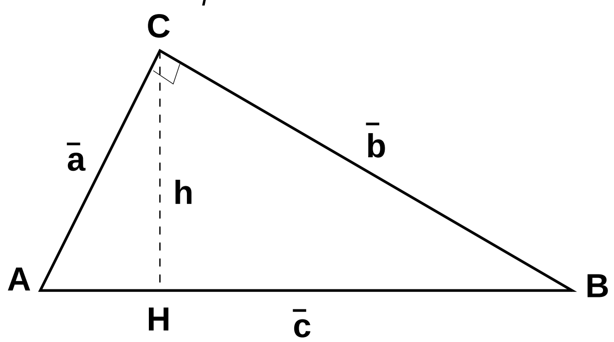
Problema 02

Usando il calcolo vettoriale, si dimostrino i due teoremi di Euclide.

Soluzione.
Gli enunciati dei due teoremi di Euclide sono i seguenti:
Theorem 1. [Euclide 1] *In un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sur un cateto é uguale all'area del rettangolo avente per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.*
Theorem 2. [Euclide 2] *In un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa é uguale all'area del rettangolo avente per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*



Si consideri il triangolo rettangolo in figura. Definiamo i seguenti vettori:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC} \qquad \vec{h} = \overrightarrow{HC}$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{BC} \qquad \vec{c_a} = \overrightarrow{AH}$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} \qquad \vec{c_b} = \overrightarrow{HB}$$

dove i vettori $\vec{a}, \vec{b}$ sono i due cateti, $\vec{c}$ é l'ipotenusa, $\vec{h}$é l'altezza relativa all'ipotenusa, e $\vec{c_a}$ e $\vec{c_b}$ corrispondono alle proiezioni sull'ipotenusa dei cateti (stesso verso di $\vec{c}$). Essendo i due cateti perpendicolari, vale: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{c} + \vec{b}$$
$$a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot (\vec{c} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{c} = c_a \, c$$

e questo prova l'enunciato del primo teorema di Euclide (si é sfruttato il fatto che il prodotto scalare é il prodotto del modulo di un vettore per la proiezione dell'altro su quello).

$$\vec{h} = \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC} = -\vec{c_a} + \vec{a}$$
$$\vec{h} = \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC} = \vec{c_b} + \vec{b}$$

Ora si sfruttano tali relazioni nella seguente:

$$h^2 = \vec{h}\cdot\vec{h} = (\vec{a}-\vec{c_a})\cdot(\vec{c_b}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{c_b}-\vec{c_a}\cdot\vec{c_b}-\vec{c_a}\cdot\vec{b} = c_a\,c_b-c_a\,c_b-c_a\,(-c_b) = c_a\,c_b$$

che é quanto enunciato dal secondo teorema.
C.V.D.