Problema 05

In un piano é dato un punto materiale che si muove lungo un ellisse avente uno dei due fuochi coincidente con l'origine O e descritto dalla seguente equazione in coordinate polari:

$$r(\theta) \;=\; \frac{a\,(1-e^2)}{1+e\,\cos\theta}$$

dove a ed e sono il semiasse maggiore e l'eccentricitá, rispettivamente. Il moto del punto lungo l'ellisse é tale per cui la velocitá areolare attorno all'origine O é una costante k. Dimostrare che l'accelerazione del punto materiale é diretta verso il punto O e inversamente proporzionale al quadrato della distanza da O.

Soluzione.
La velocitá areolare $\dot{A}$ é una costante del moto, quindi:

$$\dot{A} \;=\; \frac{1}{2}\,r^2\,\dot{\theta} \;=\; k$$

Ricordiamo l'espressione dell'accelerazione $\vec{a}$ in coordinate polari:

$$\vec{a} \;=\; (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{u}_r \;+\; (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\hat{u}_\theta \;=\; (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{u}_r \;+\; \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\Big(r^2\,\dot{\theta}\Big)\,\hat{u}_\theta$$

Dalla costanza della velocitá areolare, esprimiamo $\dot{\theta}$ come segue:

$$\dot{\theta} \;=\; \frac{2\,k}{r^2}$$

Si sostituisce questa nell'espressione di $\vec{a}$:

$$\vec{a} \;=\; (\ddot{r} - \frac{4\,k^2}{r^3})\,\hat{u}_r$$

Notiamo come la componente trasversale di $\vec{a}$ sia nulla in quanto la derivata temporale della costante k annulla il coefficiente relativo al versore $\hat{u}_\theta$.
A questo punto, rimane da ricavare l'espressione di $\ddot{r}$ in funzione delle coordinate (r, θ):

$$\frac{dr}{dt} \;=\; \frac{dr}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} \;=\; \frac{d}{d\theta}\left(\frac{a\,(1-e^2)}{1+e\,\cos\theta}\right)\,\frac{2\,k}{r^2} \;=\; \frac{a\,e\,(1-e^2)\,\sin\theta}{(1+e\,\cos\theta)^2}\,\frac{2\,k\,(1+e\,\cos\theta)^2}{a^2\,(1-e^2)^2}$$

$$\dot{r} \;=\; \frac{2\,k\,e}{a\,(1-e^2)}\,\sin\theta$$

$$\ddot{r} \;=\; \frac{d\dot{r}}{dt} \;=\; \frac{d\dot{r}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} \;=\; \frac{2\,k\,e}{a\,(1-e^2)}\,\cos\theta\,\frac{2\,k}{r^2}$$

ora esprimiamo il termine $\cos\theta$ in funzione di r dall'equazione dell'ellisse:

$$\cos\theta \;=\; \frac{1}{e}\left(\frac{a\,(1-e^2)}{r} - 1\right) \qquad \text{, da cui si ottiene:}$$

$$\ddot{r} \;=\; \frac{4\,k^2}{a\,(1-e^2)}\,\frac{1}{r^2}\,\left(\frac{a\,(1-e^2)}{r} - 1\right) \;=\; \frac{4\,k^2}{r^3} \;-\; \frac{4\,k^2}{a\,(1-e^2)\,r^2}$$

Sostituendo nell'espressione di $\vec{a}$ si ottiene pertanto:

$$\boxed{\vec{a} \;=\; -\frac{4\,k^2}{a\,(1-e^2)\,r^2}\;\hat{u}_r}$$

ovvero l'accelerazione é diretta verso l'origine O e varia in modulo in modo inversamente proporzionale al quadrato della distanza da O.

C.V.D.

N.B.

Ai tempi di Halley e Newton, giá dalle leggi di Keplero si sapeva che i pianeti si muovono su ellissi uno dei cui fuochi corrisponde alla posizione del Sole e giá si conosceva la costanza della velocitá areolare. Fu proprio Newton, sollecitato da Halley, a fornire la prima dimostrazione che tali proprietá implicavano un'accelerazione inversamente proporzionale al quadrato della distanza, come poi Newton stesso formulerá nella legge di gravitazione universale nei suoi *Principia*.
In particolare, come si vedrá piú avanti nel programma, é interessante notare come si possa ricavare la terza legge di Keplero (i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti attorno al Sole sono proporzionali ai rispettivi cubi dei semiassi maggiori):

$$\dot{A} = k \;=\; \frac{\text{area ellisse}}{\text{periodo di riv.}} \;=\; \frac{\pi\,a\,b}{T} \;=\; \frac{\pi\,a^2\,\sqrt{1-e^2}}{T}$$

sostituendo questa nell'espressione dell'accelerazione:

$$\vec{a} \;=\; -\frac{4\,\pi\,a^3}{T^2}\,\frac{\hat{u}_r}{r^2}$$

Poiché il coefficiente dipende soltanto dal Sole, esso é lo stesso per tutti i pianeti; in particolare, il termine a^3/T^2 é lo stesso per tutti i pianeti, che é proprio quanto asserito dalla terza legge di Keplero.