Problema 08

Un bambino gioca con un palloncino gonfio di elio, quando a un certo punto gli sfugge. Detto $t = 0$ s il tempo in cui il palloncino sfugge al bambino, si ha che la velocitá del palloncino al tempo $t = 0$ s é diretta lungo la verticale; inoltre, la componente verticale della velocitá del palloncino rimane costante durante tutta la salita e vale $v_0 = 7.2$ Km/h. Mentre il palloncino sale, la sua velocitá ha la stessa componente orizzontale della velocitá del vento a quella quota: questa cresce linearmente con l'altezza ed é tale che al suolo é nulla e ad un'altezza $h = 1$ Km vale $v_f = 108$ Km/h. Quando il palloncino raggiunge la quota h, scoppia. Una volta scoppiato, il suo moto non risente piú in alcun modo del vento e comincia a precipitare. Trascurando la resistenza dell'aria nel moto di caduta libera del palloncino scoppiato, si calcoli quanta strada deve fare il bambino per recuperare il palloncino scoppiato e quanto tempo deve aspettare dal momento in cui gli scappa al momento in cui ricade in terra. (Si usi $g = 9.81$ m/s^2 e si trascuri l'altezza del bambino).

Soluzione.

Innanzitutto, ricaviamo l'espressione della velocitá del vento in funzione della quota. A tal fine, sia un sistema cartesiano Oxz con origine nel bambino, asse z verticale ed asse x orizzontale, parallelo alla direzione del vento. Siano d_1 e d_2 i due tratti orizzontali che il palloncino copre rispettivamente quando é gonfio e quando é in caduta libera. Sia $v_W(z)$ la velocitá (orizzontale) del vento ad una quota z. Poiché $v_W(z)$ é lineare in z, vale la relazione seguente: $v_W(z) \; = \; m\,z + q$, dove m e q sono due costanti da determinare:

$$\begin{cases} v_W(0) \; = \; q \; = 0 \\ v_W(h) \; = m\,h + q \; = v_f \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} q \; = \; 0 \\ m \; = \dfrac{v_f}{h} \end{cases}$$, da cui:

$$v_W(z) \; = \; \frac{v_f}{h}\,z$$

Sia $\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_z\,\hat{k}$ la velocitá del palloncino: fintanto che il palloncino é gonfio, le sue componenti si possono esprimere in funzione della quota z come segue:

$$\begin{cases} v_x(z) \; = v_W(z) \; = \; \dfrac{v_f}{h}\,z \\ v_z(z) \; = v_0 = \text{cost} \end{cases}$$

Detto t_S il tempo in cui il palloncino, raggiungendo una quota pari ad h, scoppia, poiché la velocitá di ascesa é costante e vale v_0, segue:

$$t_S \; = \; \frac{h}{v_0}$$

Sia $z(t)$ la quota del palloncino al tempo t; allora vale $z(t) \; = \; v_0\,t$ (vera fintanto che é integro, ovvero $\forall t < t_S$).

Volendo esprimere la componente verticale della velocitá del palloncino in funzione del tempo, si ha:

$$v_x(t) \; = \; v_W\Big(z(t)\Big) \; = \; \frac{v_f}{h}\,v_0\,t$$

Pertanto é possibile calcolare il tratto d_1 come segue:

$$d_1 = \int_0^{t_s} v_x(\tau)\, d\tau = \frac{v_f\, v_0}{h} \int_0^{t_s} \tau\, d\tau = \frac{1}{2} \frac{v_f\, v_0}{h} t_s^2 = \frac{1}{2} \frac{v_f}{v_0} h$$

Ora resta da calcolare il tratto d_2 relativo a quando il palloncino cade liberamente sotto la sola azione della gravitá. Al tempo t_s, il palloncino diventa un punto materiale la cui velocitá ha le seguenti componenti: $v_x(t_s) = v_f$ e $v_z(t_s) = v_0$.
Per $t > t_s$, il moto é parabolico:

$$z(t) = -\tfrac{1}{2}\, g\, (t - t_s)^2 + v_z(t_s)\, (t - t_s) + z(t_s)$$

$$z(t) = -\tfrac{1}{2}\, g\, (t - t_s)^2 + v_0\, (t - t_s) + h$$

Sia t_c il tempo in cui il palloncino torna al suolo: quindi vale $z(t_c) = 0$:

$$z(t_c) = -\tfrac{1}{2}\, g\, (t_c - t_s)^2 + v_0\, (t_c - t_s) + h = 0$$

$$t_c - t_s = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2\, g\, h}}{g}$$

Il tratto d_2 vale: $d_2 = v_x(t_s)\, (t_c - t_s)$, infatti la componente orizzontale della velocitá del palloncino non varia piú dal momento in cui scoppia, ovvero quando vale $v_x(t_s) = v_f$. Da cui:

$$d_2 = v_f\, (t_c - t_s) = v_f\, \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2\, g\, h}}{g}$$

In conclusione, il tratto che il bambino deve complessivamente percorrere per recuperare il palloncino vale:

$$d_1 + d_2 = v_f\, \left(\tfrac{1}{2}\, \frac{h}{v_0} + \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2\, g\, h}}{g} \right) \simeq 7.93 \text{ Km}$$

Il tempo trascorso da quando il bambino perde il palloncino ($t = 0$ s) a quando ricade in terra ($t = t_c$) vale t_c:

$$t_c = t_s + \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2\, g\, h}}{g} = \frac{h}{v_0} + \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2\, g\, h}}{g} \simeq 514 \text{ s} = 8'\, 34''$$

C.V.D.