Problema 1

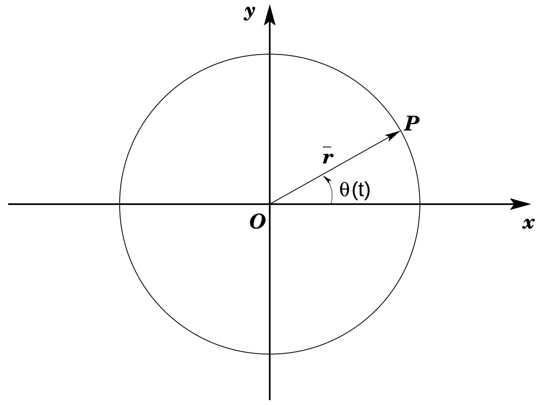
In un piano cartesiano Oxy un punto P si muove lungo una circonferenza con centro in O e raggio R. Sia $\vec{r}$ il vettore posizione di P; sia $\theta(t)$ (funzione del tempo t) l'angolo che il raggio vettore $\vec{r}$ forma con la direzione positiva dell'asse x (v. figura). Sapendo che vale la seguente:

$$\theta(t) \;=\; \omega_0\, t + \frac{\alpha}{2}\, t^2$$

(ω_0 e α costanti), si calcolino i seguenti:

1. *il vettore velocità $\vec{v}$. È costante in modulo? Com'è diretto?*
2. *il vettore accelerazione $\vec{a}$. È costante in modulo? Com'è diretto?*
3. *il momento angolare L (rispetto al polo O). Dire se si conserva e spiegare il perchè. Si indichi con m la massa del punto materiale P.*

(sugg.: si scrivano le coordinate cartesiane del vettore $\vec{r}$ in funzione del tempo t e poi. . .)



Soluzione.

1. Scriviamo il vettore $\vec{r} = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$:

$$\begin{cases} x(t) \;=R\,\cos\theta(t) \;=\; R\,\cos\left(\omega_0\, t + \frac{\alpha}{2}\, t^2\right) \\ y(t) \;=\; R\,\sin\theta(t) \;=\; R\,\sin\left(\omega_0\, t + \frac{\alpha}{2}\, t^2\right) \end{cases}$$

Derivando le singole componenti, otteniamo il vettore velocità $\vec{v} = \dot{x}(t)\,\hat{\imath} + \dot{y}(t)\,\hat{\jmath}$:

$$\begin{cases} v_x(t) = \dot{x}(t) \;= -R\,(\omega_0 + \alpha\, t)\,\sin\left(\omega_0\, t + \frac{\alpha}{2}\, t^2\right) \\ v_y(t) = \dot{y}(t) \;=\; R\,(\omega_0 + \alpha\, t)\,\cos\left(\omega_0\, t + \frac{\alpha}{2}\, t^2\right) \end{cases}$$

Il modulo <u>non</u> è costante nel tempo: $v \;=\; \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \;=\; R\,(\omega_0 + \alpha\, t)$

Il vettore $\vec{v}$ è ovviamente tangente all'orbita (in generale): nel nostro caso, significa che è normale al vettore posizione $\vec{r}$ e diretto nel verso crescente di $\theta(t)$.

2. Per ricavare il vettore accelerazione $\vec{a}$, deriviamo il vettore $\vec{v}$:

$$\begin{cases} a_x(t) = \ddot{x}(t) \;= -R\,(\omega_0 + \alpha\, t)^2\,\cos\left(\omega_0\, t + \frac{\alpha}{2}\, t^2\right) - R\,\alpha\,\sin\left(\omega_0\, t + \frac{\alpha}{2}\, t^2\right) \\ a_y(t) = \ddot{y}(t) \;=\; -R\,(\omega_0 + \alpha\, t)^2\,\sin\left(\omega_0\, t + \frac{\alpha}{2}\, t^2\right) + R\,\alpha\,\cos\left(\omega_0\, t + \frac{\alpha}{2}\, t^2\right) \end{cases}$$

Scriviamo $\vec{a}$:

$$\vec{a} \;=\; a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} \;=\; -R\,(\omega_0 + \alpha\,t)^2\,\hat{r} + \alpha\,R\,\hat{\theta}$$

dove con $\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$, si è indicato il versore tangente (o trasverso) alla circonferenza: infatti, si nota che il vettore velocità, parallelo ad esso, è scrivibile come $\vec{v} = R\,(\omega_0 + \alpha\,t)\,\hat{\theta}$.

Dall'espressione ottenuta per $\vec{a}$ distinguiamo le due componenti tra loro normali: quella radiale, $-R\,(\omega_0 + \alpha\,t)^2$ e quella trasversa, $\alpha\,R$. Mentre quest'ultima è costante nel tempo, la prima non lo è: quindi, neppure il modulo di $\vec{a}$ è costante.

3. Poichè il moto avviene sul piano Oxy il momento angolare è normale a tale piano e diretto verso l'alto. Sfruttiamo la definizione di $\vec{L}$, tenendo presente che i vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$ sono ortogonali:

$$\vec{L} \;=\; m\,\vec{r}\times\vec{v} \quad\rightarrow\quad L \;=\; m\,R\,v = m\,R^2\,(\omega_0 + \alpha\,t)$$

Il momento angolare varia col tempo t, quindi non si conserva. Ciò si può vedere anche dal fatto che il moto non è centrale, in quanto l'accelerazione di P ha componente trasversa non nulla e quindi il momento delle forze non è nullo.

C.V.D.