Problema 10

In un sistema cartesiano $Oxyz$ é definita una funzione $U(x, y, z)$:

$$U(x, y, z) = -\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Si consideri la funzione vettoriale $\vec{F} = -\text{grad}U$, dove grad$U$ é la funzione gradiente:

$$\text{grad}\, U = \nabla\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\hat{k}$$

Si calcolino le componenti del campo vettoriale $\vec{F}$ e lo si decomponga lungo i versori polari.

Soluzione.

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{k\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{k\,x}{r^3} = -\frac{k\ \sin\theta\ \cos\phi}{r^2}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{k\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{k\,y}{r^3} = -\frac{k\ \sin\theta\ \sin\phi}{r^2}$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{k\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{k\,z}{r^3} = -\frac{k\ \cos\theta}{r^2}$$

$$\vec{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k} = -\frac{k}{r^2}(\sin\theta\ \cos\phi\,\hat{i} + \sin\theta\ \sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k})$$

$$\vec{F} = -k\,\frac{\hat{r}}{r^2}$$

Pertanto:

$$F_r = -\frac{k}{r^2} \qquad ; \qquad F_\theta = 0 \qquad ; \qquad F_\phi = 0$$

C.V.D.

Osservazione: come si vedrá piú avanti, il campo vettoriale definito da $\vec{F}$ esprime la forza di attrazione gravitazionale ($k = GMm$) e la funzione U esprime l'energia potenziale gravitazionale.