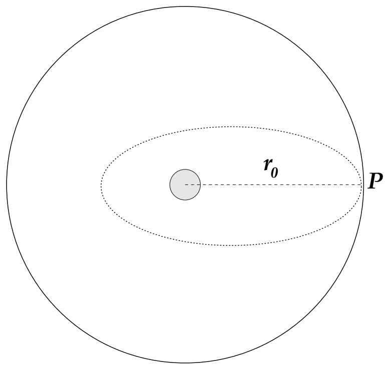
Fisica I. Prima Sessione AA 2009-10.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 15/01/2010

PROBLEMA 2

Un satellite è inizialmente in orbita circolare di raggio $r_0 = 2 \times 10^4$ Km attorno alla Terra (r_0 è misurato dal centro della Terra), come mostrato in figura (tratto continuo).

1. Si calcoli il periodo di rivoluzione del satellite, T_0.
2. A un certo punto, quando si trova nel punto P, il satellite dimezza improvvisamente la propria velocità in modulo, mantenendo la stessa direzione. Come conseguenza, l'orbita diviene ellittica, come mostrato in figura (tratto con puntini). Si trovi a, il semiasse maggiore della nuova orbita.
3. **(3 punti supplementari)** Si determini l'eccentricità e della nuova orbita (si noti che il punto P rappresenta l'apogeo della nuova orbita).

Si usino i seguenti valori: $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3 Kg^{-1} s^{-2} (costante di gravitazione universale); $M = 5.97 \times 10^{24}$ Kg (massa della Terra).



Soluzione.

1. All'inizio l'orbita è circolare e quindi sia la velocità che la distanza del satellite sono banalmente costanti nel tempo. Il raggio r_0 pertanto coincide con il semiasse maggiore dell'orbita circolare e dalla terza legge di Keplero si ricava immediatamente il periodo di rivoluzione:

$$\frac{r_0^3}{T_0^2} = \frac{G\,M}{4\,\pi^2} \quad \Rightarrow \quad T_0 = \sqrt{\frac{4\,\pi^2\,r_0^3}{G\,M}} = 28163 \text{ s} = 7^{\text{h}}\ 49^{\text{m}}\ 23^{\text{s}} \tag{1}$$

2. Il nuovo semiasse a è legato all'energia meccanica E' dalla semplice relazione:

$$E' = -\frac{G\,M\,m}{2\,a} \tag{2}$$

dove con m si intende la massa del satellite. Poichè l'energia meccanica si conserva lungo tutta l'orbita, possiamo calcolarla in un punto qualunque. In particolare, conviene calcolarla nel punto P, dove sia l'energia potenziale U' che quella cinetica K' sono ricavabili:

$$U' = -\frac{G\,M\,m}{r_0} \tag{3}$$

Detta v_0 la velocità del satellite nel punto P *prima* di dimezzare la velocità, questa è facilmente ricavata imponendo che la forza centripeta di un moto circolare uniforme $m\,v_0^2/r_0$, sia uguale alla forza di attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra: da cui segue:

$$m\,\frac{v_0^2}{r_0} = \frac{G\,M\,m}{r_0^2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{G\,M}{r_0}} \tag{4}$$

L'energia cinetica *dopo* il dimezzamento della velocità vale quindi:

$$K' = \frac{1}{2}\,m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\,\frac{G\,M\,m}{r_0} \tag{5}$$

Combinando le (3) e (5) si ricava E':

$$E' = -\frac{7}{8}\,\frac{G\,M\,m}{r_0} \tag{6}$$

Uguagliando la (2) e la (6) si ricava immediatamente a:

$$-\frac{G\,M\,m}{2\,a} = -\frac{7}{8}\,\frac{G\,M\,m}{r_0} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4}{7}\,r_0 = 11429 \text{ Km} \tag{7}$$

3. Quando il satellite si trova in P (distanza r_0) si trova anche nell'apogeo della nuova orbita. Ma questo vale anche $a\,(1+e)$. Uguagliando queste due, si ricava immediatamente l'eccentricità e:

$$r_0 = a\,(1+e) = \frac{4}{7}\,r_0\,(1+e) \quad \Rightarrow \quad e = \frac{3}{4} = 0.75 \tag{8}$$

C.V.D.