in [a, b]$ ; abbiamo dunque  $F(y) = \int_a^b g(x) dx$ . Per ogni  $i = 1, \dots, n$  e ogni  $y \in [c, d]$  poniamo

$$m_i(y) := \inf_{x \in I_i} g(x) = \inf_{x \in I_i} f(x, y), \quad M_i(y) := \sup_{x \in I_i} g(x) = \sup_{x \in I_i} f(x, y).$$

Quando  $y \in J_j$  abbiamo  $m_{ij} \leq m_i(y)$  e  $M_i(y) \leq M_{ij}$  e dunque

$$F(y) = \int_a^b g(x) dx \geq \underline{S}(g, \sigma_1) = \sum_i m_i(y) \mathcal{L}(I_i) \geq \sum_i m_{ij} \mathcal{L}(I_i), \quad (4)$$

$$F(y) = \int_a^b g(x) dx \leq \overline{S}(g, \sigma_1) = \sum_i M_i(y) \mathcal{L}(I_i) \leq \sum_i M_{ij} \mathcal{L}(I_i). \quad (5)$$

Per ogni  $j = 1, \dots, m$  poniamo

$$m_j := \inf_{y \in J_j} F(y), \quad M_j := \sup_{y \in J_j} F(y).$$

Per via delle disuguaglianze (4) e (5) abbiamo

$$m_j \geq \sum_i m_{ij} \mathcal{L}(I_i), \quad M_j \leq \sum_i M_{ij} \mathcal{L}(I_i).$$

Otteniamo così che

$$\begin{aligned} \underline{S}(F, \sigma_2) &= \sum_j m_j \mathcal{L}(J_j) \geq \sum_j \left( \sum_i m_{ij} \mathcal{L}(I_i) \right) \mathcal{L}(J_j) = \sum_{i,j} m_{ij} \mathcal{A}(R_{ij}) = \underline{S}(f, \sigma_1 \times \sigma_2), \\ \overline{S}(F, \sigma_2) &= \sum_j M_j \mathcal{L}(J_j) \leq \sum_j \left( \sum_i M_{ij} \mathcal{L}(I_i) \right) \mathcal{L}(J_j) = \sum_{i,j} M_{ij} \mathcal{A}(R_{ij}) = \overline{S}(f, \sigma_1 \times \sigma_2). \end{aligned}$$

Dunque per ogni suddivisione  $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2$  del rettangolo  $R$  abbiamo che

$$\overline{S}(F, \sigma_2) - \underline{S}(F, \sigma_2) \leq \overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma). \quad (6)$$

Siccome per ipotesi  $f$  è integrabile su  $R$ , per il criterio di integrabilità del teorema 2.3 abbiamo che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una suddivisione  $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2$  del rettangolo  $R$  per la quale si ha che  $\overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) < \varepsilon$ ; per (6) ne segue che  $\overline{S}(F, \sigma_2) - \underline{S}(F, \sigma_2) < \varepsilon$ , quindi per il criterio di integrabilità (per funzioni di una variabile) abbiamo che  $F(y)$  è integrabile su  $[c, d]$ . Inoltre abbiamo

$$\underline{S}(f, \sigma) \leq \underline{S}(F, \sigma_2) \leq \int_c^d F(y) dy \leq \overline{S}(F, \sigma_2) \leq \overline{S}(f, \sigma),$$

da cui, prendendo l'estremo superiore delle somme inferiori e l'estremo inferiore delle somme superiori, ricaviamo che

$$\iint_R f \, dx \, dy = \int_c^d F(y) \, dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

□

*Osservazione 3.2.* Se abbiamo come ipotesi solo che

- per ogni  $y \in [c, d]$  la funzione  $x \mapsto f(x, y)$  è integrabile su  $[a, b]$ ,
- e la funzione  $y \mapsto \int_a^b f(x, y) \, dx$  è integrabile su  $[c, d]$ ,

non possiamo concludere che  $f(x, y)$  è integrabile su  $[a, b] \times [c, d]$ . Infatti, consideriamo la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \operatorname{sgn}(x), & \text{se } x \in [-1, 1] \text{ e } y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ -\operatorname{sgn}(x), & \text{se } x \in [-1, 1] \text{ e } y \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

definita per  $(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1]$  (rettangolo di area 2). Per ogni  $y \in [0, 1]$  la funzione  $x \mapsto f(x, y)$  è monotona su  $[-1, 1]$  e dunque integrabile; inoltre  $y \mapsto \int_{-1}^1 f(x, y) \, dx = 0$  è costante su  $[0, 1]$  e dunque integrabile. Ma la funzione  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  non è integrabile su  $[-1, 1] \times [0, 1]$ , infatti, su ogni rettangolino  $R_{ij}$  di qualsiasi suddivisione abbiamo che  $f$  assume sia il valore 1 che il valore  $-1$  e dunque  $m_{ij} = -1$  e  $M_{ij} = 1$ . Quindi avremo che  $\underline{S}(f, \sigma) = -2$  per ogni somma inferiore e  $\overline{S}(f, \sigma) = +2$  per ogni somma superiore. Ne segue che l'integrale inferiore e l'integrale superiore non coincidono e quindi la funzione non è integrabile secondo Riemann.

*Osservazione 3.3.* Le ipotesi richieste dal teorema 3.1 sono certamente soddisfatte quando la funzione integranda è continua sul rettangolo su cui si integra.

Quando sono valide entrambe le formule di riduzione (2) e (3) abbiamo due modi alternativi per poter calcolare l'integrale doppio e inoltre vale la formula dello scambio dell'ordine di integrazione,

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

L'integrazione risulta particolarmente semplice quando la funzione integranda ha la forma di prodotto del tipo  $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$  con  $\varphi$  integrabile su  $[a, b]$  e  $\psi$  integrabile su  $[c, d]$ . In tal caso applicando le formule di riduzione otteniamo

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} \varphi(x)\psi(y) \, dx \, dy = \left( \int_a^b \varphi(x) \, dx \right) \left( \int_c^d \psi(y) \, dy \right).$$

**Esempio 3.4.** Calcoliamo l'integrale di  $f(x, y) = x^2 y^3$  sul rettangolo  $R := [0, 3] \times [2, 6]$ . Si tratta di una funzione continua su  $R$  e quindi integrabile; inoltre la funzione è il prodotto di una funzione di  $x$  per una funzione di  $y$ , dunque

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^3 x^2 \, dx \int_2^6 y^3 \, dy = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=3} \left[ \frac{1}{4} y^4 \right]_{y=2}^{y=6} = (9 - 0)(324 - 4) = 2880.$$

**Esempio 3.5.** Calcoliamo l'integrale di  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}$  sul rettangolo  $R := [2, 4] \times [0, 1]$ . Procediamo con le formule di riduzione integrando prima rispetto ad  $x$  e poi rispetto ad  $y$ . Per integrare rispetto ad  $x$  osserviamo che  $\partial_x \sqrt{x-y^2} = \frac{1}{2\sqrt{x-y^2}}$  e dunque abbiamo

$$\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x-y^2}} dx = 2 \int_2^4 \frac{1}{2\sqrt{x-y^2}} dx = 2 \left[ \sqrt{x-y^2} \right]_{x=2}^{x=4} = 2\sqrt{4-y^2} - 2\sqrt{2-y^2}.$$

Può risultare utile osservare che una primitiva di  $2\sqrt{1-t^2}$  (che si può ricavare integrando per parti) è data da

$$\int 2\sqrt{1-t^2} dt = \arcsin(t) + t\sqrt{1-t^2}.$$

Integriamo rispetto ad  $y$ , usando le sostituzioni  $y = 2t$  e  $y = \sqrt{2}s$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x-y^2}} dx dy &= \int_0^1 2\sqrt{4-y^2} dy - \int_0^1 2\sqrt{2-y^2} dy = \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{1-t^2} dt - 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2\sqrt{1-s^2} ds = \\ &= 4 \left[ \arcsin t + t\sqrt{1-t^2} \right]_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} - 2 \left[ \arcsin s + s\sqrt{1-s^2} \right]_{s=0}^{s=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \\ &= 4 \left( \arcsin \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4}} \right) - 2 \left( \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$

Potevamo anche procedere con le formule di riduzione integrando prima rispetto ad  $y$  e poi rispetto ad  $x$ . Se integriamo prima rispetto ad  $y$ , operando la sostituzione  $y = \sqrt{x}t$  otteniamo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-y^2}} dy = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\arcsin t]_{t=0}^{t=\frac{1}{\sqrt{x}}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Integriamo poi rispetto ad  $x$ ,

$$\int_2^4 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-y^2}} dy dx = \int_2^4 \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Per calcolare quest'ultimo integrale osserviamo che una primitiva di  $\arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$  (che si può ricavare integrando per parti) è data da

$$x \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x-1}.$$



Quindi

$$\begin{aligned} \int_2^4 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-y^2}} dy dx &= \left[ x \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x-1} \right]_{x=2}^{x=4} = \\ &= 4 \arcsin \frac{1}{\sqrt{4}} + \sqrt{4-1} - 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2-1} = \\ &= 4 \cdot \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$

Possiamo notare come cambiando l'ordine di integrazione otteniamo comunque lo stesso risultato, ma i due percorsi di integrazione ci hanno portato a svolgere calcoli assai diversi tra loro.

**Esempio 3.6.** L'ordine con cui si scelgono le variabili di integrazione può rivelarsi cruciale. Calcoliamo l'integrale di  $f(x, y) = 2xye^{xy^2}$  sul rettangolo  $R := [0, 2] \times [1, 3]$ . Integrando prima in  $x$  e poi in  $y$  abbiamo

$$\begin{aligned} \iint_R 2xye^{xy^2} dx dy &= \int_1^3 2y \left( \int_0^2 xe^{xy^2} dx \right) dy = \int_1^3 2y \left[ \frac{xe^{xy^2}}{y^2} - \frac{e^{xy^2}}{y^4} \right]_{x=0}^{x=2} dy = \\ &= \int_1^3 \left( \frac{4e^{2y^2}}{y} - \frac{2e^{2y^2}}{y^3} + \frac{2}{y^3} \right) dy = ??? \end{aligned}$$

Mentre una primitiva di  $\frac{1}{y^3}$  è data da  $-\frac{2}{y^2}$ , una primitiva di  $\frac{e^{2y^2}}{y^k}$  con  $k = 1, 3$  non è possibile esprimerla come combinazione o composizione di funzioni elementari, e dunque non riusciamo a portare a termine il calcolo. Se invece integriamo prima in  $y$  e poi in  $x$  troviamo che i calcoli sono molto semplici e riusciamo facilmente ad arrivare al risultato,

$$\begin{aligned} \iint_R 2xye^{xy^2} dx dy &= \int_0^2 \left( \int_1^3 e^{xy^2} 2xy dy \right) dx = \int_0^2 \left[ e^{xy^2} \right]_{y=1}^{y=3} dx = \int_0^2 (e^{9x} - e^x) dx = \\ &= \left[ \frac{1}{9}e^{9x} - e^x \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{9}e^{18} - e^2 + \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

---

**Esercizio 3.7.** Calcola gli integrali delle seguenti funzioni sui rettangoli indicati:

1.  $f(x, y) = 2xy^2 + 3\frac{x^2}{y}$  su  $R = [-2, 3] \times [-2, -1]$ ;
2.  $f(x, y) = x|x-y|$  su  $R = [-1, 2] \times [0, 3]$ ;
3.  $f(x, y) = \log(1+x) + \log(1+y^2)$  su  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ ;
4.  $f(x, y) = \log(1+x) \log(1+y^2)$  su  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ ;
5.  $f(x, y) = \log\left(\frac{1+x}{1+y^2}\right)$  su  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ ;
6.  $f(x, y) = \frac{y}{1+x}$  su  $R = [2, 3] \times [0, 1]$ ;

7.  $f(x, y) = \frac{1}{(2x+y)^2}$  su  $R = [0, 1] \times [1, 2]$ ;
  8.  $f(x, y) = \frac{y}{1+xy}$  su  $R = [0, 2] \times [0, 1]$ ;
  9.  $f(x, y) = x \sin(xy)$  su  $R = [0, 1] \times [0, \pi]$ ;
  10.  $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$  su  $R = [1, 2] \times [1, 2]$ ;
  11.  $f(x, y) = x^{-3}e^{y/x}$  su  $R = [1, 2] \times [0, 1]$ ;
  12.  $f(x, y) = \log(1 + 2x + 3y)$  su  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ ;
  13.  $f(x, y) = \sqrt{|x - y|}$  su  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ ;
  14.  $f(x, y) = \sin(x + y) \cos(x - y)$  su  $R = [0, \pi/4] \times [0, \pi/4]$ ;
  15.  $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$  su  $R = [1, 2] \times [1, 2]$ ;
  16.  $f(x, y) = \operatorname{sgn}(xy - 1)$  su  $R = [0, 2] \times [0, 2]$ .
- 

## 4 Integrali di funzioni di $n$ variabili

Sia  $n \in \mathbb{N}$ . Tutto quanto abbiamo definito e dimostrato per integrali su intervalli e su rettangoli può essere ripetuto allo stesso modo anche per funzioni di  $n$  variabili definite su rettangoli  $n$ -dimensionali,

$$\mathbf{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Il volume  $n$ -dimensionale di  $\mathbf{R}$  è dato da

$$\mathcal{V}(\mathbf{R}) = \prod_{i=1}^n \mathcal{L}([a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Data una funzione scalare  $f(\mathbf{x})$  definita per  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$ , la definizione dell'integrale  $\int_{\mathbf{R}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  si ottiene tramite approssimazioni per difetto e per eccesso con somme inferiori e somme superiori costruite tramite suddivisioni  $\sigma$  di  $\mathbf{R}$  in rettangolini  $n$ -dimensionali,

$$\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2 \times \cdots \times \sigma_n,$$

dove  $\sigma_k$  è una suddivisione dell'intervallo  $[a_k, b_k]$ ,

$$\sigma_k : a_k = x_{1,k} < x_{2,k} < \cdots < x_{m_k,k} = b_k.$$

Per ogni scelta di indici  $i_1, \dots, i_n$  con  $i_k = 1, \dots, m_k$ , poniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i_1, i_2, \dots, i_n} &:= [x_{i_1-1,1}, x_{i_1,1}] \times [x_{i_2-1,2}, x_{i_2,2}] \times \cdots \times [x_{i_n-1,n}, x_{i_n,n}], \\ m_{i_1, i_2, \dots, i_n} &:= \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_{i_1, i_2, \dots, i_n}} f(\mathbf{x}), \quad M_{i_1, i_2, \dots, i_n} := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_{i_1, i_2, \dots, i_n}} f(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

e quindi possiamo definire le somme inferiori e superiori

$$\underline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) := \sum_{\substack{i_1=1, \dots, m_1 \\ i_2=1, \dots, m_2 \\ \vdots \\ i_n=1, \dots, m_n}} m_{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathcal{V}(\mathbf{R}_{i_1, i_2, \dots, i_n}),$$

$$\overline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) := \sum_{\substack{i_1=1, \dots, m_1 \\ i_2=1, \dots, m_2 \\ \vdots \\ i_n=1, \dots, m_n}} M_{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathcal{V}(\mathbf{R}_{i_1, i_2, \dots, i_n}).$$

Quando al variare della suddivisione  $\boldsymbol{\sigma}$  l'estremo superiore delle somme inferiori coincide con l'estremo inferiore delle somme superiori allora la funzione  $f$  si dice integrabile secondo Riemann e il valore di tali estremi definisce l'integrale di  $f$  su  $\mathbf{R}$ ,

$$\int_{\mathbf{R}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sup_{\boldsymbol{\sigma}} \underline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) = \inf_{\boldsymbol{\sigma}} \overline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}).$$

Tutte le proprietà valide per integrali bidimensionali valgono anche per integrali  $n$  dimensionali. Se la funzione  $f$  è continua su  $\mathbf{R}$  allora è sicuramente integrabile e valgono le formule di riduzione che trasformano l'integrale su  $\mathbf{R}$  in una sequenza di  $n$  integrali unidimensionali, integrando una variabile alla volta,

$$\int_{\mathbf{R}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \dots \left( \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \, dx_n \right) \dots dx_2 \right) dx_1.$$

Inoltre il valore dell'integrale è indipendente dall'ordine con cui si scelgono le variabili di integrazione, che può essere scelto tra le  $n!$  possibili permutazioni delle  $n$  variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Quindi, ad esempio per integrali tripli abbiamo  $3! = 6$  modi diversi per poter calcolare l'integrale usando le formule di riduzione.

**Esempio 4.1.** Calcoliamo l'integrale di  $f(x, y, z) = \frac{2x}{(y+2z)^2}$  sulla regione

$$P = [1, 2] \times [2, 4] \times [0, 3].$$

Possiamo scegliere qualsiasi ordine per le variabili di integrazione, proviamo ad integrare prima rispetto a  $z$ , poi rispetto ad  $x$ , ed infine rispetto a  $y$ . Integriamo rispetto a  $z$  su  $[0, 3]$ ,

$$g(x, y) := \int_0^3 f(x, y, z) \, dz = x \int_0^3 \frac{2 \, dz}{(y+2z)^2} = x \left[ -\frac{1}{y+2z} \right]_{z=0}^{z=3} = x \left( -\frac{1}{y+6} + \frac{1}{y} \right);$$

poi integriamo quello che abbiamo ottenuto rispetto a  $x$  su  $[1, 2]$ ,

$$h(y) := \int_1^2 g(x, y) \, dx = \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y+6} \right) \int_1^2 x \, dx = \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y+6} \right) \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y+6} \right),$$

e infine integriamo rispetto a  $y$  su  $[2, 4]$ ,

$$\begin{aligned} \int_2^4 h(y) dy &= \frac{3}{2} \int_2^4 \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y+6} \right) dy = \frac{3}{2} [\log(y) - \log(y+6)]_{y=2}^{y=4} = \\ &= \frac{3}{2} (\log 4 - \log 10 - \log 2 + \log 8) = \frac{3}{2} \log \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Per le formule di riduzione abbiamo

$$\begin{aligned} \iiint_P f(x, y, z) dx dy dz &= \int_2^4 \left( \int_1^2 \left( \int_0^3 f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy = \\ &= \int_2^4 \left( \int_1^2 g(x, y) dx \right) dy = \int_2^4 h(y) dy = \frac{3}{2} \log \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

**Esercizio 4.2.** Calcola in tutti i 6 modi possibili (variando l'ordine delle variabili di integrazione) il valore dell'integrale

$$\iiint_P xy^2 \cos(x+2z) dx dy dz,$$

dove  $P = [0, \pi/2] \times [0, \pi/3] \times [0, \pi/4]$ .

**Esercizio 4.3.** Calcola l'integrale delle seguenti funzioni sui domini indicati:

1.  $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$  su  $[0, 5] \times [1, 4] \times [2, 3]$ ;
2.  $f(x, y, z) = \frac{1}{x+y+z}$  su  $[1, 2] \times [1, 2] \times [1, 2]$ ;
3.  $f(x, y, z, t) = \frac{t-z}{x+y}$  su  $[0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3] \times [3, 4]$ .
4.  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$  su  $[0, 1]^n$ , con  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .

## 5 Integrale di Riemann su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$

Finora abbiamo descritto l'integrale di Riemann solo per funzioni definite su domini di tipo rettangolare. Vediamo ora come poter definire l'integrale anche su domini non necessariamente rettangolari.

Sia  $\Omega$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 5.1.** Ogni funzione  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definita su  $\Omega$ , può essere estesa ad una funzione  $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definita su tutto  $\mathbb{R}^n$ , ponendo

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{quando } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0, & \text{quando } \mathbf{x} \notin \Omega. \end{cases}$$

Chiameremo  $\tilde{f}$  l'estensione a zero di  $f$ .

**Definizione 5.2.** L'estensione a zero della funzione costante  $f(\mathbf{x}) = 1$  su  $\Omega$  si dice *funzione caratteristica* di  $\Omega$  e la indichiamo con  $\chi_\Omega(\mathbf{x})$ ,

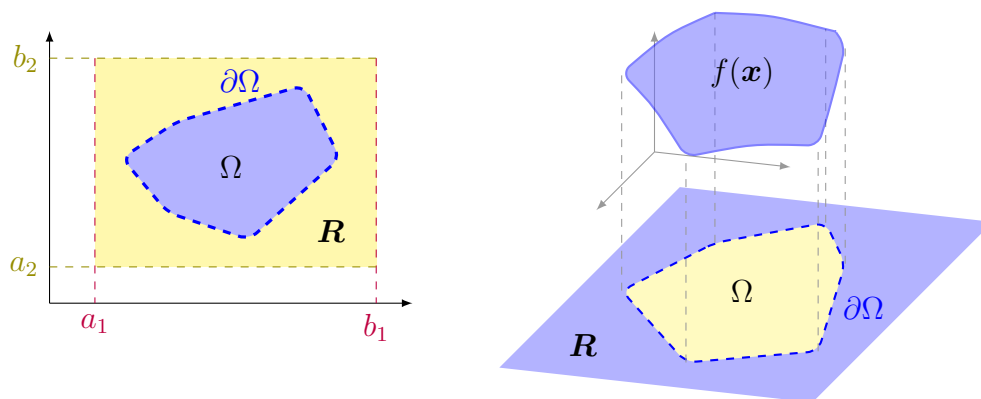
$$\chi_\Omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{quando } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0, & \text{quando } \mathbf{x} \notin \Omega. \end{cases}$$

*Osservazione 5.3.* Dati due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  di  $\mathbb{R}^n$ , abbiamo che:

- se  $A \subseteq B$  allora  $0 \leq \chi_A(\mathbf{x}) \leq \chi_B(\mathbf{x}) \leq 1$ ;
- $\chi_{A \cup B}(\mathbf{x}) = \chi_A(\mathbf{x}) + \chi_B(\mathbf{x}) - \chi_{A \cap B}(\mathbf{x})$ .

Quando  $\Omega$  è un insieme limitato, esso è contenuto in qualche rettangolo  $n$ -dimensionale  $\mathbf{R}$ ,

$$\Omega \subseteq \mathbf{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$



**Definizione 5.4.** Sia  $\Omega$  un sottoinsieme *limitato* di  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione *limitata*. La funzione  $f$  si dice *integrabile secondo Riemann* su  $\Omega$  quando la sua estensione a zero  $\tilde{f}$  è integrabile secondo Riemann su un rettangolo  $\mathbf{R}$  che contiene  $\Omega$ , e in tal caso poniamo

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \int_{\mathbf{R}} \tilde{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Essendo  $\tilde{f}$  nulla fuori da  $\Omega$ , questa definizione non dipende dalla scelta del rettangolo  $\mathbf{R}$ .

In generale l'estensione a zero  $\tilde{f}$  può presentare discontinuità lungo la frontiera  $\partial\Omega$  del dominio  $\Omega$ ; ad esempio, l'insieme dei punti di discontinuità della funzione caratteristica  $\chi_\Omega$  coincide esattamente con la frontiera  $\partial\Omega$ . Pertanto l'integrabilità di  $f$  non è garantita nemmeno se  $f$  è continua su  $\Omega$ , ma può dipendere dalle proprietà geometriche del dominio  $\Omega$ . Un importante teorema dovuto a Lebesgue, che enunciamo ma di cui non diamo la dimostrazione, afferma che l'integrabilità di una funzione è determinata dall'insieme dei suoi punti di discontinuità.

**Teorema 5.5** (Lebesgue). *Sia  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata definita sul rettangolo  $n$ -dimensionale  $\mathbf{R}$ , allora  $f$  è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei punti di discontinuità di  $f$  è un insieme di misura nulla secondo Lebesgue.*

Per capire il senso dell'enunciato del teorema abbiamo bisogno di specificare cosa sia un *insieme di misura nulla secondo Lebesgue*, e lo definiremo nella prossima sezione. Intanto possiamo osservare che, come immediata conseguenza di questo teorema, l'integrabilità di funzioni continue su domini di  $\mathbb{R}^n$  è garantita per domini con frontiera di misura nulla.

**Corollario 5.6.** *Sia  $\Omega$  un sottoinsieme limitato di  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Se  $\Omega$  ha frontiera  $\partial\Omega$  di misura nulla secondo Lebesgue allora  $f$  è integrabile su  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo  $\tilde{f}$ , l'estensione a zero di  $f$ . Se  $p$  è un punto interno a  $\Omega$  allora  $\tilde{f}(x)$  coincide con  $f(x)$  per ogni  $x$  in un intorno di  $p$  e quindi  $\tilde{f}$  è continua in  $p$  (perché lo è  $f$ ). Se  $p$  è un punto esterno a  $\Omega$  allora  $\tilde{f}(x)$  coincide con zero per ogni  $x$  in un intorno di  $p$  e quindi  $\tilde{f}$  è continua in  $p$  (perché è costante intorno a  $p$ ). Dunque i punti in cui  $\tilde{f}$  è discontinua sono necessariamente contenuti nei punti di frontiera di  $\Omega$ . Quindi se la frontiera ha misura nulla anche l'insieme dei punti di discontinuità di  $\tilde{f}$  ha misura nulla. Per il teorema 5.5 segue che  $\tilde{f}$  è integrabile su ogni rettangolo che contiene  $\Omega$ , e dunque  $f$  è integrabile su  $\Omega$ .  $\square$

## 6 Insiemi di misura nulla

**Definizione 6.1.** Diciamo che un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}^n$  ha *misura nulla* (secondo Lebesgue) quando per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una successione  $(\mathbf{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  di rettangoli  $n$ -dimensionali tale che la loro unione contiene  $E$  e la somma dei loro volumi complessivamente è minore di  $\varepsilon$ ,

$$E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{R}_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{V}(\mathbf{R}_k) < \varepsilon.$$

Ricordiamo che il volume  $n$ -dimensionale di un rettangolo  $n$ -dimensionale è dato dal prodotto delle lunghezze degli  $n$  intervalli unidimensionali che determinano il rettangolo,

$$\mathcal{V}([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

*Osservazione 6.2.* La sommatoria  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  di infiniti termini di una successione di valori non negativi  $a_k \geq 0$ , detta *serie numerica a termini non negativi*, si definisce come limite, o equivalentemente come estremo superiore, delle sue somme parziali:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n a_k.$$

È evidente dalla definizione che ogni sottoinsieme di un insieme di misura nulla è ancora un insieme di misura nulla. Meno evidente invece è che l'unione di una infinità numerabile di insiemi di misura nulla è ancora un insieme di misura nulla.

**Proposizione 6.3.** Se  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  è una successione di sottoinsiemi di misura nulla in  $\mathbb{R}^n$  allora anche la loro unione  $E := \cup_{k \in \mathbb{N}} E_k$  è un insieme di misura nulla.

*Dimostrazione.* Sia  $\varepsilon > 0$ . Per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , sia  $\varepsilon_k := 2^{-k}\varepsilon$ . Siccome  $E_k$  ha misura nulla esisterà una successione  $(\mathbf{R}_{k,j})_{j \in \mathbb{N}}$  di rettangoli  $n$ -dimensionali in  $\mathbb{R}^n$  tali che

$$E_k \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathbf{R}_{k,j}, \quad \sum_j \mathcal{V}(\mathbf{R}_{k,j}) < \varepsilon_k.$$

Dunque avremo che

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \subseteq \bigcup_{k,j \in \mathbb{N}} \mathbf{R}_{k,j},$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} \sum_{k,j \in \mathbb{N}} \mathcal{V}(\mathbf{R}_{k,j}) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{V}(\mathbf{R}_{k,j}) < \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varepsilon = \varepsilon \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^k = \\ &= \varepsilon \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m}{1 - \frac{1}{2}} = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque  $E$  si può ricoprire con una successione numerabile di rettangoli con volume complessivo minore di  $\varepsilon$ .  $\square$

Un insieme formato da un singolo punto ha misura nulla. Un insieme si dice *numerabile* quando coincide con l'insieme formato dai valori di una successione. Ogni insieme numerabile di  $\mathbb{R}^n$  ha misura nulla. Ad esempio l'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^n$  le cui coordinate sono tutte razionali è un insieme di misura nulla (essendo formato da una quantità numerabile di punti), pur essendo denso in tutto lo spazio.

Il grafico di una funzione di  $n$  variabili integrabile è sempre un insieme di misura nulla in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . In particolare rette nel piano  $\mathbb{R}^2$ , o rette e piani nello spazio  $\mathbb{R}^3$ , sono insiemi di misura nulla.

**Proposizione 6.4.** Sia  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione integrabile secondo Riemann sul rettangolo  $n$ -dimensionale  $\mathbf{R}$ . Il grafico di  $f$ ,

$$\text{grafico}(f) := \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

è un insieme di misura nulla secondo Lebesgue in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo per semplicità di notazione il caso  $n = 1$  di una funzione di una variabile integrabile su un intervallo  $[a, b]$ . Sia  $\varepsilon > 0$ . Per il criterio di integrabilità, abbiamo che esiste una suddivisione  $\sigma$  di  $[a, b]$  per la quale abbiamo  $\overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) < \varepsilon$ . Supponiamo che  $\sigma$  scomponga  $[a, b]$  negli intervalli  $I_1, I_2, \dots$ , se poniamo  $m_k = \inf_{I_k} f$  e  $M_k = \sup_{I_k} f$  allora

$$\overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) = \sum_k (M_k - m_k) \mathcal{L}(I_k) = \sum_k \mathcal{A}(R_k).$$

dove  $R_k$  è il rettangolo in  $\mathbb{R}^2$  definito da  $R_k := I_k \times [m_k, M_k]$ . Quando  $x \in I_k$  abbiamo  $f(x) \in [m_k, M_k]$  e dunque  $(x, f(x)) \in R_k$ . Otteniamo dunque che

$$\text{grafico}(f) \subseteq \bigcup_k R_k, \quad \sum_k \mathcal{A}(R_k) = \overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) < \varepsilon.$$

Dunque il grafico di  $f$  può essere ricoperto con una sequenza di rettangoli con area complessiva inferiore a qualsiasi quantità positiva, il che significa che è un insieme di misura (bidimensionale) nulla in  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

## 7 Insiemi misurabili secondo Peano-Jordan

**Definizione 7.1.** Sia  $\Omega$  un sottoinsieme *limitato* di  $\mathbb{R}^n$ . L'insieme  $\Omega$  si dice *misurabile* secondo Peano-Jordan quando la sua funzione caratteristica  $\chi_\Omega$  è integrabile secondo Riemann su un rettangolo  $\mathbf{R}$  che contiene  $\Omega$ , ovvero quando la funzione costante 1 è integrabile secondo Riemann su  $\Omega$ . Quando  $\Omega$  è misurabile, la sua *misura*  $n$ -dimensionale secondo Peano-Jordan è data da

$$\mathcal{V}(\Omega) := \int_\Omega 1 \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}} \chi_\Omega(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

**Proposizione 7.2.** Un sottoinsieme *limitato*  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$  è *misurabile* secondo Peano-Jordan se e solo se la sua frontiera  $\partial\Omega$  è un insieme di misura nulla secondo Lebesgue.

*Dimostrazione.* Per il teorema 5.5 abbiamo che  $\Omega$  è misurabile se e solo se l'insieme dei punti di discontinuità di  $\chi_\Omega$  è un insieme di misura nulla, e tale insieme coincide con  $\partial\Omega$ .  $\square$

**Proposizione 7.3.** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi misurabili secondo Peano-Jordan. Allora l'unione  $A \cup B$ , l'intersezione  $A \cap B$  e la differenza  $A \setminus B$  sono ancora insiemi misurabili secondo Peano-Jordan.

*Dimostrazione.* Segue dal fatto che le frontiere dell'unione, dell'intersezione e della differenza sono contenute nell'unione delle frontiere dei due insiemi,

$$\partial(A \cup B) \subseteq (\partial A) \cup (\partial B), \quad \partial(A \cap B) \subseteq (\partial A) \cup (\partial B), \quad \partial(A \setminus B) \subseteq (\partial A) \cup (\partial B).$$

$\square$

*Osservazione 7.4.* Collegandoci all'osservazione 5.3, se  $A$  e  $B$  sono due insiemi misurabili secondo Peano-Jordan allora per le proprietà di monotonia e di linearità dell'integrale abbiamo che

- se  $A \subseteq B$  allora  $\mathcal{V}(A) \leq \mathcal{V}(B)$ ;
- $\mathcal{V}(A \cup B) = \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B) - \mathcal{V}(A \cap B)$ .



**Proposizione 7.5.** *Sia  $\Omega$  un sottoinsieme misurabile secondo Peano-Jordan contenuto nel rettangolo  $n$ -dimensionale  $\mathbf{R}$ . Se  $f$  è una funzione integrabile secondo Riemann su  $\mathbf{R}$ , allora la restrizione di  $f$  ad  $\Omega$  è integrabile secondo Riemann su  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* L'integrabilità di  $f$  su  $\Omega$  equivale all'integrabilità di  $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\chi_\Omega(\mathbf{x})$ , l'estensione a zero della restrizione di  $f$  ad  $\Omega$ . La funzione  $g$  è integrabile su  $R$  essendo il prodotto di due funzioni integrabili su  $R$ .  $\square$

**Lemma 7.6.** *Sia  $\Omega$  un sottoinsieme limitato, di misura nulla in  $\mathbb{R}^n$  e misurabile secondo Peano-Jordan. Sia  $f$  una funzione limitata definita su  $\Omega$ . Allora  $\int_\Omega f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo la parte positiva  $f_+$  di  $f$ . Siccome  $f$  è limitata, esiste una costante  $M \geq 0$  tale che  $0 \leq f_+(x) \leq M$  per ogni  $x \in \Omega$ . Se indichiamo con  $\tilde{f}_+$  l'estensione a zero di  $f_+$ , avremo che  $0 \leq \tilde{f}_+(x) \leq M\chi_\Omega(x)$  per ogni  $x \in R$ , dove  $R$  è un rettangolo che contiene  $\Omega$ . Per le ipotesi su  $\Omega$ , la funzione caratteristica  $\chi_\Omega$  è integrabile e  $\int_R \chi_\Omega = 0$ . Per ogni  $\varepsilon > 0$  esisterà allora una suddivisione  $\sigma$  di  $R$  tale che  $\overline{S}(\chi_\Omega, \sigma) < \frac{\varepsilon}{M}$ ; per confronto allora avremo

$$0 \leq \underline{S}(\tilde{f}_+, \sigma) \leq \overline{S}(\tilde{f}_+, \sigma) \leq \overline{S}(M\chi_\Omega, \sigma) < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Ne segue che  $\tilde{f}_+$  è integrabile su  $R$  e il suo integrale è nullo e dunque  $\int_\Omega f_+ = 0$ .

Procedendo in modo analogo si ricava che anche per la parte negativa di  $f$  si ha  $\int_\Omega f_- = 0$ . Quindi

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f_+ - \int_\Omega f_- = 0 - 0 = 0.$$

$\square$

Per l'integrale di Riemann vale la proprietà di additività rispetto a domini misurabili.

**Proposizione 7.7.** *Siano  $A$  e  $B$  due insiemi misurabili secondo Peano-Jordan essenzialmente disgiunti, ovvero la cui intersezione è un insieme di misura nulla. Sia  $f$  una funzione definita sull'unione  $A \cup B$  dei due insiemi. Se  $f$  è integrabile secondo Riemann sia su  $A$  che su  $B$  allora  $f$  è integrabile secondo Riemann su  $A \cup B$  e abbiamo*

$$\int_{A \cup B} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_A f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (7)$$

*Dimostrazione.* Sia  $\tilde{f}$  l'estensione a zero di  $f$ ; allora vale

$$\tilde{f}\chi_{A \cup B} = \tilde{f}\chi_A + \tilde{f}\chi_B - \tilde{f}\chi_{A \cap B}. \quad (8)$$

Per ipotesi  $A \cap B$  ha misura nulla e quindi per il lemma 7.6 avremo che  $\int_{A \cap B} f = 0$  e dunque la formula (7) segue da (8) per linearità dell'integrale.  $\square$

La proprietà di additività ci permetterà di calcolare integrali su domini "complicati" decomponendoli nell'unione di parti più "semplici". Un dominio semplice per noi sarà una regione delimitata dal grafico di due funzioni continue. Vedremo nella prossima lezione come ridurre il calcolo di integrali su domini semplici a una iterazione di integrali in una variabile.