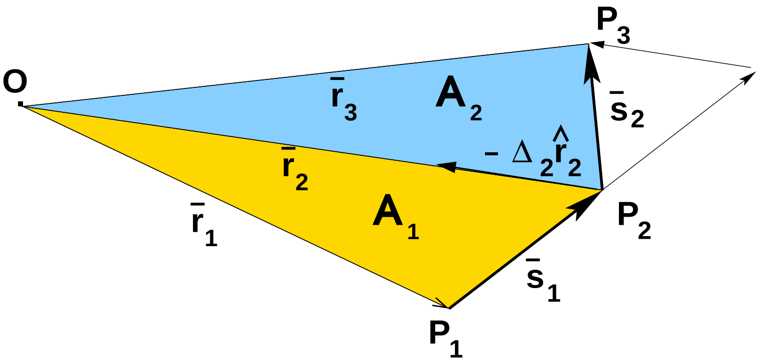
Problema 05

Si consideri un robot che si sposta su un pavimento compiendo tratti rettilinei. Detto O un punto fisso del pavimento, il robot é stato programmato con la seguente caratteristica: detto P_1 il punto di partenza del robot, il primo spostamento che esegue ha una direzione diversa da quella del vettore $\overrightarrow{OP_1}$. Al termine del primo spostamento, il robot usa il seguente algoritmo per determinare lo spostamento successivo: questo é dato dalla somma del vettore spostamento appena compiuto e di un vettore di modulo variabile, diretto verso il punto O. Questa procedura viene ripetuta continuamente. Dimostrare che al termine di ogni spostamento, l'area del triangolo formato dalla congiungente il punto O con la posizione del robot e dallo spostamento successivo che si appresta a compiere, é una costante.

Soluzione.
Consideriamo un piano XY con origine O. Sia $\vec{r_1} = \overrightarrow{OP_1}$ il vettore posizione del robot all'istante di partenza e, in generale, sia P_n il punto in cui si trova il robot prima di compiere l'n-esimo spostamento (corrispondentemente, $\vec{r_n} = \overrightarrow{OP_n}$ é il relativo vettore posizione). Sia $\vec{s_1}$ il primo spostamento eseguito dal robot: quindi, si ha: $|\vec{r_1} \times \vec{s_1}| \neq 0$ poiché i due vettori hanno diverse direzioni. Detta A_1 l'area del triangolo formato dai vettori $\vec{r_1}$ e $\vec{s_1}$, vale la seguente:

$$A_1 = \frac{1}{2}|\vec{r_1} \times \vec{s_1}|$$



Al termine dello spostamento $\vec{s_1}$ la nuova posizione del robot é data dal vettore $\vec{r_2} = \vec{r_1} + \vec{s_1}$. A questo punto, il secondo spostamento $\vec{s_2}$ é cosí calcolato dal robot:

$$\vec{s_2} = \vec{s_1} + (-\Delta_2)\,\hat{r_2}$$

dove Δ_2 é il modulo variabile del vettore diretto verso il punto O e $\hat{r_2}$ é il versore del vettore posizione nel punto P_2. Pertanto, l'area A_2 vale:

$$A_2 = \frac{1}{2}|\vec{r_2} \times \vec{s_2}| = \frac{1}{2}|(\vec{r_1} + \vec{s_1}) \times (\vec{s_1} - \Delta_2\,\hat{r_2})| = \frac{1}{2}|\vec{r_1} \times \vec{s_1} - \Delta_2\,\vec{r_2} \times \hat{r_2}| =$$

$$= \frac{1}{2}|\vec{r_1} \times \vec{s_1}| = A_1$$

e cosí via la dimostrazione si puó reitare indefinitamente.

C.V.D.

N.B.
Per quanto in forma elementare e priva del calcolo differenziale, questo semplice esercizio ripercorre la dimostrazione fatta da Isaac Newton nei *Principia* per dimostrare la costanza della velocitá areolare di un corpo soggetto a un campo di forze centrali.