Problema 08

[BDAF - 20]. Il vettore $\vec{a}$ é applicato nel punto $O(1,-3,3)$ ed il suo secondo estremo é $P(6,-10,2)$.

1. *Scrivere il vettore in forma cartesiana,*
2. *calcolarne modulo e coseni direttori,*
3. *calcolare la proiezione a_P del vettore $\vec{a}$ sul vettore $\vec{b}$ di componenti 1 e 2 sugli assi x e y e di modulo $\sqrt{5}$,*
4. *calcolare $\vec{a}\cdot\vec{b}$ e $\vec{a}\times\vec{b}$.*

Soluzione.

1. $\vec{a}=\overrightarrow{OP}=P-O=(5,-7,-1)=5\,\hat{\imath}-7\,\hat{\jmath}-\hat{k}$
2. $a=\sqrt{5^2+(-7)^2+1^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$
   Sia $\hat{a}$ il versore associato al vettore $\vec{a}$:
   $\hat{a}=\frac{\vec{a}}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\hat{\imath}-\frac{7}{5\sqrt{3}}\,\hat{\jmath}-\frac{1}{5\sqrt{3}}\,\hat{k}$
   $\cos(\hat{a},\hat{\imath})=\hat{a}\cdot\hat{\imath}=\frac{1}{\sqrt{3}}$
   $\cos(\hat{a},\hat{\jmath})=\hat{a}\cdot\hat{\jmath}=-\frac{7}{5\sqrt{3}}$
   $\cos(\hat{a},\hat{k})=\hat{a}\cdot\hat{k}=-\frac{1}{5\sqrt{3}}$
3. $b=|\vec{b}|=\sqrt{1^2+2^2+b_z^2}=\sqrt{5}$
   $5+b_z^2=5 \qquad \Rightarrow \qquad b_z=0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{b}=\hat{\imath}+2\,\hat{\jmath}$
   $a_P=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b}=\frac{a_x\,b_x+a_y\,b_y+a_z\,b_z}{b}=-\frac{9}{\sqrt{5}}$
4. $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\,b_x+a_y\,b_y+a_z\,b_z=-9$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 5 & -7 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=2\,\hat{\imath}-\hat{\jmath}+17\,\hat{k}$$

C.V.D.