Problema 04

In un piano é dato un punto materiale che si muove lungo una spirale iperbolica descritta dalla seguente equazione in coordinate polari (definita per valori $\theta > \theta_0$):

$$r(\theta) \;=\; \frac{a}{\theta - \theta_0}$$

dove a é una lunghezza costante. Il moto del punto lungo la spirale é tale per cui la velocitá areolare attorno all'origine O é una costante k. Dimostrare che l'accelerazione del punto materiale é diretta verso il punto O e inversamente proporzionale al cubo della distanza da O.

Soluzione.
La velocitá areolare $\dot{A}$ é una costante del moto, quindi:

$$\dot{A} \;=\; \frac{1}{2}\, r^2\, \dot{\theta} \;=\; k$$

Ricordiamo l'espressione dell'accelerazione $\vec{a}$ in coordinate polari:

$$\vec{a} \;=\; (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{u}_r \;+\; (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\hat{u}_\theta \;=\; (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{u}_r \;+\; \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\Big(r^2\,\dot{\theta}\Big)\,\hat{u}_\theta$$

Dalla costanza della velocitá areolare, esprimiamo $\dot{\theta}$ come segue:

$$\dot{\theta} \;=\; \frac{2\,k}{r^2}$$

Si sostituisce questa nell'espressione di $\vec{a}$:

$$\vec{a} \;=\; (\ddot{r} - \frac{4\,k^2}{r^3})\,\hat{u}_r$$

Notiamo come la componente trasversale di $\vec{a}$ sia nulla in quanto la derivata temporale della costante k annulla il coefficiente relativo al versore $\hat{u}_\theta$.
A questo punto, rimane da ricavare l'espressione di $\ddot{r}$ in funzione delle coordinate (r, θ):

$$\frac{dr}{dt} \;=\; \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \;=\; \frac{d}{d\theta}\Big(\frac{a}{\theta-\theta_0}\Big)\,\frac{2\,k}{r^2} \;=\; -\frac{a}{(\theta-\theta_0)^2}\,\frac{2\,k\,(\theta-\theta_0)^2}{a^2} \;=\; -\frac{2\,k}{a}$$

$$\ddot{r} \;=\; \frac{d\dot{r}}{dt} \;=\; 0$$

da cui si ottiene:

$$\boxed{\vec{a} \;=\; -\frac{4\,k^2}{r^3}\,\hat{u}_r}$$

ovvero l'accelerazione é diretta verso l'origine O e varia in modulo in modo inversamente proporzionale al cubo della distanza da O.
C.V.D.