Problema 2

Su un piano orizzontale π una sbarra di massa trascurabile ruota con velocitá angolare costante $\vec{\omega}$ diretta verticalmente verso l'alto e normale al piano attorno a un punto fisso O del piano. Lungo tale sbarra é vincolato a muoversi un punto materiale P di massa m il quale é legato con un filo inestensibile di lunghezza l e di massa trascurabile ad un altro punto materiale Q di massa $3\,m$, sospeso sotto il piano π lungo la verticale del punto O. Il filo é libero di scorrere senza attrito attraverso un buchino nel punto O. Sia $x(t)$ la distanza di P da O in funzione del tempo t. Si determini l'equazione del moto di P applicando la seconda legge della dinamica ai punti P e Q. Sapendo che il moto di P é descritto, in generale, dalla seguente:

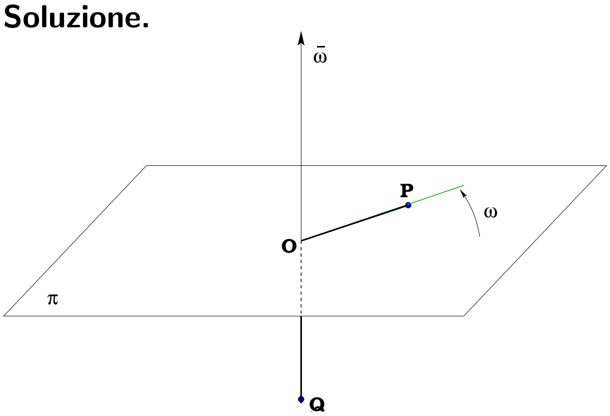
$$x(t) = c_1\, e^{\omega\, t/2} + c_2\, e^{-\omega\, t/2} + c_3$$

si determinino i tre parametri costanti c_1, c_2, c_3 in modo tale che siano soddisfatte le tre seguenti condizioni:

1. *la $x(t)$ soddisfi l'equazione del moto;*
2. *$x(0) = x_0$;*
3. *la velocitá lungo la sbarra di P al tempo $t = 0$ s sia nulla.*

Infine, si dica se ed eventualmente per quale valore della costante x_0 il punto P rimane fermo rispetto alla sbarra. (Suggerimento: si consideri il sistema di riferimento solidale alla sbarra e con origine in O).

Soluzione.



Sia $m\,\vec{a}'$ la forza risultante agente su P nel sistema solidale alla sbarra:

$$m\,\vec{a}' = \vec{T} - m\,\vec{a}_s - m\,\vec{a}_{co}$$

dove $\vec{T}$ é la tensione che il filo esercita su P. Nel nostro caso, vale:

$$m\,\vec{a}' = \vec{T} - m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Poiché il punto é vincolato a muoversi lungo la sbarra, il termine $\vec{\omega} \times \vec{v}'$ é normale alla sbarra, pertanto la sua componente lungo la sbarra é nulla. Proiettando lungo la direzione della sbarra per P e lungo la verticale per Q, si ottengono le seguenti (per comoditá, sia a' la proiezione di $\vec{a}'$ sulla sbarra, a_Q l'accelerazione di Q e T il modulo della tensione che il filo esercita su ciascuno dei punti):

$$\begin{cases} m\,a' &= -T + m\,\omega^2\,x \\ 3\,m\,a_Q &= T - 3\,m\,g \end{cases}$$

Dall'inestensibilitá del filo, segue: $a_Q = a'$, da cui, sommando membro a membro:

$$4\, m\, a' = 4\, m\, \ddot{x} = m\, \omega^2\, x - 3\, m\, g$$

Da cui l'equazione del moto di P é la seguente: $\boxed{a' = \ddot{x} = \frac{\omega^2}{4}\, x - \frac{3}{4}\, g}$

Dall'espressione di $x(t)$, seguono:

$$v'(t) = \dot{x}(t) = \frac{\omega}{2}\, (c_1\, e^{\omega\, t/2} - c_2\, e^{-\omega\, t/2})$$

$$a'(t) = \ddot{x}(t) = \frac{\omega^2}{4}\, (c_1\, e^{\omega\, t/2} + c_2\, e^{-\omega\, t/2})$$

Dalla prima condizione, segue che $a'(t)$ deve soddisfare l'equazione del moto:

$$\frac{\omega^2}{4}\, (c_1\, e^{\omega\, t/2} + c_2\, e^{-\omega\, t/2}) = \frac{\omega^2}{4}\, (c_1\, e^{\omega\, t/2} + c_2\, e^{-\omega\, t/2} + c_3) - \frac{3}{4}\, g$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{c_3 = \frac{3\, g}{\omega^2}}$$

Dalle altre due condizioni si ha:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v'(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{3\, g}{\omega^2} = x_0 \\ \frac{\omega}{2}\, (c_1 - c_2) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_1 = c_2 = \frac{\omega^2\, x_0 - 3\, g}{2\, \omega^2}}$$

Infine, si vede che imponendo un'unica condizione: $c_1 = c_2 = 0$, la $x(t)$ diventa una costante nel tempo:

$$c_1 = c_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x_0 = \frac{3\, g}{\omega^2}}$$

C.V.D.