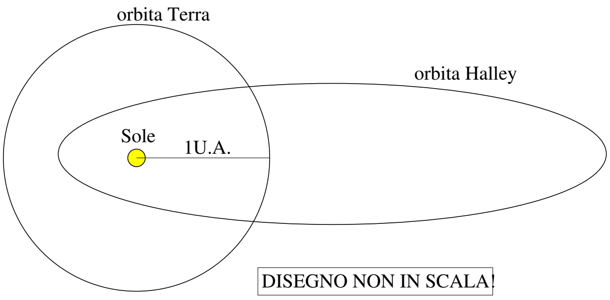
Problema 2

Sapendo che il semiasse maggiore dell'orbita terrestre vale a_T *=1 U.A. (Unità Astronomica) e che il periodo della cometa di Halley vale* $T_H = 76$ *anni, si chiedono i seguenti:*

1. *il semiasse maggiore* a_H *dell'orbita di tale cometa espresso in U.A.;*
2. *conoscendo la massa della cometa* $m_H = 1 \times 10^{14}$ *Kg, si trovi l'energia cinetica* K_1 *che possiede la cometa quando si trova a una distanza* $r_1 = a_T$ *=1 U.A. dal Sole (*K_1 *corrisponde pressappoco all'energia rilasciata da un eventuale impatto della cometa con la Terra);*
3. *si supponga che la velocità della cometa, quando questa si trova a una distanza dal Sole pari a* r_1*, in seguito a una forte esplosione di gas dal suo interno, venga istantaneamente ridotta di un fattore* $\frac{3}{4}$ *in modulo. Da quel momento la cometa descriverà un'orbita con semiasse maggiore e periodo diversi. Quanto vale il nuovo semiasse maggiore* a'_H *in U.A.? E il suo periodo* T'_H *in anni?*

Per il solo punto 2. si usino i seguenti: $M = 1.989 \times 10^{30}$ *Kg (massa del Sole),* $G = 6.67 \times 10^{-11}$ *m*^{3} *Kg*$^{-1}$ *s*$^{-2}$ *(costante di gravitazione universale), 1 U.A. =* 1.496×10^{11} *m.*



Soluzione.

1. Sia $T_T = 1$ anno il tempo di rivoluzione della Terra attorno al Sole. Applichiamo la terza legge di Keplero alla Terra e alla cometa di Halley:

$$\frac{a_H^3}{T_H^2} = \frac{a_T^3}{T_T^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{a_H = \left(\frac{T_H}{T_T}\right)^{2/3} a_T = 76^{2/3}\ \text{U.A.} \simeq 17.9\ \text{U.A.}}$$

2. Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica alla cometa di Halley: detta E l'energia totale della cometa, vale:

$$E = -\frac{G\,M\,m_H}{2\,a_H}$$

Pertanto, la conservazione dell'energia ($E = K_1 + U(r_1 = a_T)$) diviene:

$$-\frac{G\,M\,m_H}{2\,a_H} = K_1 - \frac{G\,M\,m_H}{a_T}$$

$$K_1 = \frac{G\,M\,m_H}{a_T}\left(1 - \frac{a_T}{2\,a_H}\right) \simeq 0.972\,\frac{G\,M\,m_H}{a_T} \simeq \boxed{8.6 \times 10^{22}\ \text{J}}$$

Tale energia, se venisse rilasciata durante un eventuale impatto catastrofico con la Terra, espressa in megatoni (1 Mton = energia liberata da un milione di tonnellate di tritolo, pari a 4.2×10^{15} J), equivale a:

$$K_1 = 8.6 \times 10^{22}\ \mathrm{J} = 2.05 \times 10^{7}\ \mathrm{Mton}$$

In termini di bombe di Hiroshima, che era da 15 kton (0.015 Mton), K_1 corrisponde a piú di un miliardo di bombe atomiche di quella energia.

3. Sia v la velocità della cometa subito prima dell'esplosione. Siano E ed E' le energie meccaniche prima e dopo l'esplosione (diverse a causa di quest'ultima). La conservazione dell'energia meccanica, applicata subito prima dell'esplosione, diviene:

$$E \;=\; -\frac{G\,M\,m_H}{2\,a_H} \;=\; \frac{1}{2}\,m_H\,v^2 - \frac{G\,M\,m_H}{a_T}$$

e dopo l'esplosione:

$$E' \;=\; -\frac{G\,M\,m_H}{2\,a'_H} \;=\; \frac{1}{2}\,m_H\left(\frac{3\,v}{4}\right)^2 - \frac{G\,M\,m_H}{a_T}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri della seconda per $\frac{16}{9}$:

$$-\frac{8\,G\,M\,m_H}{9\,a'_H} \;=\; \frac{1}{2}\,m_H\,v^2 - \frac{16\,G\,M\,m_H}{9\,a_T}$$

sottraiamo membro a membro dalla prima espressione:

$$-G\,M\,m_H\left(\frac{1}{2\,a_H} - \frac{8}{9\,a'_H}\right) \;=\; \frac{7\,G\,M\,m_H}{9\,a_T}$$

da cui ricaviamo facilmente a'_H:

$$-\frac{1}{2\,a_H} + \frac{8}{9\,a'_H} \;=\; \frac{7}{9\,a_T}$$

$$\boxed{a'_H \;=\; \frac{8}{9}\left(\frac{7}{9\,a_T} + \frac{1}{2\,a_H}\right)^{-1} \;\simeq\; 1.10\ \mathrm{U.A.}}$$

Il periodo T'_H è subito calcolato come al punto 1. attraverso la terza legge di Keplero:

$$\frac{a'^3_H}{T'^2_H} = \frac{a^3_T}{T^2_T} \quad\rightarrow\quad \boxed{T'_H \;=\; \left(\frac{a'_H}{a_T}\right)^{3/2} T_T \;\simeq\; 1.10^{3/2}\ \mathrm{anni} \;\simeq\; 1.16\ \mathrm{anni}}$$

Ovvero 1 anno 1 mese 27 giorni circa.

C.V.D.