Problema 06

In una terna cartesiana XYZ sono dati i seguenti vettori:

$\vec{a} = 2\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} - \hat{k}$

$\vec{b} = -2\,\hat{\imath} + 3\,\hat{k}$

$\vec{c} = 3\,\hat{\jmath} - 3\,\hat{k}$

Si calcoli l'angolo acuto formato dal vettore $\vec{c}$ col piano individuato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Soluzione.
Il vettore $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$ é normale al piano individuato dagli stessi vettori:

$$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} \ = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \ 9\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}$$

Detto θ l'angolo formato dal vettore $\vec{c}$ e $\vec{v}$, dalla definizione di prodotto scalare si ha:

$\vec{c} \cdot \vec{v} = c\,v\ \cos\theta$

dove i moduli c, v e il prodotto scalare $\vec{c} \cdot \vec{v}$ valgono:

$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{18} = 3\,\sqrt{2}$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{133}$

$\vec{c} \cdot \vec{v} = v_x\,c_x + v_y\,c_y + v_z\,c_z = -30$

Poiché il prodotto scalare $\vec{c} \cdot \vec{v}$ é negativo, l'angolo θ é maggiore di $\pi/2$, quindi l'angolo acuto formato dal vettore $\vec{c}$ con l'asse normale al piano corrisponde a $(\pi - \theta)$. Segue che l'angolo α formato dal vettore $\vec{c}$ col piano, essendo complementare a $(\pi - \theta)$, vale:

$\alpha = \frac{\pi}{2} - (\pi - \theta) = \theta - \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{c} \cdot \vec{v}}{c\,v}\right) - \frac{\pi}{2} = \arccos\left(\frac{-30}{3\,\sqrt{2}\,\sqrt{133}}\right) - \frac{\pi}{2} = \arccos\left(-\frac{10}{\sqrt{266}}\right) - \frac{\pi}{2}$

$\alpha \simeq 37.8^\circ$

C.V.D.