Problema 2

Un satellite artificiale di massa $m = 10^3$ Kg ruota attorno alla Terra inizialmente lungo un'orbita circolare di raggio $r_0 = 7000$ Km. Si decide di portare il satellite su un'orbita circolare di raggio $r_1 = 2\,r_0$. Si calcolino i seguenti:

1. *il lavoro necessario per compiere tale manovra;*
2. *i periodi di rivoluzione del satellite T_0 e T_1 relativi alle orbite iniziale e finale, rispettivamente;*
3. *il rapporto $f = v_1/v_0$ tra la velocità finale v_1 e quella iniziale v_0 del satellite, rispettivamente.*

In quale delle due orbite il satellite possiede l'energia cinetica maggiore? In quale possiede l'energia meccanica maggiore? Si usino $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 Kg^{-2} (costante di gravitazione universale), $M = 5.976 \times 10^{24}$ Kg (massa della Terra).

Soluzione.

1. L'energia totale E_i $(i = 0, 1)$ del satellite la cui orbita ha semiasse r_i vale:

   $$E_i \;=\; -\,\frac{G\,M\,m}{2\,r_i} \qquad\qquad (i = 0, 1)$$

   L'espressione di sopra è ricavabile facilmente nel caso di un'orbita circolare, come in questo caso, imponendo al solito che la forza centrifuga eguagli la forza di attrazione gravitazionale e sostituendo poi l'espressione della velocità v_i nell'espressione dell'energia totale:

   $$\begin{cases} m\,\dfrac{v_i^2}{r_i} \;=\; \dfrac{G\,M\,m}{r_i^2} \\ E_i \;=\; K + U \;=\; \frac{1}{2}\,m\,v_i^2 - \dfrac{G\,M\,m}{r_i} \;=\; -\,\dfrac{G\,M\,m}{2\,r_i} \end{cases}$$

   Per calcolare il lavoro $\mathcal{L}$, applichiamo la conservazione dell'energia totale nel caso generale di forze non conservative che fanno lavoro:

   $$E(B) = E(A) + \mathcal{L} \quad\rightarrow\quad E_1 = E_0 + \mathcal{L}$$

   $$\mathcal{L} = E_1 - E_0 = -\,\frac{G\,M\,m}{2\,r_1} + \frac{G\,M\,m}{2\,r_0} \;=\; \frac{G\,M\,m\,(r_1 - r_0)}{2\,r_0\,r_1}$$

   $$\boxed{\mathcal{L} \;=\; \frac{G\,M\,m}{4\,r_0} \;\simeq\; 1.42 \times 10^{10}\ \mathrm{J}}$$

2. Utilizzando la terza legge di Keplero si ricavano immediatamente i periodi dai raggi delle orbite:

   $$\frac{G\,M}{4\,\pi^2} \;=\; \frac{r_i^3}{T_i^2} \qquad\qquad (i = 0, 1)$$

Ricordiamo che tale legge è comunque ricavabile facilmente nel caso di orbite circolari: basta imporre, come al punto precedente, l'uguaglianza tra forza d'attrazione gravitazionale e forza centrifuga, ricordando che $v = 2\,\pi\,r/T$.

$$\boxed{T_0 \;=\; \sqrt{\frac{4\,\pi^2\,r_0^3}{G\,M}} \;\simeq\; 5828.5\ \mathrm{s} \;=\; 1^{\mathrm{h}}\,37^{\mathrm{m}}\,8.5^{\mathrm{s}}}$$

$$\boxed{T_1 \;=\; \sqrt{\frac{4\,\pi^2\,r_1^3}{G\,M}} \;=\; 2\sqrt{2}\,T_0 \;\simeq\; 16485.6\ \mathrm{s} \;=\; 4^{\mathrm{h}}\,34^{\mathrm{m}}\,45.6^{\mathrm{s}}}$$

3. La velocità del satellite è facilmente esprimibile in funzione del raggio imponendo ancora una volta il bilanciamento tra forza d'attrazione gravitazionale e centrifuga:

$$m\,\frac{v_i^2}{r_i} \;=\; \frac{G\,M\,m}{r_i^2} \quad\rightarrow\quad v_i \;=\; \sqrt{\frac{G\,M}{r_i}}$$

da cui si ottiene immediatamente il rapporto cercato:

$$\boxed{f \;=\; \frac{v_1}{v_0} \;=\; \sqrt{\frac{r_0}{r_1}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \;\simeq\; 0.71}$$

L'energia cinetica del satellite diminuisce $(v_1 < v_0)$ passando dall'orbita iniziale a quella finale. Al contrario, l'energia meccanica aumenta: lo si vede immediatamente dal fatto che il lavoro $\mathcal{L}$ necessario per compiere la manovra è positivo, pertanto $E_1 > E_0$.
In conclusione, nell'orbita iniziale il satellite ha energia cinetica maggiore ed energia meccanica minore.

C.V.D.