Metodo di Quine-McCluskey

M. Favalli

Engineering Department in Ferrara

Sommario

Sommario

Algoritmo

- Metodo esatto per la sintesi di reti a 2 livelli
- Fattibile fino a circa 20 ingressi
- In grado di considerare funzioni a piú uscite
- Puó minimizzare sia il costo degli implicanti che quello dei letterali
- L'algoritmo (facilmente implementabile) opera in due fasi distinte
  1. Fase di espansione
  2. Fase di copertura
- Si vedrá inizialmente il caso di funzioni con uscita singola

Descrizione di funzioni completamente specificate

La funzione puó essere descritta come una lista di mintermini a ciascuno dei quali é associato un indice

$$f = \sum\{0, 1, 2, 3, 4, 7\}$$

i	xyz	f
0	000	1
1	001	1
2	010	1
3	011	1
4	100	1
5	101	0
6	110	0
7	111	1

Descrizione di funzioni non completamente specificate

La funzione puó essere descritta come una lista di mintermini e condizioni di indifferenza a ciascuno dei quali é associato un indice

$$f_{ON} = \sum\{1, 2, 3, 4, 7\}$$

$$f_{DC} = \sum\{0, 6\}$$

Dove f_{ON} e f_{DC} sono funzioni da $\{0, 1\}^n$ a $\{0, 1\}$

i	xyz	f	f_{ON}	f_{DC}
0	000	-	0	1
1	001	1	1	0
2	010	1	1	0
3	011	1	1	0
4	100	1	1	0
5	101	0	0	0
6	110	-	0	1
7	111	1	1	0

Espansione - algoritmo

1. Crea una lista con tutti i mintermini e le eventuali condizioni di indifferenza (α)
2. Confronta tutte le coppie $\binom{\alpha}{2}$ di cubi e di eventuali condizioni di indifferenza che non sono stati esaminati e determina la distanza Hamming (h)
3. Per ogni coppia tale che $h = 1$
   1. crea un nuovo cubo (implicante) inserendo il simbolo $-$ al posto della variabile eliminata (se tale cubo esiste giá non viene aggiunto alla lista)
   2. marca i cubi che sono stati espansi con $\star$
4. Si torna al passo 2 fino a quando non sono piú possibili ulteriori espansioni
5. Si eliminano tutti i cubi marcati con $\star$ e quelli che contengono solo indifferenze
6. I cubi rimanenti sono tutti gli implicanti primi della funzione

Organizzazione della lista di implicanti

- Per ridurre il numero di confronti, si nota che poiché siamo interessati a coppie di mintermini con $h = 1$, la differenza fra il numero di 1 in un mintermine e nell'altro deve essere $|1|$
- Si organizza la lista di mintermini in gruppi contenenti mintermini con lo stesso numero di 1 (i gruppi sono organizzati in ordine cresecente)
- Quindi basta confrontare mintermini di un gruppo con quelli del successivo

Esempio - I

i	xyz	
0	000	⋆
1	001	⋆
2	010	⋆
4	100	⋆
3	011	⋆
7	111	⋆

i	xyz
0,1	00-
0,2	0-0
0,4	-00
1,3	0-1
2,3	01-
3,7	-11

I mintermini coinvolti in almeno un raccoglimento (espansione) vengono denotati con ⋆ in quanto sicuramente non corrispondono a implicanti primi

Esempio - II

- Si procede analizzando la nuova lista per verificare se sono possibili nuove espansioni
- Si noti che deve essere $h = 1$ e che i don't care devono essere nelle stesse posizioni
- Ci si ferma quanto non sono piú possibili nuove espansioni

	xyz	
0,1	00-	⋆
0,2	0-0	⋆
0,4	-00	
1,3	0-1	⋆
2,3	01-	⋆
3,7	-11	

	xyz
0,1,2,3	0 - -
0,2,1,3	0 - -

Quadro complessivo

Si nota che é possibile che alcuni implicanti siano duplicati, in tale caso vanno eliminati

	xyz	
0	000	⋆
1	001	⋆
2	010	⋆
4	100	⋆
3	011	⋆
7	111	⋆

	xyz	
0,1	00-	⋆
0,2	0-0	⋆
0,4	-00	
1,3	0-1	⋆
2,3	01-	⋆
3,7	-11	

	xyz
0,1,2,3	0- -
0,2,1,3	0- -

Gli implicanti primi sono quindi $y'z'$, yz, x'

Gli implicanti (cubi) che non sono stati marcati sono quelli primi

Esempi

Sommario

Copertura

- Il problema di copertura si rappresenta graficamente con una tabella di copertura che ha come righe gli implicanti primi e come colonne i mintermini di f
- La casella di indice i, j ha il simbolo $\times$ se l'implicante P_i copre il mintermine m_j
- Si nota che la soluzione qui presentata é indipendente dal metodo utilizzato per gli implicanti primi

Esempio di copertura

Si supponga di considerare la funzione non completamente specificata

$$f(x, y, z, w) = f_{ON} + f_{DC}$$

Ove $f_{ON} = \{0, 1, 6, 7, 8, 11, 13\}$ e $f_{DC} = \{4, 5, 9, 10, 15\}$, gli implicanti primi sono:

$P_0 = y'z'$	-00-	0,1,8,9	$P_4 = x'y$	01--	4,5,6,7
$P_1 = x'z'$	0-0-	0,1,4,5	$P_5 = yw$	-1-0	5,7,13,15
$P_2 = z'w$	--01	1,5,9,13	$P_6 = xw$	1--1	9,11,13,15
$P_3 = xy'$	00--	8,9,11,10			

Tabella di copertura

mintermini di f

implicanti primi id f

	0	1	6	7	8	11	13
P_0							
P_1							
P_2							
P_3							
P_4							
P_5							
P_6							

Tabella di copertura iniziale

mintermini di f

	0	1	6	7	8	11	13
P_0	×	×			×		
P_1	×	×					
P_2		×					×
P_3					×	×	
P_4			×	×			
P_5				×			×
P_6						×	×

Riconoscimento degli implicanti primi essenziali

La tabella di copertura consente di individuare direttamente tutte le condizioni di essenzialitá, infatti una colonna con un solo $\times$ individua immediatamente un implicante primo essenziale

Sia $\mathcal{C}(f)$ l'insieme degli implicanti primi utilizzato per la copertura

1. $\mathcal{C}(f) = \emptyset$
2. Si individua un implicante primo essenziale P_i e lo si aggiunge alla copertura $\mathcal{C}(f) = \mathcal{C}(f) \cup \{P_i\}$
3. Si eliminano dalla tabella tutte le colonne coperte da P_i e si elimina la riga i

Tabella di copertura iniziale

La colonna 6 ha una sola $\times$ quindi l'implicante P_4 é essenziale

	0	1	6	7	8	11	13
P_0	×	×			×		
P_1	×	×					
P_2		×					×
P_3					×	×	
P_4			×	×			
P_5				×			×
P_6						×	×

	0	1	8	11	13
P_0	×	×	×		
P_1	×	×			
P_2		×			×
P_3			×	×	
P_5					×
P_6				×	×

La copertura é $\mathcal{C}(f) = \{P_4\}$

Dominanza

Una volta che non si trovino piú implicanti primi essenziali, si sfruttano le relazioni di dominanza di riga e di colonna

Dominanza di riga

Una riga i ne domina una j se l'implicante P_i copre tutti i mintermini coperti da P_j piú almeno uno (in qualsiasi tabella).

La riga j puó essere rimossa dalla tabella in quanto la scelta di P_i copre tutti i mintermini coperti da P_j

Esempio

Si osserva che P_0 domina P_1 e che sia P_2 che P_6 dominano P_5, quindi P_2 e P_5 possono essere eliminati

	0	1	8	11	13
P_0	$\times$	$\times$	$\times$		
P_1	$\times$	$\times$			
P_2		$\times$			$\times$
P_3			$\times$	$\times$	
P_5					$\times$
P_6				$\times$	$\times$

	0	1	8	11	13
P_0	$\times$	$\times$	$\times$		
P_2		$\times$			$\times$
P_3			$\times$	$\times$	
P_6				$\times$	$\times$

Esempio

Si osserva che nella nuova tabella P_0 é diventato un implicante primo essenziale secondario perché é l'unico che copre il mintermine 0

	0	1	8	11	13
P_0	$\times$	$\times$	$\times$		
P_2		$\times$			$\times$
P_3			$\times$	$\times$	
P_6				$\times$	$\times$

	11	13
P_2		$\times$
P_3	$\times$	
P_6	$\times$	$\times$

$\mathcal{C}(f) = \{P_4, P_0\}$

Nella nuova tabella P_6 domina sia P_3 che P_2

	11	13
P_2		$\times$
P_3	$\times$	
P_6	$\times$	$\times$

	11	13
P_6	$\times$	$\times$

Espressione di costo minimo di tipo SP

Ora P_6 é diventato essenziale, quindi la copertura é data da

$$\mathcal{C}(f) = \{P_4, P_0, P_6\}$$

che corrisponde all'espressione

$$f(x, y, z, w) = y'z' + x'y + xw$$

il numero di implicanti é $C = 3$ mentre $I = 6$ (il procedimento utilizzato utilizza C come cifra di merito)

Dominanza di colonna

Dominanza di colonna

Una colonna i ne domina una j se la colonna j é coperta da tutti gli implicanti di i piú almeno uno. In tale caso la colonna j puó essere eliminata

In questo caso, qualsiasi implicante che copre i copre anche j

i	j
$\times$	$\times$
$\times$	$\times$
	$\times$

Sommario

Funzioni a piú uscite

- Nella maggior parte dei casi le funzioni da considerare hanno piú scite (es. sommatore binario)

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = [f_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n)]$$

- Si possono avere funzioni completamente specifcate $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m$ o non completamente specificate $\{0, 1\}^n \to \{0, 1, -\}^m$
- L'ottimizzazione separata delle funzioni a uscita singola non porta, in generale, a un risultato ottimale perché trascura le possibilitá offerte dall'utilizzo del fan-out

Esempio dei problemi nella sintesi di funzioni a piú uscite

Ottimizzazione separata delle due funzioni f e g

f

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	1	1	1

g

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	1	1	1

f=y'+x

g=y'z+xy

t(tot)=6

xy é un implicante primo di g, ma non di f, comunque puó essere utilizzato per coprire gli 1 di f non coperti da y'. In questo modo la porta AND che realizza xy avrá fan-out=2 e il costo dei letterali é inferiore

f

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	1	1	1

g

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	1	1	1

f=y'+xy

f=y'z+xy

Calcolo degli implicanti primi

- Si parte dai mintermini di ciascuna funzione e si forma una lista unica avendo cura di contrassegnare ciascun mintermine j con una maschera μ_j che denota le funzioni in cui é presente
- Tale maschera, é costituita da una stringa di m bit, uno per ciascuna uscita k
- $\mu_{jk} = 1$ se il mintermine j compare nella k-ma funzione di uscita, mentre vale 0 altrimenti
- Una volta assegnata una maschera a ciascuna configurazione, si puó costruire la lista dei mintermini e procedere ai raccoglimenti

Espansione

- In questa fase bisogna tenere in conto che i mintermini possono appartenere a piú funzioni e che l'espansione di due mintermini ha significato solo per le funzioni cui entrambi appartengono
- Questa operazione si puó fare semplicemente facendo il prodotto logico bit a bit delle rispettive maschere
- Sia, ad esempio, $m_i = 1110$ e $m_j = 1111$ con $\mu_i = 0101$ e $\mu_j = 0110$, rispettivamente.
- Da questi si puó poi ottenere $P_k = 111-$ con $\mu_k = 0100$
- L'eliminazione di implicanti rimane poi subordinata alla relazione che esiste fra la maschera degli implicanti di partenza e di quello espanso

Espansione

Sono possibili 5 diversi casi espandendo gli implicanti P_i e P_j in P_k

1. $\mu_k = 00..0$: l'implicante ottenuto non ha senso per alcuna funzione e quindi é inutile riportarlo
2. $\mu_k = \mu_i$: l'implicante ottenuto é primo rispetto alle funzioni in cui é utilizzato P_i quindi P_i puó essere marcato
3. $\mu_k = \mu_j$: l'implicante ottenuto é primo rispetto alle funzioni in cui é utilizzato P_j quindi P_j puó essere marcato
4. di conseguenza se $\mu_k = \mu_i = \mu_j$ possono essere marcati entrambi
5. $\mu_k \neq 0 \wedge (\mu_k \neq \mu_i \wedge \mu_k \neq \mu_j)$: P_k é primo solo per l'intersezione delle funzioni in cui compaiono P_i e P_j, quindi non si marcano P_i e P_j e si mantiene comunque P_k

Esempio

Funzioni completamente specificate:

$$f = \{0, 1, 5, 6\} \quad g = \{0, 1, 2, 6, 7\} \quad h = \{1, 3, 5, 6, 7\}$$

Lista dei mintermini

i	xyz	$\mu_f\mu_g\mu_h$
0	000	110 $\star$
1	001	111
2	010	010 $\star$
3	011	001 $\star$
5	101	101 $\star$
6	110	111
7	111	011 $\star$

	xyz	$\mu_f\mu_g\mu_h$
0,1	00-	110
0,2	0-0	010
1,3	0-1	001 $\star$
1,5	-01	101
2,3	01-	000
2,6	-10	010
3,7	-11	001 $\star$
5,7	1-1	001 $\star$
6,7	11-	011

	xyz	$\mu_f\mu_g\mu_h$
0,2,1,3	0–	000
1,3,5,7	–1	001
1,5,3,7	–1	001
2,6,3,7	-1-	000

Implicanti primi

implicante	mintermini	xyz	$\mu_f\mu_g\mu_h$
P_0	1	001	111
P_1	6	110	111
P_2	0,1	00-	110
P_3	0,2	0-0	010
P_4	1,5	-01	101
P_5	2,6	-10	010
P_6	6,7	11-	011
P_7	1,3,5,7	–1	001

Copertura

La tabella di copertura per una funzione a piú uscite si costruisce in maniera simile a quella utilizzata per funzioni scalari. In pratica si accostano le diverse tabelle di copertura

	f 0	f 1	f 5	f 6	g 0	g 1	g 2	g 6	g 7	h 1	h 3	h 5	h 6	h 7	
P_0		×				×				×					1
P_1				×				×					×		1
P_2	×	×			×	×									1
P_3					×		×								1
P_4		×	×							×		×			1
P_5							×	×							1
P_6								×	×				×	×	1
P_7										×	×	×		×	1

Copertura

- Un implicante primo essenziale puó essere tale solo rispetto ad alcune funzioni, una volta scelto, si eliminano le colonne rispetto alle quali é essenziale in tali funzioni
- Se un implicante é stato scelto perché essenziale per un certo insieme di funzioni, puó darsi che convenga utilizzarlo anche in altre funzioni in cui é solo primo, infatti si puó semplicemente aumentare il fan-out della porta logica AND che lo realizza
- Se il costo é basato sul numero di implicanti, si puó associare un costo iniziale pari a 1 per ciascun implicante e se un implicante viene scelto lo si mette a 0 per denotare che puó essere usato senza aumentare il costo della copertura

Esempio

Si osserva che P_1 é essenziale rispetto al mintermine 6 di f quindi elimino le colonne coperte da P_1 in f, ma non la riga perché potrebbe servirmi per g e h, poi metto il suo costo a 0

	f 0	f 1	f 5	f 6	g 0	g 1	g 2	g 6	g 7	h 1	h 3	h 5	h 6	h 7	
P_0		×				×				×					1
P_1				×				×					×		0
P_2	×	×			×	×									1
P_3					×		×								1
P_4		×	×							×		×			1
P_5							×	×							1
P_6								×	×				×	×	1
P_7										×	×	×		×	1

$\mathcal{C}(f) = \{P_1\}, \mathcal{C}(g) = \{\}, \mathcal{C}(h) = \{\}$

Esempio-1

Le stesse considerazioni valgono per P_6 rispetto a 7 nella g, mentre P_7 é primo essenziale rispetto a 3 nella h e posso eliminare la riga perché P_7 non compare in altre funzioni.

	f 0	f 1	f 5	g 0	g 1	g 2	g 6	g 7	h 1	h 3	h 5	h 6	h 7	
P_0		×			×				×					1
P_1							×					×		0
P_2	×	×		×	×									1
P_3				×		×								1
P_4		×	×						×		×			1
P_5						×	×							1
P_6							×	×				×	×	0
P_7									×	×	×		×	0

$\mathcal{C}(f) = \{P_1\}, \mathcal{C}(g) = \{P_6\}, \mathcal{C}(h) = \{P_7\}$

Esempio-1

Nella tabella ridotta si osserva che P_2 é essenziale rispetto a 0 nella f (non puó essere eliminato) e che P_4 é essenziale rispetto a 5 nella f (puó essere eliminato).

	f			g			h	
	0	1	5	0	1	2	6	
P_0		×			×			1
P_1							×	0
P_2	×	×		×	×			0
P_3				×		×		1
P_4		×	×					0
P_5						×		1
P_6							×	0

$\mathcal{C}(f) = \{P_1, P_2, P_4\}, \mathcal{C}(g) = \{P_6\}, \mathcal{C}(h) = \{P_7\}$

Esempio

Si osserva che P_2 domina P_0 e che P_3 domina P_5 (nota: la dominanza si puó applicare solo se il costo della riga dominata é maggiore o uguale di quello della riga dominante)

	g			h	
	0	1	2	6	
P_0		×			1
P_1				×	0
P_2	×	×			0
P_3	×		×		1
P_5			×		1
P_6				×	0

$\mathcal{C}(f) = \{P_1, P_2, P_4\}, \mathcal{C}(g) = \{P_6\}, \mathcal{C}(h) = \{P_7\}$

Esempio-1

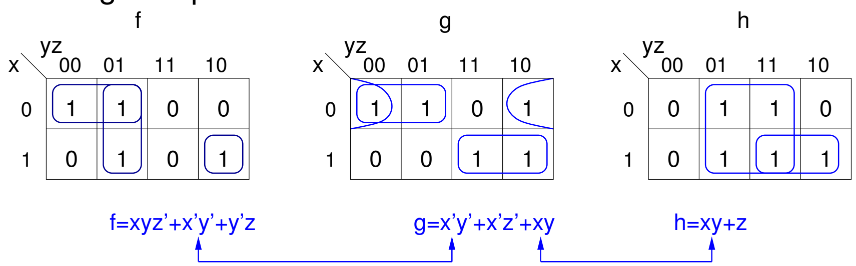
P_2 e P_3 sono divenuti essenziali per la g, mentre per coprire 6 nella h si puó usare sia P_1 che P_6

	g			h	
	0	1	2	6	
P_1				×	0
P_2	×	×			0
P_3	×		×		1
P_6				×	0

$\mathcal{C}(f) = \{P_1, P_2, P_4\}, \mathcal{C}(g) = \{P_2, P_3, P_6\}, \mathcal{C}(h) = \{P_1, P_7\}$ o $\mathcal{C}(h) = \{P_6, P_7\}$

Copertura

Le espressioni delle singole uscite possono essere ricavate da quelle dei singoli implicanti.



Nella figura si evidenziano i termini prodotto con fan-out > 1

Esempio-2

Funzione a piú uscite e implicanti primi

$f = \{0,2,5,6,7\}, g = \{0,1,3,6,7\}.h = \{1,3,5,6,7\}$

i	xyz	μ_f, μ_g, μ_h	
0	000	110	P_0
0,1	00-	010	P_1
0,2	0-0	100	P_2
1,3	0-1	011	P_3
2,6	-10	100	P_4
3,7	-11	011	P_5
5,7	1-1	101	P_6
6,7	11-	111	P_7
1,3,5,7	–1	001	P_8

Esempio-2

Tabella di copertura

	f					g					h					
	0	2	5	6	7	0	1	3	6	7	1	3	5	6	7	
P_0	x					x										1
P_1						x	x									1
P_2	x	x														1
P_3							x	x			x	x				1
P_4		x		x												1
P_5								x		x		x			x	1
P_6			x		x								x		x	1
P_7				x	x				x	x				x	x	1
P_8	x					x					x	x	x		x	1

$\mathcal{C}(f) = \{\}, \mathcal{C}(g) = \{\}, \mathcal{C}(h) = \{\}$

Esempio-2

P_6 é essenziale rispetto a 5 per la f, P_7 rispetto a 6 per la g e la h

	f					g					h				
	0	2	5	6	7	0	1	3	6	7	1	3	5	6	7
P_0	x					x									
P_1						x	x								
P_2	x	x													
P_3							x	x			x	x			
P_4		x		x											
P_5								x		x		x			x
P_6			x		x								x		x
P_7				x	x				x	x				x	x
P_8	x					x					x	x	x		x

$\mathcal{C}(f) = \{P_6\}, \mathcal{C}(g) = \{P_3, P_7\}, \mathcal{C}(h) = \{P_7\}$

Esempio-2

P_5 é dominata da P_3

	f			g			h			
	0	2	6	0	1	3	1	3	5	
P_0	x			x						1
P_1				x	x					1
P_2	x	x								1
P_3					x	x	x	x		1
P_4		x	x							1
P_5						x		x		1
P_6									x	0
P_7			x							0
P_8							x	x	x	1

$\mathcal{C}(f) = \{P_6\}, \mathcal{C}(g) = \{P_3, P_7\}, \mathcal{C}(h) = \{P_7\}$

Esempio-2

P_3 é essenziale rispetto a 3 per la g

	f			g			h			
	0	2	6	0	1	3	1	3	5	
P_0	x			x						1
P_1				x	x					1
P_2	x	x								1
P_3					x	x	x	x		0
P_4		x	x							1
P_6									x	0
P_7			x							0
P_8							x	x	x	1

$\mathcal{C}(f) = \{P_6\}, \mathcal{C}(g) = \{P_3, P_7\}, \mathcal{C}(h) = \{P_7\}$

Esempio-2

P_0 domina P_1

	f			g	h			
	0	2	6	0	1	3	5	
P_0	x			x				1
P_1				x				1
P_2	x	x						1
P_3					x	x		0
P_4		x	x					1
P_6							x	0
P_7			x					0
P_8					x	x	x	1

$\mathcal{C}(f) = \{P_6\}, \mathcal{C}(g) = \{P_3, P_7\}, \mathcal{C}(h) = \{P_7\}$

Esempio-2

P_0 é diventato essenziale rispetto a 0 in g

	f			g	h			
	0	2	6	0	1	3	5	
P_0	x			x				0
P_2	x	x						1
P_3					x	x		0
P_4		x	x					1
P_6							x	0
P_7			x					0
P_8					x	x	x	1

$\mathcal{C}(f) = \{P_6\}, \mathcal{C}(g) = \{P_0, P_3, P_7\}, \mathcal{C}(h) = \{P_7\}$

Esempio-2

Tabella ridotta

	f			g h			
	0	2	6	1	3	5	
P_0	x						0
P_2	x	x					1
P_3				x	x		0
P_4		x	x				1
P_6						x	0
P_7			x				0
P_8				x	x	x	1

$\mathcal{C}(f) = \{P_6\}, \mathcal{C}(g) = \{P_0, P_3, P_7\}, \mathcal{C}(h) = \{P_7\}$

Esempio-2

- Nel caso in cui si ottimizzino le funzioni singolarmente, P_2 dominerebbe P_0, P_4 dominerebbe P_7 e P_8 donirebbe sia P_6 che P_3 risultando nella copertura $\mathcal{C}(f) = \{P_2, P_4, P_6\}$, $\mathcal{C}(g) = \{P_0, P_3, P_7\}$, $\mathcal{C}(h) = \{P_7, P_8\}$ con costo $c = 7$
- Osservando i costi, si vede che tali dominanze non sono convenienti perché il costo della riga dominata é inferiore a quello della riga dominante
- La relazione di dominanza puó essere applicata se e solo se la riga dominata ha un costo superiore o uguale a quella dominante.

Esempio-2

- Ad esempio la copertura $\mathcal{C}(f) = \{P_0, P_4, P_6\}$, $\mathcal{C}(g) = \{P_0, P_3, P_7\}$, $\mathcal{C}(h) = \{P_3, P_6, P_7\}$ ha costo $c = 5$ perché si utilizzano elementi a costo 0
- Come si vedrá in seguito, non si é ancora definito un procedimento sistematico per arrivare a questi risultati (se non provare i possibili casi)

Coperture cicliche

- Il metodi visti non tengono in conto del numero di letterali, ma solo della cardinalitá dell'insieme di implicanti
- Rispetto al numero di implicanti la soluzione ottenuta é minima indipendentemente dall'ordine con cui sono applicate le proprietá di essenzialitá e dominanza sono applicate
- Nel caso di coperture cicliche non sono in grado di decidere quali implicanti utilizzare perché nella tabella non sono presenti né relazioni di essenzialitá, né relazioni di dominanza

Coperture cicliche

- Il metodi visti non tengono in conto del numero di letterali, ma solo della cardinalitá dell'insieme di implicanti
- Rispetto al numero di implicanti la soluzione ottenuta é minima indipendentemente dall'ordine con cui sono applicate le proprietá di essenzialitá e dominanza sono applicate
- Nel caso di coperture "cicliche" non sono in grado di decidere quali implicanti utilizzare perché nella tabella non si hanno né relazioni essenzialitá, né relazioni di dominanza

Esempio

Si consideri la funzione $f(a, b, c, d) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13\}$ per la quale sono stati calcolati implicanti primi e copertura

	1	2	3	4	5	6	8	9	12	13
$P_0 = ac'$							×	×	×	×
$P_1 = bc'$				×	×				×	×
$P_2 = c'd$	×				×			×		×
$P_3 = a'b'd$	×		×							
$P_4 = a'b'c$		×	×							
$P_5 = a'cd'$		×				×				
$P_6 = a'bd'$				×		×				

Esempio

P_0 é essenziale rispetto a 8

	1	2	3	4	5	6	8	9	12	13
$P_0 = ac'$							×	×	×	×
$P_1 = bc'$				×	×				×	×
$P_2 = c'd$	×				×			×		×
$P_3 = a'b'd$	×		×							
$P_4 = a'b'c$		×	×							
$P_5 = a'cd'$		×				×				
$P_6 = a'bd'$				×		×				

Conclusioni

Si osserva che nella tabella ridotta, non esistono condizioni di essenzialitá o dominanza
Analizzando la mappa di Karnaugh una buona copertura é evidente, bisogna peró trovare un procedimento sistematico per funzioni con pi‘'u ingressi

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0