Problema 03

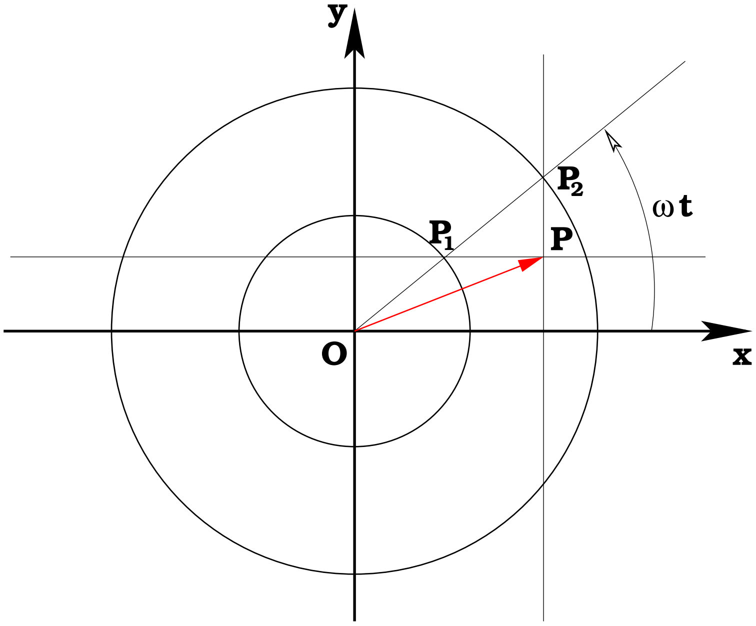
In un piano Oxy sono dati due circonferenze concentriche di raggi $R_1 = 1$ m e $R_2 = 2$ m con centro nell'origine O. Si consideri la semiretta uscente dal centro O al tempo t: questa descrive un angolo ωt con la direzione positiva dell'asse x, dove ω é tale per cui essa compie un giro completo in un tempo $T = 3$ s. Detti P_1 e P_2 i due punti che tale semiretta ha in comune con le due circonferenze rispettivamente, sia P il punto d'intersezione della retta parallela all'asse x e passante per P_1 con la retta parallela all'asse y e passante per P_2. Si trovino le seguenti:

1. *la legge oraria del punto P;*
2. *l'equazione della traiettoria descritta da P;*
3. *i vettori velocitá $\vec{v}$, accelerazione $\vec{a}$ del punto P e i rispettivi moduli v e a in funzione del tempo t;*
4. *si esprima $\vec{a}$ in coordinate polari;*
5. *i moduli delle componenti di $\vec{a}$ tangente e normale alla traiettoria al tempo $t = 0.25$ s;*
6. *dire se il moto é uniforme.*

Si sostituiscano i valori numerici soltanto alla fine del punto 5.

Soluzione.

1. Per come é ottenuto, il punto P ha le seguenti coordinate: la stessa ordinata del punto P_1 e la stessa ascissa del punto P_2. Quindi vale:



$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OP}_1 = R_1 \cos\omega t\,\hat{\imath} + R_1 \sin\omega t\,\hat{\jmath} \\ \overrightarrow{OP}_2 = R_2 \cos\omega t\,\hat{\imath} + R_2 \sin\omega t\,\hat{\jmath} \end{array}\right\} \overrightarrow{OP} = R_2 \cos\omega t\,\hat{\imath} + R_1 \sin\omega t\,\hat{\jmath}$$

dove $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}$ é il vettore posizione del punto P al tempo t.

2. Posto: $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$, vale: $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{R_2} = \cos\omega t \\ \dfrac{y}{R_1} = \sin\omega t \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{R_2^2} + \dfrac{y^2}{R_1^2} = 1$

quindi la traiettoria é un ellisse con semiasse maggiore R_2 lungo l'asse x e semiasse minore R_1 lungo l'asse y.

3. $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\,\hat{\imath} + \dot{y}\,\hat{\jmath} = -\omega\, R_2\, \sin\omega t\,\hat{\imath} + \omega\, R_1\, \cos\omega t\,\hat{\jmath}$

   $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\,\hat{\imath} + \ddot{y}\,\hat{\jmath} = -\omega^2\, R_2\, \cos\omega t\,\hat{\imath} - \omega^2\, R_1\, \sin\omega t\,\hat{\jmath}$

   $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega\sqrt{R_2^2\, \sin^2\omega t + R_1^2\, \cos^2\omega t}$

   $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \omega^2\sqrt{R_2^2\, \cos^2\omega t + R_1^2\, \sin^2\omega t}$

4. Si nota che: $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$. Pertanto, l'accelerazione $\vec{a}$ é diretta radialmente verso il punto O. Quindi, detti $\hat{u}_r = \hat{r}$ e $\hat{u}_\theta = \hat{\theta}$ i versori polari nel punto P, si ha pertanto:

   $\vec{a} = a_r\,\hat{u}_r + a_\theta\,\hat{u}_\theta = -\omega^2\, r\,\hat{u}_r$

   in quanto: $a_r = -\omega^2\, r$, $a_\theta = 0$.

5. Detti $\hat{u}_t$ e $\hat{u}_n$ i versori tangente e normale alla traiettoria nel punto P, valgono le seguenti:

   $\vec{v} = v_t\,\hat{u}_t = \dot{s}\,\hat{u}_t$

   $\vec{a} = a_t\,\hat{u}_t + a_n\,\hat{u}_n = \ddot{s}\,\hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\hat{u}_n$

   dove s é l'ascissa curvilinea e ρ é il raggio di curvatura della traiettoria nel punto P. Da queste due espressioni, si ottiene la seguente:

   $a_t = \vec{a}\cdot\hat{u}_t = \vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{\dot{s}} = \frac{1}{v}\vec{a}\cdot\vec{v} = \frac{a_x\, v_x + a_y\, v_y}{v}$

   $$a_t = \frac{\omega^3(R_2^2 - R_1^2)\sin\omega t\cos\omega t}{\omega\sqrt{R_2^2\, \sin^2\omega t + R_1^2\, \cos^2\omega t}} = \omega^2\frac{(R_2^2 - R_1^2)\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{R_2^2\, \sin^2\omega t + R_1^2\, \cos^2\omega t}}$$

   Il versore $\hat{u}_n$ punta verso la concavitá della traiettoria: in questo caso, trattandosi di un ellisse, punta verso l'interno. Poiché l'accelerazione é diretta verso il centro O e quindi anch'essa verso l'interno, segue che a_n é positiva:

   $$a_n = +\sqrt{a^2 - a_t^2} = \omega^2\frac{R_1\, R_2}{\sqrt{R_2^2\, \sin^2\omega t + R_1^2\, \cos^2\omega t}}$$

   Al tempo $t = 0.25$ s, $\omega t = (2\pi/T)\, t = \pi/6$.
   $\sin(\pi/6) = 1/2$; $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$. Da cui:

   $$a_t = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \frac{3\times\sqrt{3}/2\times 1/2}{\sqrt{4\times 1/4 + 3/4}}\ \mathrm{m/s^2} \simeq 4.3\ \mathrm{m/s^2}$$

   $$a_n = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \frac{2}{\sqrt{4\times 1/4 + 3/4}}\ \mathrm{m/s^2} \simeq 6.6\ \mathrm{m/s^2}$$

6. Il moto non é uniforme poiché $\frac{d\dot{s}}{dt} = \ddot{s} = a_t \neq 0$.

C.V.D.