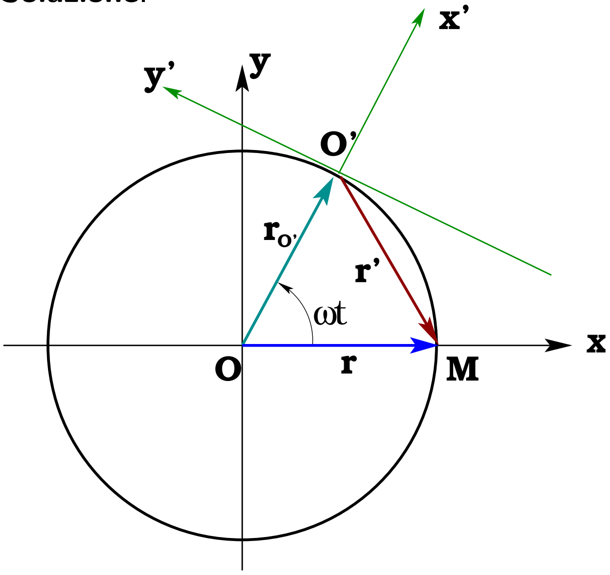
Problema 04

Una mamma accomoda il proprio bambino su una giostra circolare di raggio R che ruota attorno al suo centro. Quando é a regime, la giostra ruota attorno al proprio asse con velocitá angolare costante ω, con tutti i seggiolini posti sulla circonferenza. Mentre il bambino va in giostra, la mamma lo osserva immobile dal punto in cui il bambino é salito. Descrivere il moto della mamma nel sistema di riferimento di quiete del bambino.

Soluzione.



Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento cartesiano con origine O coincidente con il centro della giostra e in quiete rispetto al terreno. Sia M il punto in cui si trova la mamma, e si scelga l'asse x in modo tale che: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = R\,\hat{\imath}$. La posizione del bambino sia data dal punto O' e si consideri un sistema di riferimento cartesiano con origine O' solidale al bambino, in modo che gli assi x' e y' siano paralleli rispettivamente agli assi x e y al tempo $t = 0$ s in cui il bambino sale sulla giostra.
Siano $\vec{r}'$ e $\vec{v}'$ i vettori posizione e velocitá della mamma riferiti al sistema $O'x'y'z'$. Allora valgono le seguenti:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_{O'}$$
$$\vec{v}_{O'} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{O'} \qquad , \qquad \vec{a}_{O'} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{O'})$$
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_S \qquad , \qquad \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_S - \vec{a}_{CO}$$

dove: $\vec{v}_S = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{O'} + \vec{r}') = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (velocitá di trascinamento).

$\vec{v} = 0$ e $\vec{a} = 0$ in quanto la mamma é ferma rispetto al terreno, quindi:

$$\vec{v}' = -\vec{v}_S \qquad , \qquad \vec{a}' = -\vec{a}_S - \vec{a}_{CO}$$

$$\vec{a}_S = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_{O'} + \vec{r}')] =$$
$$= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad \text{(accelerazione di trascinamento)}$$

$\vec{a}_{CO} = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}' = -2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_S = -2\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ (accelerazione di Coriolis)

da cui, sostituendo nell'espressione di $\vec{a}'$, segue:

$$\vec{a}' = -(\vec{a}_S + \vec{a}_{CO}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \Big[\vec{\omega} \times \Big(\vec{r'} - (-\vec{r}_{O'})\Big)\Big]$$

In conclusione, il moto della mamma rispetto al sistema $O'x'y'z'$ puó riassumersi come segue:

$$\begin{cases} \vec{v}' = -\vec{\omega} \times \Big(\vec{r'} - (-\vec{r}_{O'})\Big) \\ \vec{a}' = -\vec{\omega} \times \Big[-\vec{\omega} \times \Big(\vec{r'} - (-\vec{r}_{O'})\Big)\Big] \end{cases}$$

L'interpretazione dell'espressione finale di $\vec{a}'$ é la seguente: nel sistema di quiete del bambino la mamma descrive un moto circolare uniforme, con velocitá angolare $-\vec{\omega}$, attorno al centro individuato dal vettore posizione $-\vec{r}_{O'} = -\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{O'O}$, come era naturale attendersi.
C.V.D.