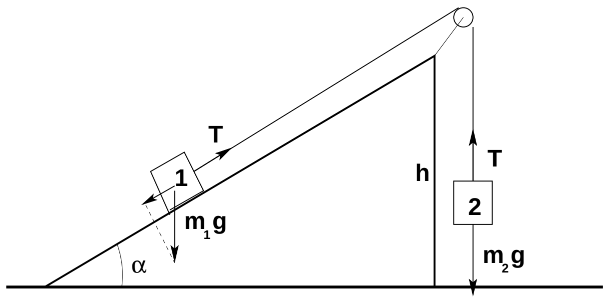
Problema 06

Due corpi 1 e 2 di massa rispettivamente $m_1 = 1$ Kg e $m_2 = 3$ Kg sono legati da una fune inestensibile, di massa nulla e di lunghezza $2\,h$, dove $h = 2$ m é l'altezza di un piano inclinato senza attrito con angolo $\alpha = 30^\circ$. Al tempo $t = 0$ s, il corpo 1 é alla base del piano inclinato, mentre il corpo 2 é alla sommitá, libero di precipitare. Si chiede: quanto tempo impiega il corpo 2 per giungere a terra? Il corpo 1 riesce ad arrivare fino alla sommitá del piano inclinato? In caso positivo, dire con quale velocitá si proietta nel vuoto.

Soluzione.



La fune esercita su ciascuno dei due corpi una tensione di modulo T per il fatto che ha massa nulla e per il terzo principio della dinamica. Per l'inestensibilitá della fune, i due corpi hanno la stessa velocitá e accelerazione lineare (fino a quando la fune é tesa, ossia fino a quando il corpo 2 é sospeso), che chiamiamo v e a rispettivamente. Possiamo quindi applicare il secondo principio della dinamica per entrambi i corpi come segue:

$$\begin{cases} m_1\,a = T - m_1\,g\,\sin\alpha \\ m_2\,a = m_2\,g - T \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_2 - m_1\,\sin\alpha}{m_1 + m_2}\,g = \frac{5}{8}\,g$$

ovvero il moto di entrambi é uniformemente accelerato, con accelerazione $a = \frac{5}{8}\,g$. Detta $z_2(t)$ l'altezza del corpo 2 al tempo t, il tempo di caduta t_C é pertanto dato dalla condizione: $z_2(t_C) = 0$:

$$z_2(t) = -\frac{1}{2}\,\frac{5}{8}\,g\,t_C^2 + h = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_C = 4\,\sqrt{\frac{h}{5\,g}} \simeq 0.81\ \mathrm{s}$$

Per ricavare la velocitá del corpo 1 al momento dell'impatto al suolo del corpo 2, si possono percorrere due strade: primo: poiché la velocitá in modulo é la stessa per entrambi, basta semplicemente valutare quella di 2 come segue:

$$v(t_C) = a\,t_C = \frac{5}{8}\,g\,4\,\sqrt{\frac{h}{5\,g}} = \sqrt{\frac{5}{4}\,g\,h}$$

Ora, dal momento in cui 2 tocca il suolo, la fune non é piú tesa, pertanto il corpo 1 é soggetto soltanto alla propria forza di gravitá e alla reazione normale del piano: indicando a' l'accelerazione di 1 lungo il piano inclinato dopo la caduta di 2, la prima equazione del sistema diviene:

$$m_1\,a' = -m_1\,g\,\sin\alpha = -\frac{1}{2}\,m_1\,g \quad \Rightarrow \quad a' = -\frac{1}{2}\,g$$

L'equazione del moto per tempi $t > t_C$ diviene:

$$s_1(t) = \frac{1}{2}\,a'\,(t - t_C)^2 + v(t_C)\,(t - t_C) + h = -\frac{1}{4}\,g\,(t - t_C)^2 + v(t_C)\,(t - t_C) + h$$

Se il corpo 1 arriva alla sommitá del piano, il suo spazio percorso $s_1(t)$ vale $h/\sin\alpha = 2\,h$. Vediamo se esiste un tempo t_m tale da soddisfare tale condizione:

$$-\frac{1}{4}\,g\,(t_m - t_C)^2 + \sqrt{\frac{5}{4}\,g\,h}\,(t_m - t_C) + h = 2\,h$$

$$t_m - t_C = \sqrt{\frac{h}{g}}\,(\sqrt{5} \pm 1) \quad \Rightarrow \quad t_m - t_C = \sqrt{\frac{h}{g}}\,(\sqrt{5} - 1)$$

Le soluzioni sono due poiché, se il piano inclinato si estendesse oltre la sommitá, il corpo 1 ripasserebbe per lo stesso punto durante la discesa. Quindi il tempo richiesto dal problema é quello minore.
Quindi la risposta é positiva, ovvero il corpo 1 raggiunge la sommitá del piano inclinato al tempo t_m con la seguente velocitá v_f:

$$v_f = v(t_C) + a'\,(t_m - t_C) = \sqrt{\frac{5}{4}\,g\,h} - \frac{1}{2}\,g\,\sqrt{\frac{h}{g}}\,(\sqrt{5} - 1) = \frac{\sqrt{g\,h}}{2} \simeq 2.21\ \mathrm{m/s}$$

In conclusione, il corpo 1 riesce a giungere alla sommitá del piano inclinato e con una velocitá pari a circa 2.21 m/s.
C.V.D.