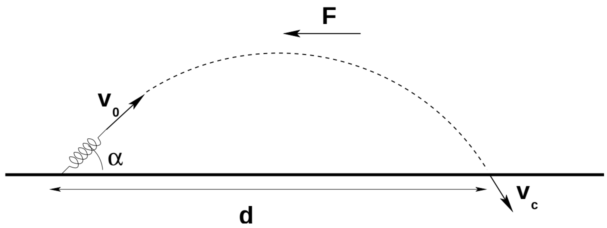
Problema 2

Al tempo $t = 0$ s una molla compressa di $l = 0.5$ m e di costante elastica $k = 100$ N/m scaglia un proiettile di massa $m = 30$ g con angolo $\alpha = 45^{\circ}$ sopra l'orizzonte. Subito dopo aver sparato il proiettile, la molla torna alla sua posizione di riposo. Si chiede:

1. *quanto vale la velocitá v_0 del proiettile appena sparato?*
2. *Un vento uniforme esercita sul proiettile in volo una forza orizzontale $F = 0.04$ N costante come mostrato in figura. Quanto vale la distanza d del punto di caduta del proiettile?*
3. *Tenendo presente il vento uniforme del punto precedente, quanto vale la velocitá v_C del proiettile quando cade in terra?*

Si considerino molla e proiettile puntiformi e si usi $g = 9.81$ m/s^2.



Soluzione.

1. Imponendo la conservazione dell'energia da quando la molla é carica, a quando scaglia il proiettile, si ha:

$$\frac{1}{2}\,k\,l^2 \;=\; \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 \quad\Rightarrow\quad v_0 \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}}\,l \;\simeq\; 28.87\ \mathrm{m/s}$$

2. Applicando la seconda legge della dinamica e proiettandola lungo la componente orizzontale, si ha: $m\,a_x = -F$ e quindi si ha un moto lungo x che é uniformemente decelerato (si considera un sistema cartesiano Oxy con asse x orizzontale, con direzione positiva nel verso del moto del proiettile, asse y verticale, l'origine coincidente con la posizione della molla). Pertanto, la posizione del proiettile é la seguente:

$$\begin{cases} x(t) \;=\; -\frac{1}{2}\,\frac{F}{m}\,t^2 + v_0\,\cos\alpha\;t \\ y(t) \;=\; -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,\sin\alpha\;t \end{cases}$$

Sia t_C il tempo di caduta, quindi vale: $y(t_C) = 0$:

$$y(t_C) \;=\; -\frac{1}{2}\,g\,t_C^2 + v_0\,\sin\alpha\;t_C = 0 \quad\Rightarrow\quad t_C = \frac{2\,v_0\,\sin\alpha}{g}$$

$$d = x(t_C) = \frac{v_0^2}{g}\left(\sin 2\alpha - 2\,\frac{F}{mg}\,\sin^2\alpha\right) \;\simeq\; 73.4\ \mathrm{m}$$

3. In quanto costante e uniforme, il campo di forze del vento $\vec{F}$ é conservativo e, analogamente al campo gravitazionale costante, anche a questo campo é associata un'energia potenziale pari a $F\,x$ (cosí come l'energia potenziale del campo gravitazionale costante vale $U(y) = m\,g\,y$):

$$\frac{1}{2}\, m\, v_0^2 \;=\; \frac{1}{2}\, m\, v_c^2 + F\, d$$

$$v_c^2 \;=\; v_0^2 - 2\, \frac{F}{m}\, \frac{v_0^2}{g} \left(\sin 2\alpha - 2\, \frac{F}{mg}\, \sin^2 \alpha \right)$$

$$v_c^2 \;=\; v_0^2 \left[1 - \frac{2F}{mg}\, \sin 2\alpha + \left(\frac{2F}{mg} \right)^2 \sin^2 \alpha \right]$$

$$v_c \;=\; v_0 \sqrt{\left(\cos\alpha - \frac{2F}{mg}\, \sin\alpha \right)^2 + \sin^2 \alpha} \;\simeq\; 25.25 \text{ m/s}$$

Si puó arrivare allo stesso risultato, ignorando che il vento in questo caso esercita una forza conservativa: detto $\mathcal{L}_v$ il lavoro prodotto dal vento, si ha:

$$E(B) = E(A) + \mathcal{L}_v \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\, m\, v_c^2 \;=\; \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 - F\, d$$

dove si é sfruttato: $\mathcal{L}_v = -F\, d$.

C.V.D.