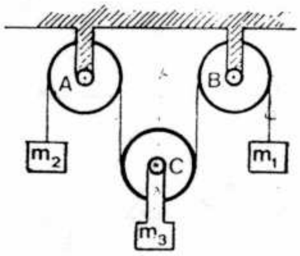
21

È dato il sistema indicato in figura in cui le pulegge A e B possono ruotare attorno ad assi fissi orizzontali, la puleggia C è mobile e i tratti di fune non a contatto delle pulegge sono disposti verticalmente.

Sapendo che è $m_2 = 6$ Kg ed $m_3 = 2$ Kg, si calcoli il valore che deve avere la massa $m_1$ affinché la massa $m_2$ si abbassi, a partire dalla quiete, di un tratto $h = 13{,}72$ m in un intervallo di tempo $\Delta t = 2$ sec.

Si trascurino le masse delle funi e delle pulegge e si supponga che gli attriti siano trascurabili.




I diagrammi del corpo libero per $m_1$, $m_2$, $m_3$ e la puleggia C sono quelli indicati in fig. 1.

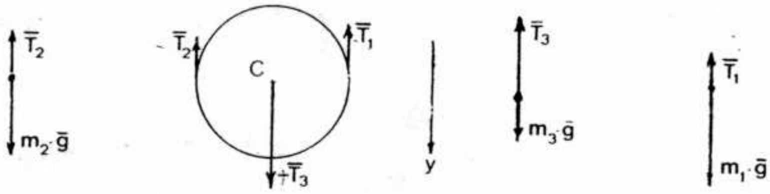



Fig. I

Con riferimento all'asse y indicato si ha, applicando la II legge della dinamica:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
m_1 \cdot g - T_1 &= m_1 \cdot a_1, \\
m_2 \cdot g - T_2 &= m_2 \cdot a_2, \\
m_3 \cdot g - T_3 &= m_3 \cdot a_3, \\
T_3 - T_1 - T_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Tenendo conto della natura e della geometria dei vincoli si ha poi:

$$x_3 = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

(2) $$T_1 = T_2,$$

$$dx_3 = \frac{dl_1 + dl_2}{2} = -\frac{dx_1 + dx_2}{2}$$

(3) $$a_3 = -(a_1 + a_2)/2;$$

$$a_3 = -\frac{a_1 + a_2}{2}$$

tenendo, inoltre, presente che le masse si muovono di moto naturalmente accelerato risulta:

(4) $$a_2 = 2 \cdot h/\Delta t^2.$$

Con le equazioni (2), (3) e (4) il sistema (1) si riduce, allora, al seguente:

$$
(1')\qquad
\begin{aligned}
m_1 \cdot g - T_2 &= m_1 \cdot a_1, \\
m_2 \cdot g - T_2 &= m_2 \cdot 2 \cdot h/\Delta t^2, \\
m_3 \cdot g - 2 \cdot T_2 &= -\, m_3 (a_1 + 2 \cdot h/\Delta t^2)/2
\end{aligned}
$$

che, risolto in $m_1$, dà:

$$m_1 = m_3 \cdot m_2 (g - 2 \cdot h/\Delta t^2)/[(3 \cdot m_3 - 4 \cdot m_2) \cdot g + (4 \cdot m_2 + m_3) \cdot 2 \cdot h/\Delta t^2] .$$

Con i dati numerici del problema si ottiene, quindi:

$$m_1 = 18 \text{ Kg} .$$

21)
$$
\begin{cases}
m_1 a_1 = m_1 g - T_1 \\
m_2 a_2 = m_2 g - T_2 \\
m_3 a_3 = m_3 g - T_3 \\
0 = T_3 - T_1 - T_2 \\
a_3 = -\dfrac{(a_1+a_2)}{2} \leftarrow \\
T_2 = T_1
\end{cases}
$$

$$-dx_3 = +\frac{dx_1}{2} + \frac{dx_2}{2}$$

$$v_3 = -\frac{v_1+v_2}{2} \rightarrow a_3 = -\frac{a_1+a_2}{2}$$

Sommo le prime 2 e sottraggo la 3ª membro a membro:

$$
\begin{cases}
m_1 a_1 + m_2 a_2 - m_3 a_3 = (m_1+m_2-m_3)\, g \\
m_1 a_1 - m_2 a_2 = (m_1 - m_2)\, g
\end{cases}
$$

← sottraggo la 1ª e la 2ª m. a m.

$$\Delta h = \frac{1}{2} a_2 (\Delta t)^2 \rightarrow a_2 = \frac{2\Delta h}{(\Delta t)^2} \quad \text{(moto)}$$

Sfrutto: $a_3 = -\dfrac{a_1+a_2}{2}$

$$
\begin{cases}
\left(m_1 + \dfrac{m_3}{2}\right) a_1 + \left(m_2 + \dfrac{m_3}{2}\right) a_2 = (m_1+m_2-m_3)\, g \\
a_1 = \dfrac{(m_1-m_2)g + m_2 a_2}{m_1}
\end{cases}
$$

$$\cancel{m_1 g} - m_2 g + m_2 a_2 + \frac{m_3}{2m_1}\left(m_1 g - m_2 g + m_2 a_2\right) + m_2 a_2 + \frac{m_3}{2} a_2 = \cancel{m_1 g} + m_2 g - m_3 g$$

$$-\frac{m_2 m_3}{2m_1}(g - a_2) = 2m_2 g - 2m_2 a_2 - \frac{3m_3}{2} g - \frac{m_3}{2} a_2$$

$$m_1 = m_2 m_3 (g - a_2) \cdot \frac{1}{(3m_3 - 4m_2)g + (m_3 + 4m_2)a_2}$$

$$m_1 = m_2 m_3 \left(g - \frac{2\Delta h}{(\Delta t)^2}\right) \frac{1}{(3m_3 - 4m_2)g + (m_3+4m_2)\dfrac{2\Delta l}{(\Delta t)^2}} = 18\ Kg$$

C.V.D.