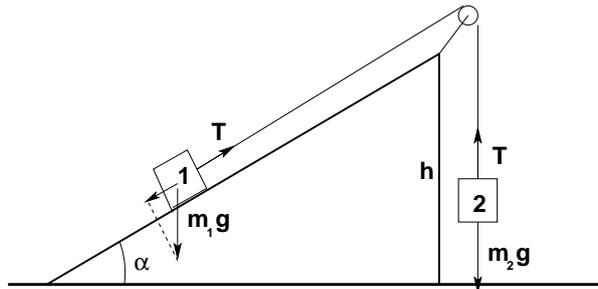


Problema 06

Due corpi 1 e 2 di massa rispettivamente $m_1 = 1 \text{ Kg}$ e $m_2 = 3 \text{ Kg}$ sono legati da una fune inestensibile, di massa nulla e di lunghezza $2h$, dove $h = 2 \text{ m}$ è l'altezza di un piano inclinato senza attrito con angolo $\alpha = 30^\circ$. Al tempo $t = 0 \text{ s}$, il corpo 1 è alla base del piano inclinato, mentre il corpo 2 è alla sommità, libero di precipitare. Si chiede: quanto tempo impiega il corpo 2 per giungere a terra? Il corpo 1 riesce ad arrivare fino alla sommità del piano inclinato? In caso positivo, dire con quale velocità si proietta nel vuoto.

Soluzione.



La fune esercita su ciascuno dei due corpi una tensione di modulo T per il fatto che ha massa nulla e per il terzo principio della dinamica. Per l'inestensibilità della fune, i due corpi hanno la stessa velocità e accelerazione lineare (fino a quando la fune è tesa, ossia fino a quando il corpo 2 è sospeso), che chiamiamo v e a rispettivamente. Possiamo quindi applicare il secondo principio della dinamica per entrambi i corpi come segue:

$$\begin{cases} m_1 a = T - m_1 g \sin \alpha \\ m_2 a = m_2 g - T \end{cases} \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2} g = \frac{5}{8} g$$

ovvero il moto di entrambi è uniformemente accelerato, con accelerazione $a = \frac{5}{8} g$. Detta $z_2(t)$ l'altezza del corpo 2 al tempo t , il tempo di caduta t_c è pertanto dato dalla condizione: $z_2(t_c) = 0$:

$$z_2(t) = -\frac{1}{2} \frac{5}{8} g t_c^2 + h = 0 \quad \Rightarrow \quad t_c = 4 \sqrt{\frac{h}{5g}} \simeq 0.81 \text{ s}$$

Per ricavare la velocità del corpo 1 al momento dell'impatto al suolo del corpo 2, si possono percorrere due strade: primo: poiché la velocità in modulo è la stessa per entrambi, basta semplicemente valutare quella di 2 come segue:

$$v(t_c) = a t_c = \frac{5}{8} g 4 \sqrt{\frac{h}{5g}} = \sqrt{\frac{5}{4} g h}$$

Alternativamente, si può ricavare tale velocità semplicemente applicando la conservazione dell'energia meccanica del sistema:

$$m_2 g h = \frac{1}{2} m_1 v^2(t_c) + m_1 g h \sin \alpha + \frac{1}{2} m_2 v^2(t_c)$$

Dal momento in cui 2 impatta al suolo, dissipa la sua energia nell'urto totalmente anelastico, la fune non è più tesa e il corpo 1 procede in modo autonomo. A questo punto applichiamo

la conservazione dell'energia meccanica al solo corpo 1: detta v_f la velocità finale con cui 1 arriva alla sommità del piano inclinato, deve valere la seguente:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2(t_c) + m_1 g h \sin \alpha = \frac{1}{2} m_1 v_f^2 + m_1 g h$$

$$\frac{1}{2} v_f^2 = \frac{1}{2} \frac{5}{4} g h + g h (\sin \alpha - 1) \Rightarrow v_f = \frac{1}{2} \sqrt{g h} \simeq 2.21 \text{ m/s}$$

In conclusione, il corpo 1 riesce a giungere alla sommità del piano inclinato e con una velocità pari a circa 2.21 m/s.

C.V.D.