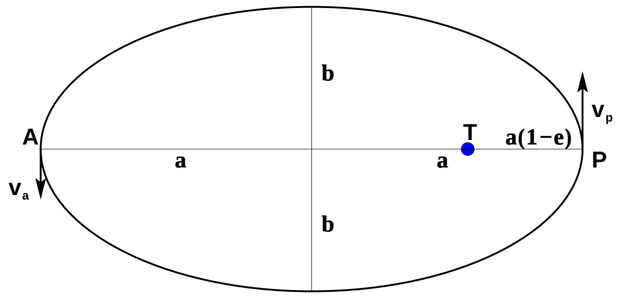
Problema 07

Dato un satellite di massa m la cui orbita attorno alla Terra é un ellisse di semiasse maggiore a ed eccentricitá e, se ne calcoli l'energia meccanica totale $E = K + U$.

Soluzione.



In figura la Terra T si trova in uno dei fuochi dell'ellisse: i punti A e P corrispondono rispettivamente all'apogeo e perigeo dell'orbita del satellite. Sia T il periodo di rivoluzione del satellite attorno alla Terra. Siano v_a e v_p le velocitá del satellite rispettivamente nei punti A e P: in questi punti, il vettore posizione $\vec{r}$ (origine in T) é normale alla velocitá: $\vec{r}_p \cdot \vec{v}_p = \vec{r}_a \cdot \vec{v}_a = 0$. Dalle proprietá dell'ellisse si hanno le seguenti:

$$b = a\sqrt{1-e^2} \qquad \text{(semiasse minore)}$$

$$A = \pi\, a\, b = \pi\, a^2 \sqrt{1-e^2} \quad \text{(area ellisse)} \quad \Rightarrow \quad \dot{A} = \frac{\pi\, a^2\sqrt{1-e^2}}{T} \quad \text{(vel. areolare)}$$

$$r_p = a\,(1-e) \quad ; \quad r_a = a\,(1+e)$$

Ricaviamo v_a dalla costanza della velocitá areolare:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\, v_a\, r_a = \frac{1}{2}\, v_p\, r_p = \frac{\pi\, a^2\sqrt{1-e^2}}{T}$$

$$v_a = \frac{2\,\pi\, a}{T}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \qquad ; \qquad v_p = \frac{2\,\pi\, a}{T}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

A questo punto possiamo esprimere l'energia totale: scegliamo, ad esempio, l'apogeo. Detta M la massa della Terra, si ha:

$$E = K_a + U_a = \frac{1}{2}\, m\, v_a^2 - \frac{G\,M\,m}{r_a} = \frac{1}{2}\, m\, \frac{4\,\pi^2\, a^2}{T^2}\, \frac{1-e}{1+e} - \frac{G\,M\,m}{a\,(1+e)}$$

Ora esprimiamo T dalla terza legge di Keplero: $\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\,M}{4\,\pi^2} \;\Rightarrow\; \frac{4\,\pi^2\, a^2}{T^2} = \frac{G\,M}{a}$:

$$E = \frac{1}{2}\, \frac{G\,M\,m\,(1-e)}{a\,(1+e)} - \frac{G\,M\,m}{a\,(1+e)} \;=\; -\frac{G\,M\,m}{2\,a\,(1+e)}\,(-1+e+2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = -\frac{G\,M\,m}{2\,a}} \qquad \text{C.V.D.}$$