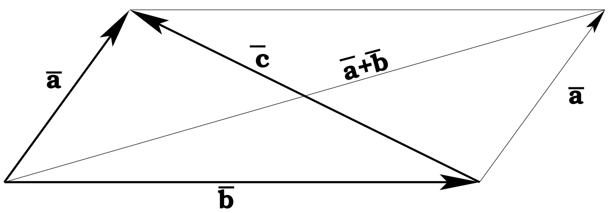
Problema 03

Usando il calcolo vettoriale, si dimostri il teorema di Erone.

Soluzione.
Enunciamo il teorema di Erone:
Theorem 1. [Erone] *Dato un triangolo di lati a, b e c, la sua area A vale:*

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

dove p é il semiperimetro.



Si consideri il triangolo in figura. Definiamo i versi dei vettori, come mostrato in figura; si ha che vale la seguente:
$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

Poiché il modulo del vettore $\vec{a} \times \vec{b}$ esprime l'area del parallelogramma individuato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, doppia di quella del triangolo in questione, vale la seguente:

$$4\,A^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$$

Nell'ultimo passaggio sopra, si é sfruttata una proprietá del prodotto misto: del prodotto scalare $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, il primo termine $(\vec{a} \times \vec{b})$ é considerato il prodotto vettoriale all'interno del prodotto misto e il secondo termine, $(\vec{a} \times \vec{b})$, é inteso come il terzo vettore del prodotto misto.

$$4\,A^2 = [b^2\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{b}] \cdot \vec{a} = a^2\,b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = [a\,b - (\vec{a} \cdot \vec{b})][a\,b + (\vec{a} \cdot \vec{b})]$$

Ora esprimiamo il termine $\vec{a} \cdot \vec{b}$ nel modo seguente:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{(\vec{a} + \vec{b})^2 - (a^2 + b^2)}{2}$$

e sostituendolo nella prima espressione, si ottiene:

$$4\,A^2 = \frac{2\,a\,b - (\vec{a}+\vec{b})^2 + (a^2+b^2)}{2}\;\;\frac{2\,a\,b + (\vec{a}+\vec{b})^2 - (a^2+b^2)}{2}$$
$$A^2 = \frac{[(a+b)^2 - (\vec{a}+\vec{b})^2]\;\;[(\vec{a}+\vec{b})^2 - (a-b)^2]}{16}$$

Si noti che nell'espressione ottenuta sopra compare il termine $\vec{a}+\vec{b}$, diagonale del triangolo. Ora facciamo il seguente ragionamento: trasportiamo il vettore $\vec{a}$ parallelamente fino al punto di applicazione del vettore $\vec{c}$, come mostrato in figura. L'area del triangolo formato dal vettore $\vec{a}$ trasportato, da $\vec{a}+\vec{b}$ e da $\vec{b}$ é equivalente a quella del triangolo di partenza, in quanto hanno in comune base e altezza: questo lo si puó vedere osservando che la sua area e' calcolabile come la metá del termine $|-\vec{b}\times\vec{a}|$, ovvero A. Pertanto, nella espressione ottenuta sopra, possiamo sostituire al valore della diagonale $\vec{a}+\vec{b}$ quello corrispondente alla diagonale di questo triangolo, ovvero il vettore $\vec{c}$. Si ottiene cosí:

$$A^2 = \frac{[(a+b)^2 - c^2]\;\;[c^2 - (a-b)^2]}{16}$$
$$A^2 = \frac{(a+b-c)(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)}{16}$$

esprimendo: $2\,p = (a+b+c)$, si ha infine:

$$A^2 = \frac{(2\,p - 2\,c)\;2\,p\;(2\,p - 2\,a)\;(2\,p - 2\,b)}{16}$$

$$A^2 = (p-c)p(p-a)(p-b)$$

che é quanto enunciato dal teorema.

C.V.D.