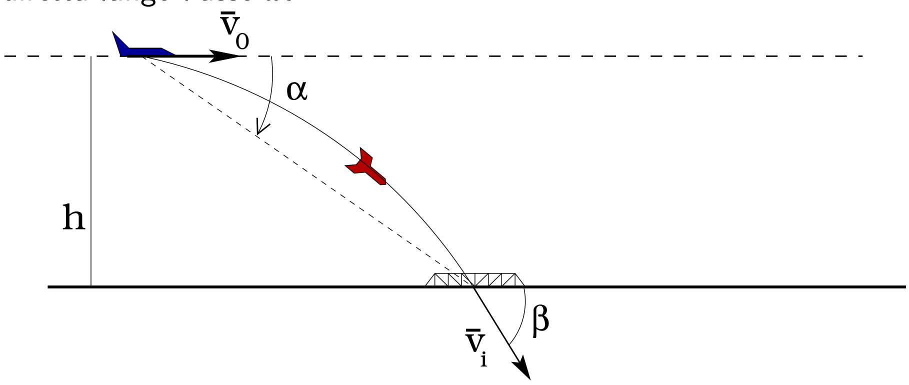
Problema 01

Un aereo bombardiere viaggia ad un'altezza costante $h = 1$ Km dal suolo con una velocitá costante $v_0 = 720$ Km/h lungo una traiettoria rettilinea. Dato un ponte nemico al suolo, la traiettoria dell'aereo é tale che a un certo punto l'aereo sorvolerá esattamente il ponte. Detto α l'angolo sotto cui viene visto il ponte dall'aereo rispetto all'orizzonte dell'aereo stesso e sapendo che la velocitá della bomba rispetto al suolo al momento dello sgancio é la stessa dell'aereo, si chiedono le seguenti:

1. *il valore di α nel momento in cui viene sganciata la bomba destinata a colpire il ponte;*
2. *la distanza in linea d'aria aereo-ponte quando la bomba viene sganciata;*
3. *il modulo della velocitá finale d'impatto della bomba sul ponte;*
4. *l'angolo β che il vettore velocitá della bomba al momento dell'impatto forma con l'orizzonte;*
5. *sapendo che la velocitá del suono é $v_S = 340$ m/s, calcolare dopo quanto tempo il pilota dell'aereo sente il rumore dell'esplosione dal tempo $t = 0$ s dello sgancio della bomba.*

Si considerino aereo, ponte e bomba puntiformi e si trascuri la resistenza dell'aria sul moto della bomba (si usi $g = 9.81$ m/s^2).

Soluzione.
Si consideri un sistema cartesiano Oxy con asse y parallelo alla verticale ed asse x diretto lungo la direzione di moto dell'aereo. Il moto della bomba é parabolico, con velocitá iniziale diretta lungo l'asse x.



1. Detto t il tempo a partire dall'instante in cui viene sganciata la bomba, l'altezza y della bomba al tempo t vale:

   $$y = -\frac{1}{2}\,gt^2 + v_{0y}\,t + y_0 = -\frac{1}{2}\,gt^2 + h$$

   Detto t_i il tempo dell'impatto, vale:

   $$0 = -\frac{1}{2}\,gt_i^2 + h \qquad \Rightarrow \qquad t_i = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$$

   Detta d la proiezione orizzontale della distanza aereo-ponte al momento dello sgancio, vale:

$$d = v_{0x}\, t_i = v_0 \sqrt{\frac{2\,h}{g}} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\alpha = \frac{h}{d} = \sqrt{\frac{g\,h}{2}}\,\frac{1}{v_0}$$

$$\alpha = \arctan\left(\sqrt{\frac{g\,h}{2}}\,\frac{1}{v_0}\right) \simeq 19.3^\circ$$

2. La distanza l in linea d'aria aereo-ponte al momento dello sgancio vale:

$$l = \sqrt{h^2 + d^2} = \sqrt{h^2 + v_0^2\,\frac{2\,h}{g}} \simeq 3026\ \mathrm{m}$$

3. Detta $\vec{v}_i$ la velocitá finale d'impatto della bomba sul ponte, valgono le seguenti:

$$\begin{cases} v_{ix} = v_0 \\ v_{iy} = -g\,t_i \end{cases} \qquad v_i = \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2} = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,h} \simeq 879\ \mathrm{Km/h}$$

4. L'angolo β vale:

$$\tan\beta = \left|\frac{v_{iy}}{v_{ix}}\right| = \frac{\sqrt{2\,g\,h}}{v_0} \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \arctan\left(\frac{\sqrt{2\,g\,h}}{v_0}\right) \simeq\ 35^\circ$$

5. Quando la bomba colpisce il ponte, l'aereo sta esattamente sopra la verticale del ponte, in quanto bomba ed aereo hanno la stessa componente orizzontale della velocitá. Detto t_s il tempo in cui l'aereo verrá investito dall'onda sonora dell'impatto, per il teorema di Pitagora vale:

$$[v_s\,(t_s - t_i)]^2 = h^2 + [v_0\,(t_s - t_i)]^2$$

$$t_s = t_i + \frac{h}{\sqrt{v_s^2 - v_0^2}} = \sqrt{\frac{2\,h}{g}} + \frac{h}{\sqrt{v_s^2 - v_0^2}} \simeq 17.9\ \mathrm{s}$$

C.V.D.