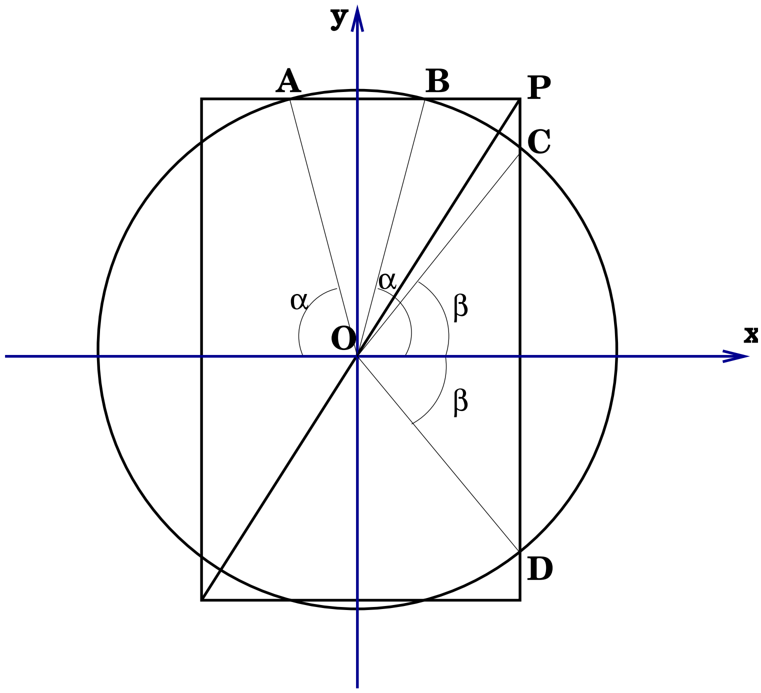
Problema 01

Dimostrare che se AB, CD sono due corde di un cerchio fra loro perpendicolari e si indica con P il loro punto d'intersezione, la risultante dei quattro vettori applicati in P: $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PD}$, é equivalente ad un unico vettore (applicato in P), passante per il centro O del cerchio e in modulo uguale al doppio della distanza PO.

Soluzione.
Si consideri un sistema cartesiano centrato sull'origine O del cerchio con asse x parallelo alla corda $\overrightarrow{AB}$ e asse y parallelo alla corda $\overrightarrow{CD}$. Per semplicitá, si consideri il cerchio di raggio unitario (v. figura).



Detti α e β gli angoli formati dai vettori $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ con la direzione positiva dell'asse x rispettivamente, si possono esprimere le coordinate cartesiane dei punti come segue:

$$\begin{array}{llll} A: & (-\cos\alpha, +\sin\alpha) & C: & (+\cos\beta, +\sin\beta) \\ B: & (+\cos\alpha, +\sin\alpha) & D: & (+\cos\beta, -\sin\beta) \end{array}$$

da cui segue: $P: \quad (+\cos\beta, +\sin\alpha)$. Pertanto, vale:

$$\overrightarrow{PA} = A - P = (-\cos\alpha - \cos\beta, 0) = (-\cos\alpha - \cos\beta)\,\hat{i}$$
$$\overrightarrow{PB} = B - P = (\cos\alpha - \cos\beta, 0) = (\cos\alpha - \cos\beta)\,\hat{i}$$
$$\overrightarrow{PC} = C - P = (0, \sin\beta - \sin\alpha) = (\sin\beta - \sin\alpha)\,\hat{j}$$
$$\overrightarrow{PD} = D - P = (0, -\sin\beta - \sin\alpha) = (-\sin\beta - \sin\alpha)\,\hat{j}$$

La risultante perció vale:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = -2\,\cos\beta\,\hat{i} - 2\,\sin\alpha\,\hat{j} = -2\,\overrightarrow{OP} = 2\,\overrightarrow{PO}.$$

C.V.D.