Problema 07

In un piano cartesiano Oxy é data una circonferenza con centro nell'origine O di raggio R su cui si muove in senso antiorario un punto materiale, la cui ascissa curvilinea s é tale per cui la sua derivata temporale $\dot{s}$ dipende dal tempo t secondo la seguente:

$$\dot{s}(t) \; = \; v_0 \, e^{-t/\tau}$$

dove v_0 e τ sono due costanti (una velocitá e un tempo, rispettivamente). Si sa che al tempo $t = 0$ s il punto materiale ha coordinate cartesiane $(R, 0)$. Si esprimano i vettori posizione $\vec{r}$, velocitá $\vec{v}$ ed accelerazione $\vec{a}$ in coordinate polari. Inoltre, si decompongano i vettori velocitá ed accelerazione anche lungo i versori tangente e normale alla traiettoria. Trovare anche il valore dell'anomalia θ_f cui tende il vettore posizione nel limite $t \to +\infty$. Infine, si esprimano i vettori velocitá $\vec{v}$ ed accelerazione nelle loro coordinate cartesiane.

Soluzione.
Il vettore posizione $\vec{r}$ in coordinate polari é dato dalle coordinate polari (r, θ), con $r = R$ e θ é cosí ottenuto:

$$\theta(t) \; = \frac{s(t)}{R} \; = \; \int_0^t \dot{s}(t') \, dt' \; = \; \frac{v_0}{R} \tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

dove si é scelta la costante in modo tale che sia $\theta(0) = 0$, come imposto dal problema. Vediamo subito che si vale:

$$\theta_f \; = \; \lim_{t \to +\infty} \theta(t) \; = \; \frac{v_0}{R} \tau$$

Velocitá $\vec{v}$ ed accelerazione $\vec{a}$, espresse in coordinate curvilinee, diventano:

$$\vec{v}(t) \; = \; \dot{s}(t) \, \hat{u}_t \; = \; v_0 \, e^{-t/\tau} \, \hat{u}_t$$

$$\vec{a}(t) \; = \; \ddot{s}(t) \, \hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2(t)}{R} \, \hat{u}_n = -\frac{v_0}{\tau} \, e^{-t/\tau} \, \hat{u}_t + \frac{v_0^2}{R} \, e^{-2\,t/\tau} \, \hat{u}_n$$

Nel nostro caso é facile verificare che: $\hat{u}_t = \hat{u}_\theta$, $\hat{u}_n = -\hat{u}_r$, da cui seguono:

$$\vec{v}(t) \; = \; v_0 \, e^{-t/\tau} \, \hat{u}_\theta$$

$$\vec{a}(t) \; = \; -\frac{v_0^2}{R} \, e^{-2\,t/\tau} \, \hat{u}_r - \frac{v_0}{\tau} \, e^{-t/\tau} \, \hat{u}_\theta$$

Infine, per esprimere i vettori $\vec{v}$ e $\vec{a}$ nelle coordinate cartesiane, ovvero decomposti lungo i versori $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$, basta ricavare le espressioni dei versori polari $\hat{u}_r(t)$ e $\hat{u}_\theta(t)$ in funzione del tempo t e sfruttare le espressioni ricavate sopra: a tal fine, si nota che al tempo t l'anomalia $\theta(t)$ é giá stata ottenuta (v. sopra), da cui segue:

$$\begin{cases} \hat{u}_r(t) \; = \; \cos\theta(t) \, \hat{\imath} + \sin\theta(t) \, \hat{\jmath} \\ \hat{u}_\theta(t) \; = \; -\sin\theta(t) \, \hat{\imath} + \cos\theta(t) \, \hat{\jmath} \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = v_0\ e^{-t/\tau}\,(-\sin\theta(t)\,\hat{\imath} + \cos\theta(t)\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{a}(t) = -\frac{v_0^2}{R}\,e^{-2\,t/\tau}\,(\cos\theta(t)\,\hat{\imath}+\sin\theta(t)\,\hat{\jmath})-\frac{v_0}{\tau}\,e^{-t/\tau}\,(-\sin\theta(t)\,\hat{\imath}+\cos\theta(t)\,\hat{\jmath})$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) = &-v_0\,e^{-t/\tau}\left(\frac{v_0}{R}\,e^{-t/\tau}\ \cos\theta(t) - \frac{1}{\tau}\ \sin\theta(t)\right)\hat{\imath} + \\ &- v_0\,e^{-t/\tau}\left(\frac{v_0}{R}\,e^{-t/\tau}\ \sin\theta(t) + \frac{1}{\tau}\ \cos\theta(t)\right)\hat{\jmath}\end{aligned}$$

C.V.D.