Problema 04

In un sistema cartesiano (X,Y) si consideri il punto P di coordinate (3, 2) e due vettori $\vec{a} = -2\,\hat{\imath} + \hat{\jmath}$, $\vec{b} = 5\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath}$ applicati in P. Detto Q il punto del piano tale che il vettore $\overrightarrow{PQ}$ sia la risultante della somma dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, calcolare il vettore $\overrightarrow{PQ}$ esprimendolo in funzione dei versori cartesiani $(\hat{\imath},\, \hat{\jmath})$ e si calcolino le coordinate del punto Inoltre, si esprima il vettore $\overrightarrow{PQ}$ in funzione dei versori polari $(\hat{r},\, \hat{\theta})$ nel punto P. Infine, si calcoli il modulo di $\overrightarrow{PQ}$ in due modi, ovvero usando sia le coordinate cartesiane che polari, verificando la consistenza del risultato.

Soluzione.

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{a} + \vec{b} = 3\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath}$$

$$Q = (Q - P) + P = \overrightarrow{PQ} + P = (3, 3) + (3, 2) = (6, 5)$$

I versori polari $(\hat{r},\, \hat{\theta})$ definiti nel punto P sono esprimibili in funzione dei versori cartesiani secondo le seguenti:

$$\begin{cases} \hat{r} = & \cos\theta\,\hat{\imath} & +\sin\theta\,\hat{\jmath} \\ \hat{\theta} = & -\sin\theta\,\hat{\imath} & +\cos\theta\,\hat{\jmath} \end{cases}$$

dove θ in questo caso é l'angolo che il vettore $\overrightarrow{OP}$ forma con l'asse x positivo (O é l'origine del sistema XY):

$$\tan\theta = \frac{(P-O)_y}{(P-O)_x} = \frac{2}{3}$$

Ora si usano le espressioni del seno e coseno in funzione della tangente di un angolo (in questo caso, prendiamo i valori positivi di entrambi, dato che P si trova nel primo quadrante del piano XY):

$$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \qquad \sin\theta = \pm\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\begin{cases} \hat{r} = & \frac{3}{\sqrt{13}}\,\hat{\imath} & +\frac{2}{\sqrt{13}}\,\hat{\jmath} \\ \hat{\theta} = & -\frac{2}{\sqrt{13}}\,\hat{\imath} & +\frac{3}{\sqrt{13}}\,\hat{\jmath} \end{cases}$$

Posto: $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, si ha: $\vec{v} = v_r\,\hat{r} + v_\theta\,\hat{\theta}$:

$$v_r = \vec{v}\cdot\hat{r} = (3\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath})\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\,\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{13}}\,\hat{\jmath}\right) = \frac{15}{\sqrt{13}}$$

$$v_\theta = \vec{v}\cdot\hat{\theta} = (3\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath})\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\,\hat{\imath} + \frac{3}{\sqrt{13}}\,\hat{\jmath}\right) = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{15}{\sqrt{13}}\,\hat{r} + \frac{3}{\sqrt{13}}\,\hat{\theta}\right)$$

Calcoliamo il modulo di $\overrightarrow{PQ}$ dalle coordinate cartesiane:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{9+9} = 3\,\sqrt{2}$$

consistente col valore ottenuto dalle coordinate polari:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\frac{225}{13} + \frac{9}{13}} = 3\,\sqrt{2}$$

C.V.D.