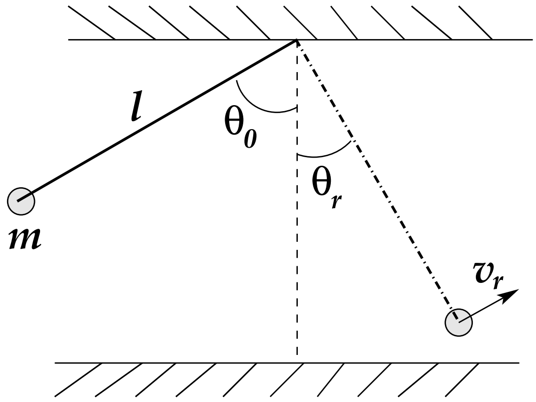
Fisica I. Seconda Sessione AA 2009-10.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 21/06/2010

PROBLEMA 1

Un pendolo semplice di massa puntiforme $m = 40$ g e lunghezza $l = 2$ m (la fune ha massa trascurabile). All'inizio il pendolo è fermo e forma un angolo con la verticale pari a $\theta_0 = 60°$. Quando il pendolo è in posizione verticale, la sua altezza dal terreno è nulla.

1. Si trovi il valore della tensione massima, $T_{\rm m}$, esercitata dalla fune sulla massa m.
2. Supponendo che nella parte ascendente del moto oscillatorio, la fune si rompa improvvisamente in corrispondenza di un angolo con la verticale pari a $\theta_{\rm r} = 30°$. Si trovi la quota massima $h_{\rm m}$ descritta dalla massa m nel moto parabolico che ne segue.

Si usi $g = 9.81$ m/s^2. Si trascuri ogni forma di attrito.



Soluzione.

1. La massa m in ogni istante percorre un arco di cerchio con una data velocità, che varia a seconda della posizione. Per trovare la velocità v_θ in funzione dell'angolo θ, basta applicare la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale e l'istante generico in cui il pendolo forma un angolo θ:

$$m\,g\,l\,(1-\cos\theta_0) \;=\; \frac{1}{2}\,m\,v_\theta^2 + m\,g\,l\,(1-\cos\theta) \tag{1}$$

$$v_\theta \;=\; \sqrt{2\,g\,l\,(\cos\theta - \cos\theta_0)} \tag{2}$$

La tensione $T(\theta)$, funzione dell'angolo θ, è ottenibile dalla seconda legge della dinamica applicata alla massa m: poichè a ogni istante il moto del pendolo è circolare, sappiamo che la componente radiale della accelerazione vale semplicemente $m\,v_\theta^2/l$. Pertanto, applicando la seconda legge della dinamica alla massa m e proiettandola lungo la direzione radiale, si ha:

$$T(\theta) - m\,g\,\cos\theta \;=\; m\,\frac{v_\theta^2}{l} \;=\; m\;\frac{2\,g\,l\,(\cos\theta-\cos\theta_0)}{l} \tag{3}$$

$$T(\theta) \;=\; m\,g\,(3\,\cos\theta - 2\,\cos\theta_0) \tag{4}$$

dove si è sostituita l'espressione di v ricavata nella (2). Naturalmente $T(\theta)$ è massima quando $\cos\theta$ è massimo, ovvero vale 1. Questo è il caso quando $\theta = 0$ (posizione verticale), per cui:

$$T_{\rm m} \;=\; T(\theta=0) \;=\; m\,g\,(3 - 2\,\cos\theta_0) \;=\; 2\,m\,g \;=\; 0.785\ \text{N} \tag{5}$$

Dove si è usato $\cos\theta_0 = 1/2$.

2. Dal momento in cui la fune si rompe, il moto della massa m diviene parabolico, in quanto soggetto soltanto alla forza di gravità (ogni forma di attrito è trascurata). Per determinare la quota massima, prima di tutto è necessario determinare il valore della velocità della massa, $v_{\rm r}$, al momento della rottura: tale velocità è data dalla (2) per $\theta = \theta_{\rm r}$:

$$v_\mathrm{r} \;=\; \sqrt{2\,g\,l\,(\cos\theta_\mathrm{r} - \cos\theta_0)} \;=\; \sqrt{g\,l\,(\sqrt{3}-1)} \tag{6}$$

dove si è usato $\cos\theta_r = \sqrt{3}/2$. Dal momento di rottura, la componente orizzontale della velocità rimane costante e vale $v_\mathrm{r}\,\cos\theta_r$, poichè l'angolo che la velocità forma con la direzione orizzontale al momento della rottura vale θ_r. Detta pertanto v_x tale componente, si ha:

$$v_x \;=\; v_\mathrm{r}\,\cos\theta_r \;=\; \sqrt{g\,l\,\frac{3\,(\sqrt{3}-1)}{4}} \tag{7}$$

L'energia meccanica si conserva durante tutto il tempo, non entrando in azione alcuna forza dissipativa. Applicando quindi la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale e l'istante di quota massima (ovvero quando la velocità della massa ha solo la componente orizzontale, ovvero $v = v_x$), si ha:

$$m\,g\,l\,(1-\cos\theta_0) \;=\; \frac{1}{2}\,m\,v_x^2 + m\,g\,h_\mathrm{m} \tag{8}$$

Sostituendo $\cos\theta_0 = 1/2$ e la (6) nella (7), si ottiene:

$$\frac{1}{2}\,g\,l \;=\; g\,l\,\frac{3\,(\sqrt{3}-1)}{8} + g\,h_\mathrm{m} \tag{9}$$

$$h_\mathrm{m} \;=\; \frac{4-3\,(\sqrt{3}-1)}{8}\,l \;=\; \frac{7-\sqrt{27}}{8}\,l \;=\; 0.2255\,l \;=\; 0.451\ \mathrm{m} \tag{10}$$

C.V.D.