Problema 02

Un bambino gioca con la fionda, stando coricato sul balcone del suo appartamento, posto ad un'altezza $h = 10$ m da terra. Sia v_0 la velocitá con cui scaglia il sasso. Calcolare il tempo impiegato dal sasso per giungere a terra, quando l'angolo di tiro sopra il pavimento del balcone vale $\alpha = 30^\circ$ e la velocitá del sasso vale $v_0 = 54$ Km/h. Sapendo che il bambino puó osservare soltanto quanto sta ad un'altezza maggiore o uguale di quella del balcone, dire per quanto tempo il bambino osserva il sasso dopo averlo lanciato. Inoltre, si supponga che il bambino, desideroso di lanciare il sasso il piú lontano possibile, chieda aiuto al padre ingegnere sull'angolo di tiro necessario per ottenere la gittata massima: in questo caso si assuma $v_0 = \sqrt{2\,g\,h}$. Cosa deve rispondere il padre? Infine si calcoli la gittata massima in tal caso. (Si usi $g = 9.81$ m/s^2 e si trascuri la resistenza dell'aria).

Soluzione.
Sia Oxy un piano cartesiano il cui asse x é orizzontale e il cui asse y é diretto lungo la verticale uscente dal suolo. Le coordinate del bambino siano $(0, h)$. Detto α l'angolo di tiro sopra il piano del balcone, detti $x(t)$ e $y(t)$ le coordinate del sasso al tempo t si ha:

$$\begin{cases} x(t) = v_0\,t\,\cos\alpha \\ y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t\,\sin\alpha + h \end{cases}$$

Sia t_c il tempo di caduta del sasso: allora vale $y(t_c) = 0$. Pertanto:

$$-\frac{1}{2}\,g\,t_c^2 + v_0\,t_c\,\sin\alpha + h = 0 \qquad \Rightarrow \qquad g\,t_c^2 - 2\,v_0\,t_c\,\sin\alpha - 2\,h = 0$$

$$t_c = \frac{v_0\,\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\,\sin^2\alpha + 2\,g\,h}}{g}$$

e sostituendo i valori: $\alpha = 30^\circ$ e $v_0 = 54$ Km/h$= 15$ m/s si ottiene: $t_c \simeq 2.38$ s.

Il tempo durante il quale il bambino osserva il sasso é il doppio del tempo occorso affinché il sasso raggiunga l'altezza massima della parabola descritta (per motivi di simmetria della parabola stessa descritta dal sasso):

$$t_o = 2\,\frac{v_0\,\sin\alpha}{g} \simeq 1.53 \text{ s}$$

dove t_o é il tempo di osservazione del sasso da parte del bambino.

La gittata l del sasso é data da: $l = v_0\,t_c\,\cos\alpha$, ovvero:

$$l = \frac{v_0\,\cos\alpha\left(v_0\,\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\,\sin^2\alpha + 2\,g\,h}\right)}{g}$$

Per ottenere la massima gittata l_m, impongo:

$$\frac{g}{v_0^2}\,\frac{dl}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left[\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2\,g\,h}{v_0^2}}\right)\right] = 0$$

In questo caso il problema assume: $v_0 = \sqrt{2\,g\,h}$, per cui:

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{2}\sin 2\,\alpha \;+\; \cos\alpha\,\sqrt{\sin^2\alpha + 1}\right] \;=\; 0$$

$$\cos 2\,\alpha \;-\sin\alpha\,\sqrt{\sin^2\alpha+1} \;+\; \frac{\sin\alpha\ \cos^2\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha{+}1}} \;=\; 0$$

$$\cos 2\,\alpha \;+\; \frac{\sin\alpha\Big(-\sin^2\alpha\ -1\ {+}\cos^2\alpha\Big)}{\sqrt{\sin^2\alpha{+}1}} \;=\; 0$$

$$\cos 2\,\alpha \;=\; \frac{2\ \sin^3\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha{+}1}} \qquad\Rightarrow\qquad \Big(1-2\ \sin^2\alpha\Big)^2 = \frac{4\ \sin^6\alpha}{\sin^2\alpha{+}1}$$

$$\Big(1-4\ \sin^2\alpha+4\ \sin^4\alpha\Big)\ \Big(\sin^2\alpha+1\Big) \;=\; 4\ \sin^6\alpha$$

$$1-3\ \sin^2\alpha \;=0 \qquad\Rightarrow\qquad \sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Poiché si considerano soltanto angoli positivi (sopra il livello del balcone), prendiamo il valore positivo del seno: pertanto:

$$\alpha=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\simeq 35.3^{\circ}$$

Quindi il padre consiglierá al figlio un angolo di tiro di circa 35°. Sapendo che $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$ e che, quindi, $\cos\alpha = \sqrt{2/3}$, la gittata massima l_m vale:

$$l_m = 2\,h\,\cos\alpha\Big(\sin\alpha \;+\; \sqrt{\sin^2\alpha+1}\Big) = 2\,\sqrt{2}\,h \simeq 28.3\ \mathrm{m}$$

C.V.D.