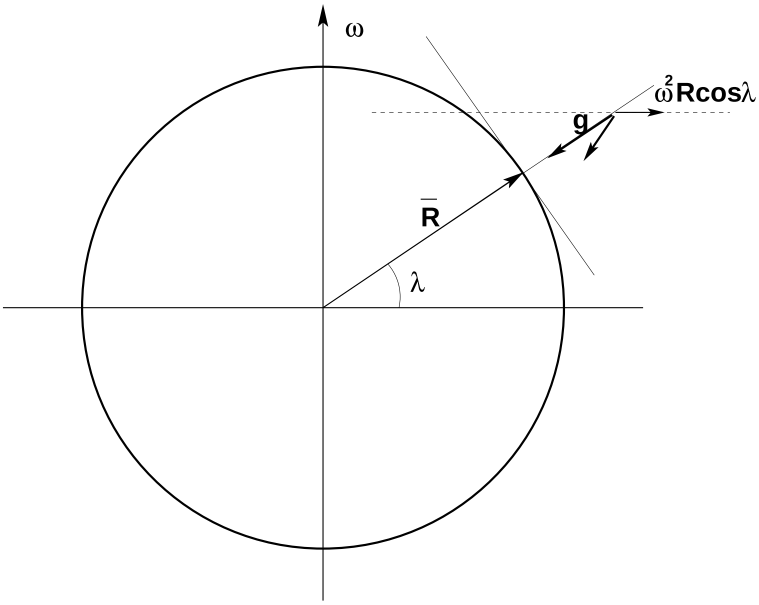
Problema 02

Alla stazione ferroviaria di Ferrara un passeggero é salito su un treno diretto verso il mare. Mentre il treno é fermo, per ingannare l'attesa il passeggero decide di misurare l'angolo che il filo a piombo forma con la direzione del raggio terrestre. A tal fine, si assuma la Terra una sfera di raggio $R = 6400$ *Km, l'accelerazione di gravitá* $g = 9.81$ *m/s*^{2} *e si assuma la latitudine di Ferrara pari a* $\lambda = +45^\circ$. *Tempo dopo, quando il treno procede con velocitá costante* $v_0 = 360$ *Km/h verso Est, il passeggero decide di ripetere l'esperimento. Quanto vale l'angolo misurato mentre é fermo? E quanto vale durante il viaggio? E se il treno viaggiasse con la stessa velocitá in modulo, ma diretto verso Ovest?*

Soluzione.



Siano $Oxyz$ e $O'x'y'z'$ due sistemi di riferimento rispettivamente solidale rispetto alle stelle fisse e solidale rispetto alla Terra, con le origini O e O' coincidenti con il centro della Terra. A treno fermo, il passeggero é in quiete rispetto al sistema $O'x'y'z'$. L'accelerazione di gravitá $\vec{g}$ é parallela al raggio vettore $\vec{R}$ della Terra in quel punto: $\vec{g} = -g\,\hat{R}$.
I vettori posizione $\vec{R}$ e $\vec{R}'$, relativi a $Oxyz$ e $O'x'y'z'$ rispettivamente, sono nel nostro caso uguali, essendo coincidenti le due origini O e O', quindi: $\vec{R} = \vec{R}'$. Detta $\vec{a} = \vec{g}$ l'accelerazione nel sistema $Oxyz$ e detta $\vec{a}'$ quella relativa al sistema di riferimento $O'x'y'z'$, vale la seguente:

$$\vec{g} = \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_S + \vec{a}_{CO} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}_S - \vec{a}_{CO}$$

$$\vec{a}_S = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{R}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') \; = \; \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$
$$\vec{a}_{CO} = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

La direzione del filo a piombo nel sistema $O'x'y'z'$ solidale al passeggero é quella individuata dall'accelerazione $\vec{a}'$:

$$\boxed{\vec{a}' = -g\,\hat{R} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) - 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'}$$

Si considerino i due versori normale e tangenziale alla superficie terrestre. In particolare, sia $\hat{u}_n = \hat{R}$ il versore normale e sia $\hat{u}_t$ il versore tangenziale e che punta verso il Sud del passeggero. Siano a'_n e a'_t le componenti di $\vec{a}'$ lungo i rispettivi versori.

1. Treno fermo ($\vec{v}' = 0$).

$$\vec{a}' = -g\,\hat{R} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_n = -g + \omega^2\, R\, \cos^2\lambda \\ a'_t = \omega^2\, R\, \cos\lambda\, \sin\lambda \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a'_n = -g + \frac{\omega^2\, R}{2}\,(\cos 2\,\lambda + 1) \\ a'_t = \frac{\omega^2\, R}{2}\,\sin 2\,\lambda \end{array} \right.$$

$$(\lambda = 45^\circ) \quad \left\{ \begin{array}{l} a'_n = -g + \frac{\omega^2\, R}{2} \\ a'_t = \frac{\omega^2\, R}{2} \end{array} \right.$$

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{2\,\pi}{86160\ \mathrm{s}} \simeq 7.29 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$$

Detto θ l'angolo formato dal filo con il raggio vettore $\vec{R}$, vale:

$$\theta = \arctan\left(\left|\frac{a'_t}{a'_n}\right|\right)$$

Poiché é: $|a'_t| \simeq 0.017\ \mathrm{m/s^2} \ll |a'_n| \simeq 9.81\ \mathrm{m/s^2}$
possiamo approssimare θ come segue:

$$\theta \simeq \left|\frac{a'_t}{a'_n}\right| = \frac{\omega^2\, R}{2\,g - \omega^2\, R} \simeq \frac{\omega^2\, R}{2\,g} \simeq 0^\circ 06'$$

2. Treno in moto verso Est ($v' = 360$ Km/h = 100 m/s).

$$\vec{a}' = -g\,\hat{R} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) - 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_n = -g + \frac{\omega^2\, R}{2}\,(\cos 2\,\lambda + 1) \; + \; 2\,\omega\, v'\, \cos\lambda \\ a'_t = \frac{\omega^2\, R}{2}\,\sin 2\,\lambda \; + \; 2\,\omega\, v'\, \sin\lambda \end{array} \right.$$

$$(\lambda = 45^\circ) \quad \left\{ \begin{array}{l} a'_n = -g + \frac{\omega^2\, R}{2} \; + \; \omega\, v'\, \sqrt{2} \\ a'_t = \frac{\omega^2\, R}{2} \; + \; \omega\, v'\, \sqrt{2} \end{array} \right.$$

Poiché é: $|a'_t| \simeq 0.027\ \mathrm{m/s^2} \ll |a'_n| \simeq 9.81\ \mathrm{m/s^2}$
possiamo approssimare θ come per il caso 1. :

$$\theta \simeq \left|\frac{a'_t}{a'_n}\right| = \frac{\omega^2\, R + 2\,\sqrt{2}\,\omega\, v'}{2\,g - \omega^2\, R - 2\,\sqrt{2}\,\omega\, v'} \simeq \frac{\omega^2\, R + 2\,\sqrt{2}\,\omega\, v'}{2\,g} \simeq 0^\circ\, 09'\, 35''$$

Ovvero, il filo a piombo si inclina un po' di piú verso Sud rispetto a quando il treno é fermo.

3. Treno in moto verso Ovest ($v' = 360$ Km/h = 100 m/s).

   In questo caso, é possibile sfruttare il risultato ottenuto al punto 2., semplicemente invertendo segno alla velocitá v', da cui segue:

$$\theta \simeq \left|\frac{a'_t}{a'_n}\right| = \frac{\omega^2 R - 2\sqrt{2}\,\omega\, v'}{2g - \omega^2 R + 2\sqrt{2}\,\omega\, v'} \simeq \frac{\omega^2 R - 2\sqrt{2}\,\omega\, v'}{2g} \simeq 0^\circ\, 02'\, 21''$$

   In questo caso il filo a piombo, pur restando inclinato verso il Sud, lo é di meno di quando il treno é fermo.

C.V.D.