Analisi Matematica 1B - a.a. 2020–2021 - Lezione 18

Calcolo di integrali multipli e applicazioni.

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 17 maggio 2021)

1 Integrali tripli in coordinate cilindriche

Nello spazio $\mathbb{R}^3$ possiamo applicare coordinate polari a due delle tre coordinate cartesiane, lasciando invariata la terza, otteniamo così un sistema di *coordinate cilindriche.* Ad esempio, le coordinate cilindriche (r, θ, z) di asse verticale $(x = x_\star, y = y_\star)$ sono descritte dalla trasformazione $(x, y, z) = \Phi(r, \theta, z)$ definita da

$$\begin{cases} x = \Phi_1(r, \theta, z) := x_\star + r\cos\theta, \\ y = \Phi_2(r, \theta, z) := y_\star + r\sin\theta, \\ z = \Phi_3(r, \theta, z) := z. \end{cases}$$

La sua matrice Jacobiana è

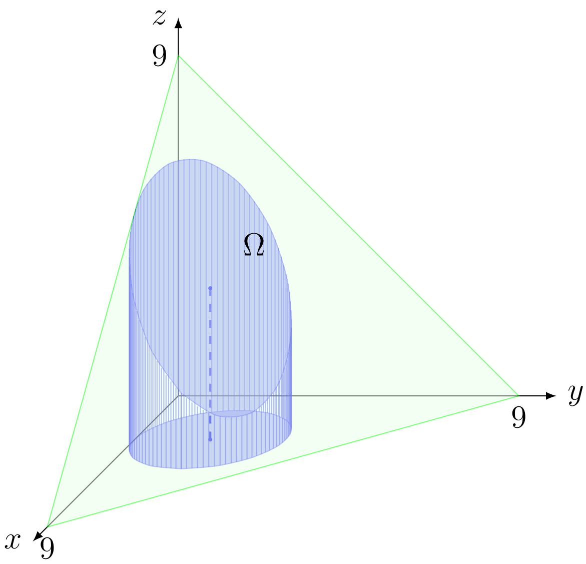
$$J_\Phi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

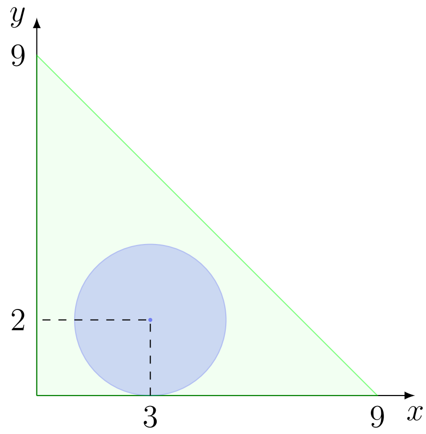
Calcolando il determinante Jacobiano della trasformazione troviamo che esso risulta essere lo stesso delle coordinate polari, $\det J_\Phi(r, \theta, z) = r$, e dunque negli integrali tripli opereremo la sostituzione

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

Esempio 1.1. Calcoliamo l'integrale triplo $\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ dove Ω è la porzione del cilindro verticale di asse $(x = 3, y = 2)$ e raggio 2 compresa tra il piano orizzontale $z = 0$ e il piano obliquo di equazione $x + y + z = 9$

$$\Omega := \left\{(x, y, z) \colon (x-3)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4,\ z \geqslant 0,\ x + y + z \leqslant 9\right\}.$$





Usiamo coordinate cilindriche con asse verticale $(x, y) = (3, 2)$,

$$x = 3 + r\cos\theta, \quad y = 2 + r\sin\theta, \quad z = z.$$

La condizione $x+y+z \leqslant 9$ diventa $5+r(\cos\theta+\sin\theta)+z \leqslant 9$ e il dominio di integrazione si trasforma nella regione

$$D := \{(r, \theta, z) \colon 0 \leqslant r \leqslant 2,\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant z \leqslant 4 - r\cos\theta - r\sin\theta\}.$$

Procedendo integrando per fili verticali, l'integrale in coordinate cilindriche diventa

$$\iiint_\Omega x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iiint_D (3 + r\cos\theta) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z = \\ = \int_0^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_0^{4-r\cos\theta-r\sin\theta} (3 + r\cos\theta) r \,\mathrm{d}z \Big) \,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r.$$

L'integrale rispetto a z è immediato in quanto l'integrando non dipende da z,

$$J(r, \theta) := \int_0^{4-r\cos\theta-r\sin\theta} (3 + r\cos\theta) r \,\mathrm{d}z = \\ = (4 - r\cos\theta - r\sin\theta)(3 + r\cos\theta) r = \\ = 12r + r^2\cos\theta - 3r^2\sin\theta - r^3(\cos\theta)^2 - r^3\cos\theta\sin\theta.$$

Prima di integrare rispetto a θ su $[-\pi, \pi]$ osserviamo che le funzioni $\sin\theta$ e $\cos\theta\sin\theta$ sono dispari e dunque il loro integrale su intervalli simmetrici rispetto all'origine è nullo, anche l'integrale di $\cos\theta$ è nullo su un intervallo di lunghezza 2π, pertanto

$$K(r) := \int_{-\pi}^{\pi} J(r, \theta) \,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left(12r - r^3(\cos\theta)^2\right) \mathrm{d}\theta = 24\pi r - \pi r^3.$$

Rimane da integrare rispetto ad r,

$$\iiint_\Omega x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_0^2 K(r) \,\mathrm{d}r = \left[12\pi r^2 - \frac{\pi}{4} r^4\right]_{r=0}^2 = 44\pi.$$

Esercizio 1.2. Calcola l'integrale $\iiint_\Omega \frac{y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, dove Ω è la regione di $\mathbb{R}^3$ esterna al cilindro di equazione $x^2+y^2=1$, interna al cilindro di equazione $(x-1)^2+y^2=1$, e compresa tra il piano $z=0$ e il grafico della funzione $z=\frac{x^2+y^2}{x^2}$,

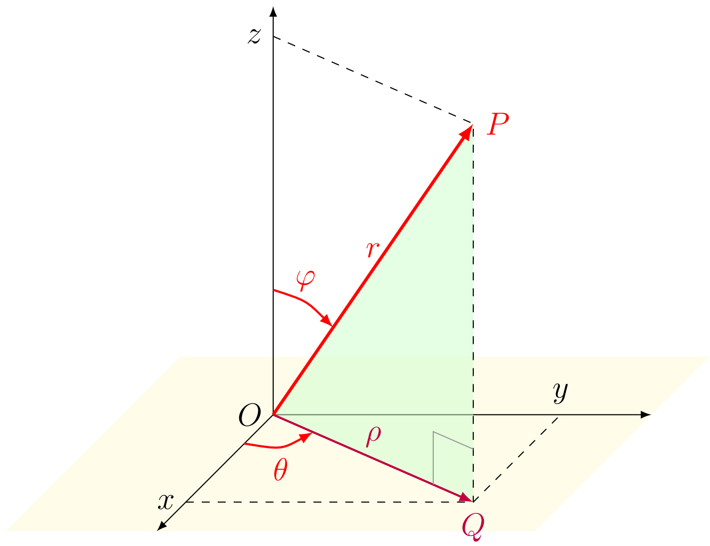
$$\Omega := \left\{(x,y,z)\colon 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2x,\, 0 \leqslant z \leqslant \frac{x^2+y^2}{x^2}\right\}.$$

Esercizio 1.3. Calcola l'integrale $\iiint_\Omega \log(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ dove

$$\Omega := \left\{(x,y,z)\colon 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant \mathrm{e}^2,\, x+y \geqslant 0,\, 0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{x^2+y^2}\right\}.$$

2 Integrali tripli in coordinate sferiche

Come abbiamo già illustrato al termine della lezione 01, nello spazio $\mathbb{R}^3$ possiamo individuare un punto utilizzando come tre coordinate: la distanza rispetto ad un'origine fissata, l'angolo che il vettore dall'origine al punto forma con un asse prefissato e un altro angolo determinato dall'orientamento del semipiano uscente dall'asse che contiene il vettore. Sia $O=(0,0,0)$ l'origine di $\mathbb{R}^3$ e sia $P=(x,y,z)$ un generico punto non nullo di $\mathbb{R}^3$.



Indichiamo con r la distanza di P da O, essa coincide con la norma di P,

$$r = \|P\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Sia poi φ l'angolo formato dal vettore OP con il versore $\vec{\boldsymbol{k}}$ dell'asse verticale. L'angolo φ viene detto angolo di *colatitudine* e può assumere valori compresi tra 0 e π. abbiamo

$$z = P\cdot\vec{\boldsymbol{k}} = r\cos\varphi,$$

Sia $Q = (x, y, 0)$ la proiezione ortogonale di P sul piano x-y, la distanza ρ di Q dall'origine coincide con la lunghezza del cateto del triangolo rettangolo OPQ opposto al vertice P e l'angolo in P è uguale φ, mentre l'ipotenusa è lungo r, dunque

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = r \sin\varphi,$$

Utilizziamo coordinate polari (ρ, θ) nel piano x-y per indicare il punto Q, abbiamo

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta.$$

L'angolo θ viene detto angolo di *longitudine* e può assumere valori che variano in un intervallo di lunghezza 2π, ad esempio $[-\pi, \pi]$, oppure $[0, 2\pi]$. Mettendo insieme tutte queste relazioni otteniamo il sistema delle *coordinate sferiche*,

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi, \theta) \\ y(r, \varphi, \theta) \\ z(r, \varphi, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad r \geqslant 0,\ \varphi \in [0, \pi],\ \theta \in [0, 2\pi]. \tag{1}$$

Calcoliamo la matrice Jacobiana di questa trasformazione di coordinate,

$$J_\Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Lasciamo al lettore l'esercizio di calcolare il determinante di questa matrice.

Esercizio 2.1. Calcola il determinante della matrice jacobiana (2).

Una volta effettuati i calcoli in modo corretto si trova che il determinante jacobiano per le coordinate sferiche (1) è dato da

$$\det J_\Phi(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin\varphi,$$

dunque, nell'applicare la formula del cambio di variabili negli integrali tripli, per l'elemento infinitesimo di volume useremo la sostituzione

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

Esempio 2.2. È ben noto che una sfera di raggio R ha volume pari a $\frac{4}{3}\pi R^3$. Con il sistema di coordinate sferiche la verifica di questa formula tramite integrali tripli diventa molto semplice. Sia B la palla sferica con centro nell'origine e raggio R. Tramite il sistema di coordinate (1) la palla B corrisponde al parallelepipedo

$$Q := \{(r, \varphi, \theta) \colon 0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(B) := \iiint_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_Q r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \\ = \int_0^R r^2\,\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}R^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Esempio 2.3. Calcoliamo l'integrale $\iiint_\Omega x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ dove il guscio Ω è la regione solida contenuta nella sfera di raggio 2 ed esterna alla sfera di raggio 1, entrambe con centro nell'origine,

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\colon\, 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\right\}.$$

In questo caso la variabile radiale è ristretta all'intervallo $1 \leqslant r \leqslant 2$, mentre i due angoli variano sul loro intero range di definizione $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Abbiamo quindi che l'integrale sul guscio Ω si riduce ad un integrale su un parallelepipedo nello spazio delle coordinate (r,φ,θ), che a sua volta si decompone facilmente nel prodotto di tre integrali in una variabile,

$$\begin{aligned} I = \iiint_\Omega x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2 (r\sin\varphi\cos\theta)^2 r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \int_1^2 r^4\,\mathrm{d}r \int_0^\pi (\sin\varphi)^3\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{31}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi = \frac{124}{15}\pi. \end{aligned}$$

Osserviamo che la regione Ω è perfettamente simmetrica rispetto ad ogni permutazione delle tre variabili x, y e z. Questo significa che integrando ciascuna delle funzioni x^2, y^2, z^2, su Ω si ottiene sempre lo stesso risultato. Avremmo potuto semplificare il calcolo dell'integrale I sfruttando questa simmetria. Infatti, siccome

$$I = \iiint_\Omega x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Omega y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

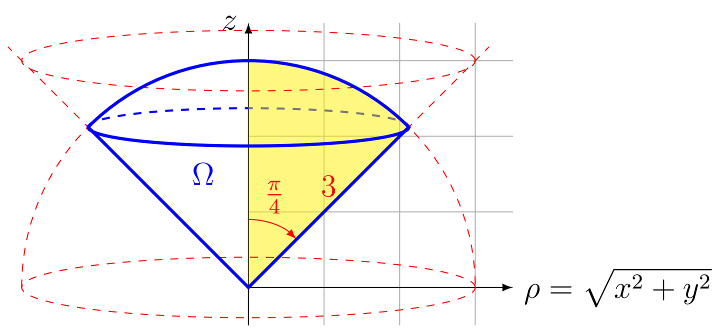
sommando i tre integrali e utilizzando la linearità dell'integrale, otteniamo

$$\begin{aligned} 3I = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2 r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \int_1^2 r^4\,\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{31}{5}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{124}{5}\pi, \end{aligned}$$

che ci permette di ricavare il valore di I attraverso integrazioni più semplici rispetto al calcolo precedente.

Esempio 2.4. Calcoliamo l'integrale $\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ sulla regione Ω che si ottiene intersecando la palla sferica di centro l'origine e raggio 3 con la regione interna al cono circolare di equazione $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\colon\, x^2+y^2+z^2 \leqslant 9,\ z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$



In coordinate sferiche, la regione Ω corrisponde alle condizioni $0 \leqslant r \leqslant 3$ per la palla, e $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ per il cono. Inoltre ricordiamo che $\sqrt{x^2+y^2} = \rho = r\sin\varphi$. L'integrale diventa

$$\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\int_0^3 (r\cos\varphi)(r\sin\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\varphi)^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^3 r^4\,\mathrm{d}r = 2\pi\cdot\frac{1}{3(\sqrt{2})^3}\cdot\frac{3^5}{5} = \frac{81\sqrt{2}}{10}\pi.$$

Esercizio 2.5. Calcola l'integrale della funzione

$$f(x,y,z) = \frac{x+2y+3z}{x^2+y^2+z^2}$$

sia sulla regione A e sia sulla regione B, dove

$$A = \left\{(x,y,z)\colon 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\right\},$$
$$B = \left\{(x,y,z)\colon 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ z \geqslant 0\right\}.$$

---

3 Applicazioni degli integrali multipli

Abbiamo visto che integrali doppi e tripli sono strumenti utili nel calcolo di aree e di volumi di regioni del piano e della spazio. Ci sono tante grandezze fisiche riguardanti corpi estesi che possono essere espresse tramite integrali. Vediamone alcune.

Definizione 3.1. Data una funzione $f(\boldsymbol{x})$ integrabile sul dominio Ω in $\mathbb{R}^n$, il valore medio $\mu(f)$ di f su Ω è dato dal rapporto tra l'integrale di f su Ω e la misura (volume n-dimensionale) dell'insieme Ω:

$$\mu(f) = \frac{1}{\mathcal{V}(\Omega)}\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{x}}.$$

Se i valori della funzione f variano in certo intervallo limitato, $m \leqslant f(\boldsymbol{x}) \leqslant M$ per ogni $\boldsymbol{x} \in D$, segue dalle proprietà di monotonia dell'integrale che anche il valore medio è contenuto nello stesso intervallo, $m \leqslant \mu(f) \leqslant M$.

È chiaro che nel caso $n = 2$ la misura $\mathcal{V}(\Omega)$ rappresenta l'area di Ω, $\mathcal{A}(\Omega)$, mentre nel caso tridimensionale rappresenta il volume di Ω.

Definizione 3.2. Sia D un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ e sia $\rho\colon D \to [0,+\infty[$ una funzione integrabile che descrive punto per punto la *densità* di un corpo che occupa la regione D. La *massa* del corpo D con densità ρ è data dalla quantità

$$\operatorname{massa}(D) := \iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

Definiamo *baricentro* del corpo D con densità ρ il punto $B = (x_B, y_B)$ le cui coordinate sono date da

$$x_B := \frac{\iint_D x\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \qquad y_B := \frac{\iint_D y\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

Si definiscono *momenti di inerzia* rispetto all'asse x, rispetto all'asse y, rispetto al polo $O = (0,0)$, gli integrali

$$I_x := \iint_D y^2\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad I_y := \iint_D x^2\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad I_O := \iint_D (x^2+y^2)\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

Osserviamo che y^2 è il quadrato della distanza di (x,y) dall'asse x e x^2 è il quadrato della distanza di (x,y) dall'asse y, mentre x^2+y^2 è il quadrato della distanza di (x,y) da O.

Nel caso in cui ρ rappresenti la densità di carica elettrica, l'integrale (3) fornisce la quantità di carica totale del corpo D.

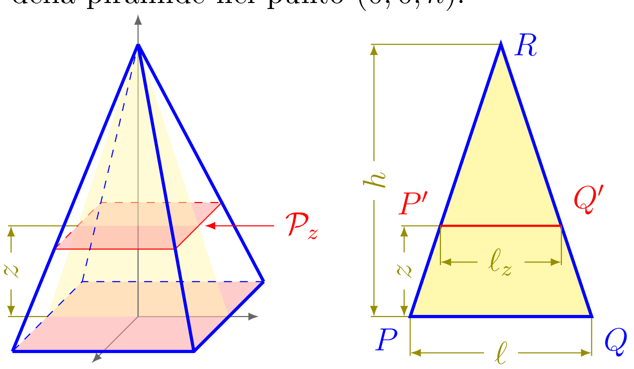
Quando il corpo ha densità costante uguale a 1, la massa coincide con l'area e le coordinate del baricentro coincidono con il valore medio delle funzioni x e y su D,

$$x_B := \frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \qquad y_B := \frac{\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

Il calcolo di valori, medi, baricentri e momenti sono strumenti essenziali nel calcolo di probabilità e in statistica, in questi campi la funzione densità rappresenta la densità di probabilità di variabili aleatorie definite sulla regione D.

Osservazione 3.3. Le quantità definite nella definizione 3.2 sono riferite ad una regione del piano, ma si tenga presente che ognuna di queste definizioni si può estendere anche a regioni dello spazio aggiungendo una variabile e sostituendo aree con volumi, integrali doppi con integrali tripli, e, per i momenti, integrando rispetto al quadrato della distanza da assi o punti.

Esempio 3.4. Calcoliamo il baricentro di una piramide retta a base quadrata $\mathcal{P}$, con lato di base ℓ e altezza h, supponendo una densità uniforme uguale a 1. Supponiamo che la piramide sia appoggiata sul piano x-y con il centro della sua base quadrata coincidente con l'origine e il vertice della piramide nel punto $(0,0,h)$.



Per ragioni di simmetria il baricentro si troverà sulla perpendicolare alla base passante per il vertice e dunque avrà la forma $B = (0, 0, z_B)$, dobbiamo quindi calcolare solo la coordinata z_B che è data da

$$z_B := \frac{\iiint_{\mathcal{P}} z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}.$$

Calcoliamo i due integrali procedendo con una integrazione per strati orizzontali. Per ogni $z \in [0, H]$ lo strato orizzontale di $\mathcal{P}$ ad altezza z è un quadrato $\mathcal{P}_z$ il cui lato ℓ_z varia al variare di z. Per determinare ℓ_z osserviamo nella figura che i triangoli PQR e $P'Q'R$ sono simili e quindi vale la proporzione

$$\ell : \ell_z = h : (h - z),$$

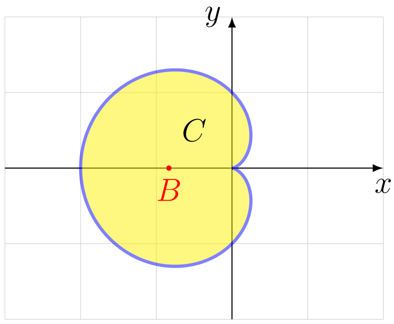
da cui ricaviamo che $\ell_z = \frac{\ell}{h}(h - z)$ e dunque $\mathcal{A}(\mathcal{P}_z) = \ell_z^2 = \frac{\ell^2}{h^2}(h - z)^2$. Integrando per strati otteniamo

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \iiint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^h \mathcal{A}(\mathcal{P}_z)\,\mathrm{d}z = \frac{\ell^2}{h^2}\int_0^h (h - z)^2\,\mathrm{d}z = \frac{\ell^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\ell^2 h,$$

$$\iiint_{\mathcal{P}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^h z\mathcal{A}(\mathcal{P}_z)\,\mathrm{d}z = \frac{\ell^2}{h^2}\int_0^h z(h - z)^2\,\mathrm{d}z = \frac{\ell^2}{h^2}\frac{h^4}{12} = \frac{1}{12}\ell^2 h^2.$$

Facendo il rapporto otteniamo allora che $z_B = h/4$.

Esempio 3.5. Consideriamo la cardiode C di cui abbiamo già calcolato l'area nella lezione 17, ovvero della regione C del piano x-y delimitata dalla curva che in coordinate polari centrate nell'origine è descritta dalla relazione $r = 1 - \cos\theta$.



Calcoliamo il momento di inerzia di C rispetto al suo baricentro; si tratta di calcolare l'integrale del quadrato della distanza di un punto generico dal baricentro $B = (x_B, y_B)$,

$$I_B = \iint_C \left((x - x_B)^2 + (y - y_B)^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_C \left(x^2 + y^2 - 2x_B x - 2y_B y + x_B^2 + y_B^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_C \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2x_B \iint_C x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2y_B \iint_C y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \left(x_B^2 + y_B^2\right)\iint_C \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_C \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \left(x_B^2 + y_B^2\right)\iint_C \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I_O - \|B\|^2\mathcal{A}(C).$$

Sappiamo che l'area è $\mathcal{A}(C) = \frac{3}{2}\pi$. Determiniamo le coordinate del baricentro; siccome il dominio è simmetrico rispetto all'asse x, il baricentro di C si troverà anch'esso sull'asse x e avrà la forma $B = (x_B, 0)$, quindi $y_B = 0$, mentre

$$x_B = \frac{1}{\mathcal{A}(C)} \iint_C x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{2}{3\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos\theta} r^2 \cos\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta =$$
$$= \frac{2}{3\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}(1-\cos\theta)^3 \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{2}{3\pi}\left(-\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{5}{6}.$$

Calcoliamo il momento di inerzia rispetto all'origine,

$$I_O = \iint_C (x^2+y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos\theta} r^3 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos\theta)^4}{4} \, \mathrm{d}\theta = \frac{35}{16}\pi.$$

Pertanto il momento di inerzia rispetto al baricentro sarà dato da

$$I_B = I_O - \|B\|^2 \mathcal{A}(C) = \frac{35}{16}\pi - \frac{25}{36} \cdot \frac{3}{2}\pi = \frac{55}{48}\pi.$$

Esercizio 3.6. Calcola il baricentro della regione limitata del piano racchiusa tra le due parabole di equazione

$$y = x(2-x), \qquad y = (x+1)(x-2).$$

Esercizio 3.7. Siano A e B due regioni misurabili del piano disgiunte. Conoscendo la misura delle aree di A e B e le coordinate dei loro baricentri determina una formula per ricavare il baricentro dell'unione $A \cup B$.

Esercizio 3.8. Determina il momento di inerzia rispetto all'asse x della regione del piano delimitata dalla curva che in coordinate polari è descritta dalla relazione $r = 3 - 2\cos(\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 3.9. Si determinino le coordinate del baricentro della regione interna alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e contenuta nell'ottante $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Esercizio 3.10. Determina il volume e le coordinate del baricentro di un solido di rotazione ottenuto ruotando intorno all'asse z la regione che nel piano x-z è delimitata dall'asse z, dalla retta $z = 8$ e dalla curva di equazione $z^2 = x^3$.

Esercizio 3.11. Si calcoli il momento di inerzia rispetto all'asse z del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare attorno all'asse z il sottografico della funzione $f\colon [0, \pi] \to [0, +\infty[$, dove $r = f(z) = \sin z$.

---

4 Solidi di rotazione

Le coordinate cilindriche possono risultare particolarmente utili quando si ha a che fare con solidi di rotazione. Consideriamo un dominio piano D contenuto nel semipiano r-z con $r \geqslant 0$; facendo ruotare il semipiano intorno all'asse z con una rotazione completa, l'insieme D descrive una regione Ω in $\mathbb{R}^3$ detta *solido di rotazione*,

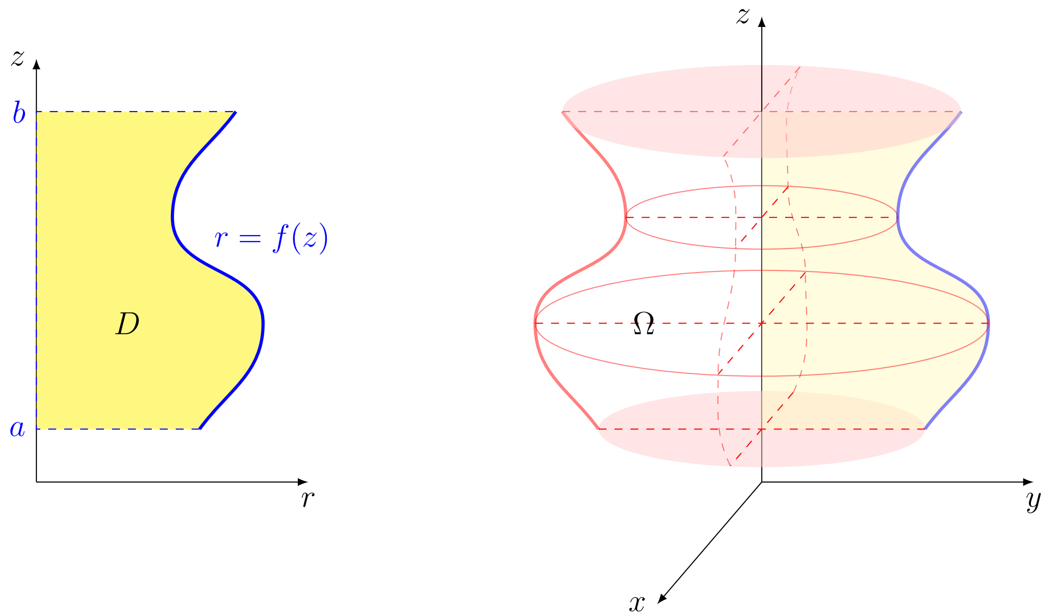
$$\Omega := \left\{(x, y, z) \colon (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in D\right\}.$$

In coordinate cilindriche tale regione corrisponde al dominio

$$\Gamma := \{(r, \theta, z) \colon (r, z) \in D,\, \theta \in [0, 2\pi]\} = D \times [0, 2\pi].$$

Il volume del solido di rotazione così ottenuto è dato da

$$\mathcal{V}(\Omega) := \iiint_\Omega \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iiint_\Gamma r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z = 2\pi \iint_D r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z$$



Supponiamo ora che D sia il sottografico di una funzione continua $r = f(z)$ definita su un intervallo $[a, b]$,

$$D = \{(r, z) \colon a \leqslant z \leqslant b,\, 0 \leqslant r \leqslant f(z)\}.$$

Essendo un dominio semplice rispetto all'asse r possiamo scrivere l'integrale doppio su D come integrale iterato,

$$\iint_D r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z = \int_a^b \int_0^{f(z)} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z = \int_a^b \frac{1}{2}\big(f(z)\big)^2 \,\mathrm{d}z. \tag{4}$$

Otteniamo così che il volume del solido di rotazione è dato da

$$\mathcal{V}(\Omega) = \pi \int_a^b \big(f(z)\big)^2 \,\mathrm{d}z. \tag{5}$$

L'area del dominio D è data da

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \int_a^b \int_0^{f(z)} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{6}$$

Se (r_B, z_B) sono le coordinate del baricentro del dominio D nel piano r–z allora, utilizzando (4), (5) e (6), troviamo che

$$r_B = \frac{\iint_D r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z}{\iint_D \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\mathcal{V}(\Omega)}{\mathcal{A}(D)}. \tag{7}$$

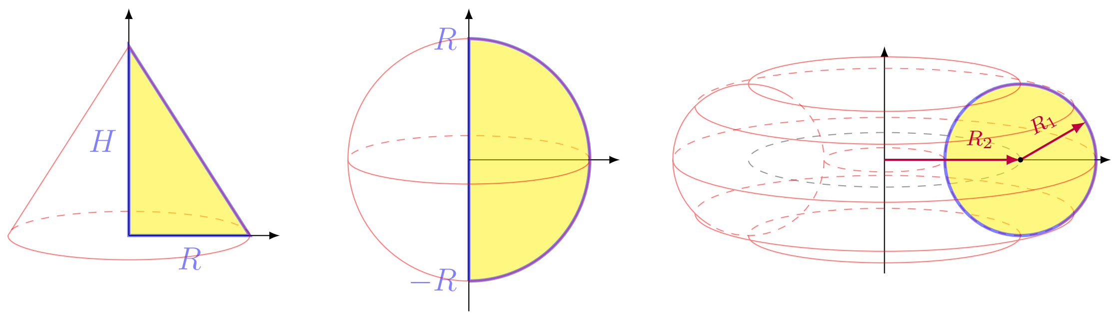
Siccome $2\pi r_B$ non è altro che la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro del dominio D durante la rotazione che genera il solido Ω, da (7) ricaviamo la seguente formula per il volume di un solido di rotazione (che è valida anche nel caso di generici domini D, e non solo per il caso di sottografici)

Teorema 4.1 (Formula di Guldino per volumi di solidi di rotazione)**.** *Sia Ω un solido di rotazione ottenuto facendo ruotare con una rotazione completa un dominio piano D contenuto in un semipiano delimitato dall'asse di rotazione. Sia C la* circonferenza baricentrica*, ovvero la circonferenza descritta dal baricentro del dominio D durante la rotazione. Allora il volume di Ω è dato dal prodotto della lunghezza della circonferenza baricentrica per l'area el dominio D,*

$$\mathcal{V}(\Omega) = \mathcal{L}(C) \cdot \mathcal{A}(D).$$

Esempio 4.2. Ecco alcuni esempi di solidi di rotazione:

- un *cono circolare retto*, con raggio di base R e altezza H si ottiene facendo ruotare un triangolo rettangolo con cateti di lunghezza R e H intorno al cateto lungo H;
- una *palla sferica* di raggio R si ottiene facendo ruotare un semicerchio di raggio R intorno al suo diametro;
- un *toro* si ottiene facendo ruotare un disco circolare intorno ad una retta esterna.



Esercizio 4.3. Spiega come si può ricavare la formula (5), in modo alternativo, integrando il solido di rotazione Ω per strati orizzontali.

Esercizio 4.4. Sia D un dominio semplice nel piano r–z definito da

$$D := \{(r, z) \colon a \leqslant z \leqslant b,\ f_1(z) \leqslant r \leqslant f_2(z)\},$$

dove f_1 e f_2 sono due funzioni continue definite sull'intervallo $[a, b]$ tali che

$$0 \leqslant f_1(z) \leqslant f_2(z), \qquad \forall z \in [a, b].$$

Verifica che il solido di rotazione Ω che si ottiene facendo ruotare il dominio D in $\mathbb{R}^3$ intorno all'asse z ha volume dato da

$$\mathcal{V}(\Omega) := \pi \int_a^b \Big(\big(f_2(z)\big)^2 - \big(f_1(z)\big)^2 \Big)\, \mathrm{d}z. \tag{8}$$

Esercizio 4.5. Calcola il volume del cono e del toro descritti nell'esempio 4.2.

Esercizio 4.6. Utilizzando il teorema di Guldino, ricava le coordinate del baricentro del semicerchio che genera la sfera illustrata nell'esempio 4.2.