

Problema 2

Una sonda percorre un'orbita circolare di raggio $r = 700 \times 10^3$ Km attorno a Giove e ha un periodo di rivoluzione $T = 3.782$ giorni. Quanto vale la massa di Giove? Se la sonda ruotasse istantaneamente su se stessa in modo tale da avere la propria velocità (il cui modulo, quindi, non cambierebbe rispetto a quella di rivoluzione) parallela al raggio vettore (ossia in direzione opposta al centro di Giove), fino a quale distanza massima r_m arriverebbe dal centro di Giove? (Si usi: $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ Kg}^{-2}$).

Soluzione.

Nel caso di un'orbita circolare, detta M la massa di Giove, m la massa e v la velocità della sonda, si ha che la forza centripeta che descrive il moto circolare uniforme è uguale alla forza di gravità con cui Giove attrae la sonda:

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{G M m}{r^2} \rightarrow \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 \frac{1}{r} = \frac{G M}{r^2} \rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{G M}{4\pi^2}$$

e ritroviamo, come era ovvio, l'espressione della terza legge di Keplero, da cui segue immediatamente:

$$M = \frac{4\pi^2}{G} \frac{r^3}{T^2} \simeq 1.9 \times 10^{27} \text{ Kg}$$

dove si è opportunamente convertito: $T = 326\,765$ s, $r = 7 \times 10^8$ m.

Se la velocità, il cui modulo si ricava dall'espressione sopra, fosse diretta in direzione opposta al centro di Giove, la sonda si allontanerebbe radialmente fino alla distanza massima r_m , dopo di che comincerebbe a ricadere sempre radialmente su Giove. Per ricavare r_m basta imporre la conservazione dell'energia, sapendo che la velocità della sonda alla distanza massima è nulla:

$$v = \sqrt{\frac{G M}{r}}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{r} = -\frac{G M m}{r_m} \rightarrow -\frac{G M m}{2r} = -\frac{G M m}{r_m}$$

$$r_m = 2r = 1.4 \times 10^6 \text{ Km}$$

Modo ancora più veloce: se ci si ricorda che l'energia totale di una sonda che orbita su un'ellisse di semiasse maggiore r vale (si ricorda che un cerchio è un'ellisse con eccentricità nulla e con semiasse banalmente uguale al raggio del cerchio):

$$E = -\frac{G M m}{2r}$$

bastava imporre subito: $E = -\frac{G M m}{r_m}$.

C.V.D.