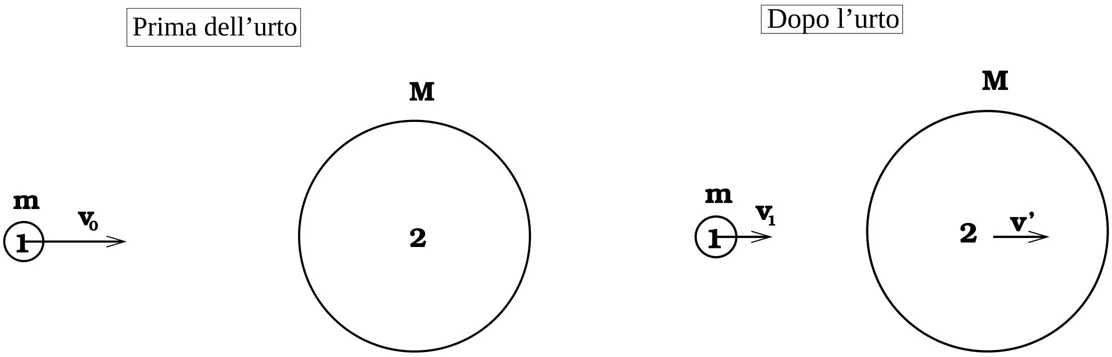
Problema 03

Si considerino due palline 1 e 2 di massa m e M: la pallina 2 é ferma, mentre la pallina 1 viaggia di moto rettilineo con velocitá v_0 diretta contro la 1. Supponendo l'urto totalmente elastico e sapendo che la direzione del moto della pallina 1 dopo l'urto non cambia (ovvero prosegue nella stessa direzione o rimbalza esattamente indietro), descrivere le velocitá di entrambe e dire come si ripartisce l'energia cinetica tra le due nei tre seguenti casi:

1. $M \gg m$
2. $M = m$
3. $M \ll m$

Soluzione.



Poiché l'urto é elastico, oltre alla conservazione della quantitá di moto totale si ha anche la conservazione dell'energia cinetica totale. Detta v_1 la velocitá di 1 e v' quella di 2 dopo l'urto (stesso verso positivo di $\vec{v_0}$), si ha:

$$\begin{cases} m\,v_0 = m\,v_1 + M\,v' \\ \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 + \frac{1}{2}\,M\,v'^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad v' = \frac{m}{M}\,(v_0 - v_1)$$

$$(v_0 - v_1)\,(v_0 + v_1) = \frac{m}{M}\,(v_0 - v_1)^2$$

caso banale $v_0 = v_1$ ($v' = 0$): come se l'urto non avvenisse.

$$\boxed{v_1 = -\,\frac{M-m}{M+m}\,v_0}$$

$$v' = \frac{m}{M}\,(v_0 + \frac{M-m}{M+m}\,v_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v' = \frac{2\,m}{M+m}\,v_0}$$

Detta T_1 l'energia cinetica della pallina 1 dopo l'urto, calcoliamo la frazione di energia cinetica che la pallina 1 mantiene dopo l'urto:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\frac{1}{2}\,m\,v_1^2}{\frac{1}{2}\,m\,v_0^2} = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2}$$

- Caso 1: $M \gg m$ In questo caso, possiamo fare le seguenti approssimazioni:

  $$v_1 \simeq -v_0 \quad ; \quad v' \simeq \frac{2\,m}{M}\,v_0 \ll v_0 \quad ; \quad T_1 \simeq T_0$$

  ovvero la pallina 1 rimbalza indietro con la stessa velocitá in modulo, mentre la 2 acquista una velocitá molto piccola. Quindi, la 1 conserva gran parte dell'energia cinetica totale.

- Caso 2: $M = m$ In questo caso, si ha esattamente:

  $$v_1 = 0 \quad ; \quad v' = v_0 \quad ; \quad T_1 = 0$$

  ovvero la 1 si arresta e la 2 prosegue con la stessa velocitá iniziale della 1, la quale cede tutta l'energia cinetica all'altra.

- Caso 3: $M \ll m$ In questo caso, possiamo fare le seguenti approssimazioni:

  $$v_1 \simeq v_0 \quad ; \quad v' \simeq 2\,v_0 \quad ; \quad T_1 \simeq T_0$$

  ovvero mentre il moto della pallina 1 rimane sostanzialmente inalterato, accade che la 2 acquista una velocitá doppia della 1.

C.V.D.