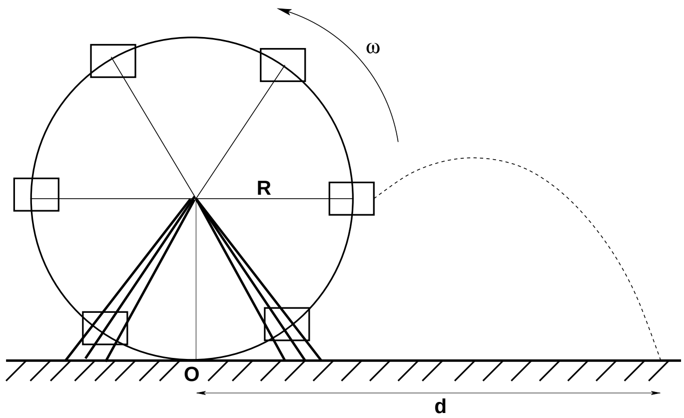
Problema 1

Una giostra circolare di raggio $R = 20$ m ruota attorno al proprio asse (orizzontale) con velocitá angolare costante ω e il suo periodo vale $T = 15$ s. Sulla circonferenza sono attaccate alcune cabine libere di ruotare attorno al proprio asse (orizzontale), in modo tale da mantenere il proprio pavimento sempre orizzontale. Su una di queste vi é un tizio di massa $m = 70$ Kg che sta sopra il piano di una bilancia (tipo dinamometro) e vi rimane, pressoché immobile, per tutto il giro della giostra. Sia W' la forza peso dell'uomo indicata dalla bilancia. Si chiede:

1. *il tizio é sottoposto a forza centrifuga? Se sí, dire quanto vale in modulo;*
2. *la forza peso W' segnata dalla bilancia dipende dalla posizione della cabina del tizio? Se sí, quanto vale W' nel punto piú basso del giro? E nel punto piú alto?*
3. *Supponendo che l'uomo lanci un sasso dalla cabina, quando il raggio di questa forma un angolo con la verticale di 90° mentre sta salendo, e sapendo che la velocitá relativa $\vec{v}_r$ ($v_r = 10$ m/s) del sasso rispetto al sistema solidale alla cabina é orizzontale (ovvero parallela al pavimento della cabina), in direzione opposta al centro della giostra, calcolare la velocitá v_0 del sasso rispetto al terreno al momento del lancio e la distanza d del punto di caduta in terra del sasso dal punto O in figura.*
4. FACOLTATIVO *Dire il valore minimo del coefficiente di attrito statico f_s del piano della bilancia.*

Si trascuri la resistenza dell'aria, si consideri la cabina puntiforme e si assuma $g = 9.81$ m/s^2. (suggerimento: si consideri il sistema di riferimento solidale alla cabina).



Soluzione.

1. Il sistema solidale alla cabina é ad orientamento costante, quindi non ruota rispetto al sistema fisso. Tale sistema é comunque non inerziale, in quanto la sua origine, solidale alla cabina, si muove di moto circolare uniforme e, pertanto, la sua accelerazione é non nulla. Poiché tale accelerazione é diretta sempre verso il centro della giostra e ha modulo pari a $\omega^2 R$, la forza apparente agente sull'uomo, $-m\,\vec{a}_{o'}$ é diretta in senso contrario, ovvero radialmente verso l'esterno, con modulo pari a $m\,\omega^2 R$.
   La cosa si puó anche vedere in un sistema di riferimento con origine nel centro della ruota, che ruota solidalmente con essa: si vede che l'unica forza apparente presente in questo sistema, nel quale il centro di massa di ogni cabina é fermo, é la forza

centrifuga (presente, quindi), di modulo $f_c = m\,\omega^2\,R$:

$$f_c = m\,\omega^2\,R = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \;\simeq\; 245.64\ \mathrm{N}$$

2. Detta N' la componente normale della reazione esercitata dalla bilancia sull'uomo, si ha:

$$N' - m\,g - m\,\omega^2\,R\,\cos\theta = m\,a'_n = 0$$

dove a'_n é la componente normale dell'accelerazione dell'uomo nel sistema solidale alla cabina, che é banalmente nulla, poiché l'uomo é fermo nella cabina; θ é l'angolo con la verticale descritto dal raggio-vettore della cabina con l'uomo.
La forza peso indicata dalla bilancia W' é semplicemente la componente normale che essa esercita sull'uomo, ovvero: $W' = N'$:

$$\boxed{W' = m\,(g + \omega^2\,R\,\cos\theta)}$$

Nel punto piú basso, si ha: $\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad W' = m\,(g + \omega^2\,R) \;\simeq\; 932\ \mathrm{N}$
Nel punto piú alto, si ha: $\theta = \pi \quad \Rightarrow \quad W' = m\,(g - \omega^2\,R) \;\simeq\; 441\ \mathrm{N}$

3. Dai moti relativi, si ha che, detta $\vec{v}_0$ la velocitá del sasso (in un sistema di riferimento fisso) al tempo $t = 0$ s in cui viene lanciato, detta $\vec{v}_c$ la velocitá della cabina in quel momento (verticale, diretta verso l'alto):
$\vec{v}_0 \;=\; \vec{v}_c + \vec{v}_r$

Scomponendo lungo un sistema fisso, con asse orizzontale x e asse verticale y (verso positivo verso l'alto) e con origine nella proiezione a terra del centro della giostra:

$$v_{0x} = v_r \qquad ; \qquad v0y = v_c = \omega\,R$$

Segue: $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{v_r^2 + \omega^2\,R^2} \;\simeq\; 13.05\ \mathrm{m/s}$

La posizione del sasso al tempo $t = 0$ s vale (R, R). Quindi la posizione del sasso al tempo t é descritta dalla seguente:

$$\begin{cases} x(t) = v_r\,t + R \\ y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + \omega\,R\,t + R \end{cases}$$

Detto t_c il tempo di caduta del sasso, vale: $d = x(t_c)$; per trovare t_c, impongo $y(t_c) = 0$:

$$-\frac{1}{2}\,g\,t_c^2 + \omega\,R\,t_c + R = 0 \quad \Rightarrow \quad t_c = \frac{\omega\,R \pm \sqrt{\omega^2\,R^2 + 2\,g\,R}}{g}$$

Per ragioni fisiche prendo solo la soluzione positiva per t_c, da cui segue:

$$d = v_r\, t_c + R = R + \frac{v_r}{g}\,(\omega\, R + \sqrt{\omega^2\, R^2 + 2\, g\, R}) \;\simeq\; 50.5 \text{ m}$$

4. FACOLTATIVO

Poiché l'uomo é fermo nella cabina, é necessario che la componente orizzontale della forza apparente sia bilanciata dalla forza d'attrito statico del piano della bilancia (per ragioni di simmetria, consideriamo solo angoli $0 < \theta < \pi$):

$$m\,\omega^2\, R\, \sin\theta \;<\; f_s\, N' \;=\; f_s\, m\,(g + \omega^2\, R\, \cos\theta) \quad \Rightarrow$$

$$f_s \;>\; \frac{\sin\theta}{\frac{g}{\omega^2\, R} + \cos\theta} \;=\; f(\theta)$$

Poiché deve valere per ogni θ, $(0 < \theta < \pi)$, deve valere per il massimo di tale funzione; per ottenere per quale θ_m si ha il massimo della funzione $f(\theta)$, annulliamo la derivata:

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{\frac{g}{\omega^2\, R}\,\cos\theta_m + 1}{\left(\frac{g}{\omega^2\, R} + \cos\theta_m\right)^2} \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_m = -\frac{\omega^2\, R}{g}$$

Da cui il massimo di $f(\theta)$ é dato da $f(\theta_m)$:

$$f(\theta_m) = \frac{\sin\theta_m}{\frac{g}{\omega^2\, R} + \cos\theta_m} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega^2\, R}{g}\right)^2}}{\frac{g}{\omega^2\, R} - \frac{\omega^2\, R}{g}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{g}{\omega^2\, R}\right)^2 - 1}}{\left(\frac{g}{\omega^2\, R}\right)^2 - 1}$$

$$f(\theta_m) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{g}{\omega^2\, R}\right)^2 - 1}} = -\cot\theta_m$$

$$\boxed{f_s \;>\; f(\theta_m) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{g}{\omega^2\, R}\right)^2 - 1}} \;\simeq\; 0.38}$$

C.V.D.