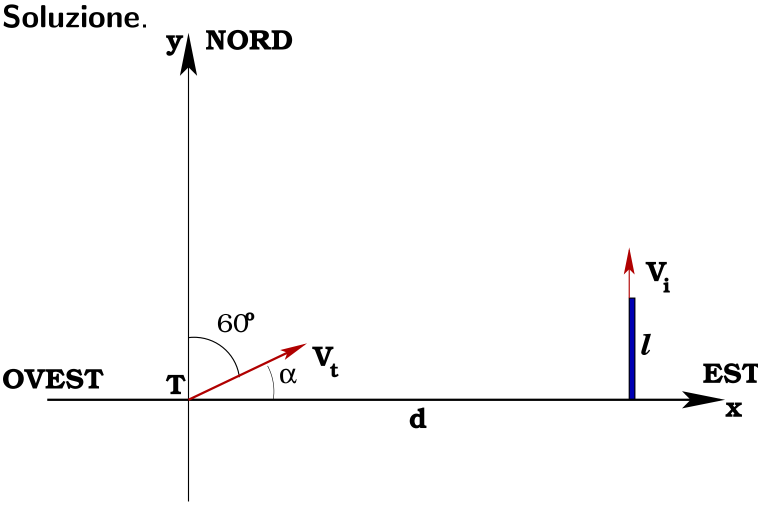
Problema 01

Nell'oceano un iceberg di lunghezza $l = 2$ Km e larghezza trascurabile, orientato secondo la direzione Sud-Nord, si sposta verso Nord di moto rettilineo uniforme con una velocitá costante $v_i = 10$ Km/h. A Ovest dell'iceberg il Titanic si muove di moto rettilineo uniforme con velocitá $v_0 = 27$ Km/h in direzione Nord-Est, in modo tale che la sua velocitá forma con la direzione del Nord un angolo di 60°. Al tempo $t = 0$ s, il Titanic si trova sullo stesso parallelo dell'estremo piú a Sud dell'iceberg e la sua distanza da questo é pari a $d = 10$ Km.

1. *Se si lascia procedere il Titanic di moto rettilineo uniforme, riuscirá ad evitare l'impatto con l'iceberg?*
2. *Supponendo che al tempo $t = 0$ s i motori del Titanic impartiscano un'accelerazione $\vec{a}$ costante diretta verso Nord, trovare il valore minimo di a per cui il Titanic riesce ad evitare l'impatto.*
3. *Se l'accelerazione costante é diretta verso Sud-Est e vale in modulo 35 Km/h^2, dire se avviene l'impatto.*

Esprimere i valori dell'accelerazione in Km/h^2 (si trascurino le dimensioni del Titanic).

Soluzione.



Nella figura sopra si considera un sistema di riferimento cartesiano Oxy fermo rispetto all'oceano, nella cui origine si trova il Titanic al tempo $t = 0$ s. L'asse x é un parallelo diretto verso Est, mentre l'asse y é un meridiano diretto verso Nord. Pertanto le coordinate degli estremi Nord e Sud dell'iceberg al tempo $t = 0$ s sono rispettivamente (d, l) e $(d, 0)$.

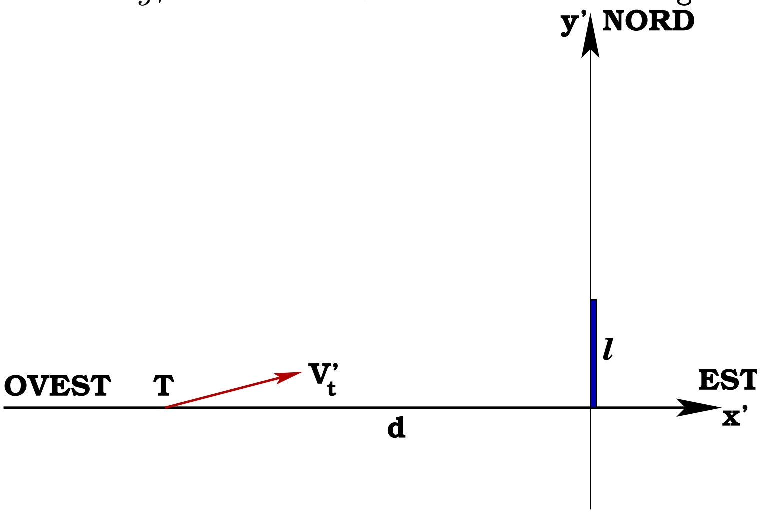
1. Siano $\vec{r}_t(t)$ e $\vec{r}_i(t)$ i vettori posizione rispettivamente del Titanic e dell'estremo Sud dell'iceberg al tempo t; analogamente, siano $\vec{v}_t(t)$ e $\vec{v}_i(t)$ le velocitá ad essi associate. Detto $\alpha = 30^\circ$ l'angolo che $\vec{v}_t(t)$ forma con la direzione positiva dell'asse x, vale:

$$\vec{v}_t(t) = \vec{v}_t = v_0 \cos\alpha\,\hat{i} + v_0 \sin\alpha\,\hat{j} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0\,\hat{i} + \frac{v_0}{2}\,\hat{j}$$
$$\vec{v}_i(t) = \vec{v}_i = v_i\,\hat{j}$$

$$\vec{r}_t(t) = \vec{v}_t\,t + \vec{r}_t(0) = \vec{v}_t\,t = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0\,t\,\hat{i} + \frac{v_0}{2}\,t\,\hat{j}$$

$\vec{r}_i(t) = \vec{v}_i\, t + \vec{r}_i(0) = d\,\hat{\imath} + v_i\, t\,\hat{\jmath}$

Si consideri un sistema di riferimento cartesiano $O'x'y'$ solidale all'iceberg e con assi x' e y' paralleli ai corrispondenti x e y, con l'estremo Sud coincidente con l'origine O'.



Si veda la seconda figura.
In generale, vale: $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_S$, dove $\vec{v}_S$ é la velocitá di trascinamento; nel nostro caso, $\vec{v}_S = \vec{v}_i$. Da ció segue:

$$\vec{v}\,'_t = \vec{v}_t - \vec{v}_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0\,\hat{\imath} + (\frac{v_0}{2} - v_i)\,\hat{\jmath}$$

Analogamente: $\vec{r}\,'_t(t) = \vec{r}_t(t) - \vec{r}_i(t) = (\frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0\, t - d)\,\hat{\imath} + (\frac{v_0}{2} - v_i)\, t\,\hat{\jmath}$.
Poiché la componente $(\frac{v_0}{2} - v_i)\, t$ é positiva per tempi positivi, bisogna verificare se il raggio vettore $\vec{r}\,'_t(t)$ incrocia a un certo tempo t il segmento fisso di estremi $(0,0)$ e $(0,l)$.
Detto t_C il tempo di eventuale collisione, deve valere: $x'_t(t_C) = 0$, dove si é inteso: $\vec{r}\,'_t(t) = x'_t(t)\,\hat{\imath} + y'_t(t)\,\hat{\jmath}$:

$$x'_t(t_C) = \frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0\, t_C - d = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_C = \frac{2\,d}{\sqrt{3}\, v_0}$$

Se la coordinata $y'_t(t_C)$ al tempo t_C é minore della lunghezza dell'iceberg l, allora si ha l'impatto; diversamente, il Titanic si salva:

$$y'_t(t_C) = (\frac{v_0}{2} - v_i)\, t_C = (\frac{v_0}{2} - v_i)\,\frac{2\,d}{\sqrt{3}\, v_0} = \frac{d}{\sqrt{3}}\,(1 - 2\,\frac{v_i}{v_0}) \simeq 1.5\ \mathrm{Km} < l$$

Pertanto, la risposta al punto 1. é che il Titanic impatta contro l'iceberg.

2. In questo caso si ha:

$$\vec{r}_t(t) = \frac{1}{2}\,\vec{a}\, t^2 + \vec{v}_t(0)\, t + \vec{r}_t(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0\, t\,\hat{\imath} + (\frac{1}{2}\, a\, t^2 + \frac{v_0}{2}\, t)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}\,'_t(t) = \vec{r}_t(t) - \vec{r}_i(t) = (\frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0\, t - d)\,\hat{\imath} + (\frac{1}{2}\, a\, t + \frac{v_0}{2} - v_i)\, t\,\hat{\jmath}$$

Come al punto 1., il tempo t_C dell'eventuale impatto vale: $t_C = \frac{2\,d}{\sqrt{3}\,v_0}$, da cui:

$$y_t'(t_C) = (\tfrac{1}{2}\,a\,t_C + \tfrac{v_0}{2} - v_i)\,t_C = (\tfrac{1}{2}\,a\,\frac{2\,d}{\sqrt{3}\,v_0} + \frac{v_0}{2} - v_i)\,\frac{2\,d}{\sqrt{3}\,v_0}$$

Imponendo: $y_t'(t_C) > l$, si ottiene la condizione su a:

$$a \;>\; \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{l\,v_0}{d} - \frac{v_0}{2} + v_i}{\frac{d}{\sqrt{3}\,v_0}} \;\simeq\; 5.5\ \mathrm{Km/h}^2$$

Per accelerazioni verso Nord maggiori del valore sopra trovato il Titanic riesce ad evitare l'impatto con l'iceberg passando a Nord di questo.

3. In questo caso l'accelerazione $\vec{a}$ é diretta verso Sud-Est, ovvero: $\vec{a} = a\,(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{\jmath})$. Quindi si ha:

$$\vec{r}_t(t) = \tfrac{1}{2}\,\vec{a}\,t^2 + \vec{v}_t(0)\,t + \vec{r}_t(0)$$
$$\vec{r}_t(t) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\,a\,t^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,v_0\,t)\,\hat{\imath} + (-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,a\,t^2 + \frac{v_0}{2}\,t)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_t'(t) = \vec{r}_t(t) - \vec{r}_i(t)$$
$$\vec{r}_t'(t) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\,a\,t^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,v_0\,t - d)\,\hat{\imath} + (-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,a\,t^2 + \frac{v_0}{2}\,t - v_i\,t)\,\hat{\jmath}$$

A questo punto é necessario ricalcolare il tempo di eventuale impatto t_C:

$$x_t'(t_C) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,a\,t_C^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,v_0\,t_C - d = 0$$

$$t_C = -\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{v_0}{a} + \sqrt{\frac{3\,v_0^2}{2\,a^2} + \frac{2\sqrt{2}\,d}{a}}$$

Da cui:

$$y_t'(t_C) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,a\,t_C^2 + (\frac{v_0}{2} - v_i)\,t_C$$

$$y_t'(t_C) = v_0\,(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{v_i}{v_0})\left(\sqrt{\frac{3\,v_0^2}{2\,a^2} + \frac{2\sqrt{2}\,d}{a}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{v_0}{a}\right) - d \simeq -0.34\ \mathrm{Km}$$

In tal caso il Titanic evita l'impatto passando a Sud dell'iceberg.

C.V.D.