Problema 1

Un ingegnere e la sua ragazza stanno sulle rive opposte di un fiume di larghezza costante $d = 14.5$ *m. L'ingegnere vuole lanciarle un pacchetto, ovviamente senza farlo cadere nel fiume. Mentre lancia il pacchetto, corre verso di lei con una velocitá orizzontale costante* v_C *in direzione normale alla direzione longitudinale del fiume. Sapendo che la velocitá con cui l'ingegnere lancia il pacchetto rispetto a se stesso vale* $v_0 = 27$ *Km/h, si calcoli l'angolo di tiro che deve applicare nel proprio sistema di riferimento affinché la gittata sia massima nei seguenti casi:*

1. $v_C = v_0$
2. $v_C = v_0\, 2\sqrt{2}$

Nel caso 1., calcolare la gittata massima e dire se l'ingegnere é in grado di fare arrivare il pacchetto alla sua ragazza (Si usi $g = 9.81$ *m/s*^{2} *e si trascuri la resistenza dell'aria sul moto del pacchetto. Per semplicitá, si consideri nulla l'altezza dell'ingegnere).*

Soluzione.

Sia Oxy un sistema cartesiano il cui asse y é diretto lungo la verticale con direzione positiva verso l'alto e il cui asse x é parallelo alla direzione di corsa dell'ingegnere e, quindi, parallelo anche alla larghezza del fiume. Sia $t = 0$ s il tempo in cui l'ingegnere lancia il pacchetto. Si prenda l'origine O coincidente con la posizione dell'ingegnere al tempo $t = 0$ s. Sia α l'angolo di tiro con cui viene lanciato il pacchetto rispetto alla direzione orizzontale. Al tempo t la posizione del pacchetto $\Big(x(t), y(t)\Big)$ é cosí scomposta:

$$\begin{cases} x(t) = (v_C + v_0\ \cos\alpha)\, t \\ y(t) = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_0\, t\ \sin\alpha \end{cases}$$

Infatti, il sistema di riferimento solidale all'ingegnere é un sistema inerziale che si muove con velocitá v_C rispetto al suolo, da cui, per la composizione delle velocitá, segue che la componente orizzontale della velocitá del pacchetto rispetto al suolo sia $(v_C + v_0\ \cos\alpha)$, mentre quella verticale sia semplicemente la stessa di quella del sistema solidale all'ingegnere, ovvero $v_0\ \sin\alpha$.

Detto t_V il tempo di volo del pacchetto, questo é ottenuto dalla seguente:

$$-\frac{1}{2}\, g\, t_V^2 + v_0\, t_V\ \sin\alpha = 0$$

(la soluzione $t_V = 0$ é triviale). Da cui segue: $t_V = \dfrac{2\, v_0\ \sin\alpha}{g}$

Durante il tempo t_V, il pacchetto si sposta orizzontalmente di un tratto pari a l, ovvero la gittata, cosí calcolata:

$$l = x(t_V) = (v_C + v_0\ \cos\alpha)\, t_V = (v_C + v_0\ \cos\alpha)\ \frac{2\, v_0\ \sin\alpha}{g}$$

$$l = \frac{2\, v_0^2}{g}\ \left(\frac{v_C}{v_0}\ \sin\alpha\ + \frac{1}{2}\ \sin 2\,\alpha\right)$$

Per trovare l'angolo α corrispondente alla massima gittata, si impone: $\dfrac{dl}{d\alpha} = 0$:

$$\frac{v_C}{v_0}\ \cos\alpha + \cos 2\,\alpha\ =\ 0$$

$$2\ \cos^2\alpha\ + \frac{v_C}{v_0}\ \cos\alpha\ - 1\ =\ 0$$

$$\cos\alpha \;=\; \frac{-\frac{v_C}{v_0} \pm \sqrt{(\frac{v_C}{v_0})^2+8}}{4}$$

Si considera soltanto la soluzione positiva, in quanto il coseno é negativo per valori $90^\circ < \alpha < 270^\circ$; poiché il pacchetto viene gettato in direzione del fiume, non é fisicamente accettabile $\alpha > 90^\circ$.

1. Caso $v_C = v_0$.

   $$\cos\alpha \;=\; \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\alpha \;=\; 60^\circ}$$

   In tal caso la gittata massima l_m vale:

   $$l_m \;=\; \frac{2\,v_0^2}{g}\,(\sin 60^\circ \;+ \frac{1}{2}\,\sin 120^\circ) \;=\; \frac{2\,v_0^2}{g}\,(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4})$$

   $$l_m \;=\frac{v_0^2}{g}\,\frac{3\sqrt{3}}{2} \;\simeq\; 14.9 \text{ m} \;>\; d = 14.5 \text{ m}$$

   L'ingegnere puó quindi far giungere il pacchetto alla ragazza.

2. Caso $v_C = 2\sqrt{2}\,v_0$.

   Sostituendo nell'espressione di $\cos\alpha$, si ottiene:

   $$\cos\alpha \;=\; \frac{-2\sqrt{2} + \sqrt{8+8}}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \simeq 73.0^\circ}$$

   C.V.D.