P22

Con riferimento allo schema di figura, il corpo B può scorrere sul piano orizzontale π e la superficie di B, sulla quale A è libero di scorrere, è piana ed inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale.

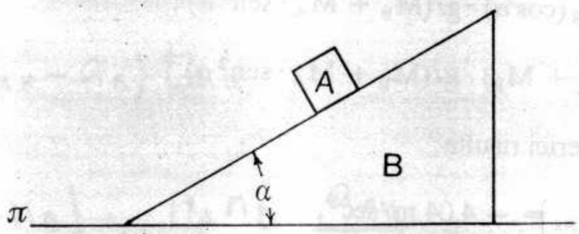
Supponendo trascurabili gli attriti si determinino:

a) le accelerazioni di A e di B,

b) la reazione vincolare esercitata da B su A e quella esercitata dal piano π su B.

Si risolva il problema per i seguenti dati numerici:

$$M_A = 1\,\text{Kg}, \qquad M_B = 5\,\text{Kg}, \qquad \alpha = 30^\circ.$$



Per un osservatore solidale col piano π i diagrammi del corpo libero di A e B sono quelli indicati in fig. 1, dove $\overline{N}$ è la reazione esercitata da B su A ed $\overline{R}$ è quella esercitata dal piano π su B.

Con riferimento al sistema di assi x, y indicato si ha:

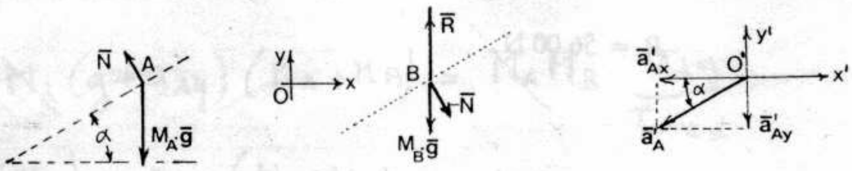


Fig. 1

$$(1) \qquad \begin{aligned} -N \cdot \operatorname{sen}\alpha &= M_A \cdot a_{Ax} \\ N \cdot \cos\alpha - M_A \cdot g &= M_A \cdot a_{Ay} \end{aligned}$$

per A;

$$(2) \qquad \begin{aligned} N \cdot \operatorname{sen}\alpha &= M_B \cdot a_B \\ -N \cdot \cos\alpha - M_B \cdot g + R &= 0 \end{aligned}$$

per B.

Si osservi poi che, se si indicano con a'_{Ax} ed a'_{Ay} le componenti dell'accelerazione di A sugli assi del sistema di riferimento x', y' solidale con B, si hanno le relazioni:

$$a_{Ax} = a_B + a'_{Ax}$$

e

$$a_{Ay} = a'_{Ay}$$

dalle quali, essendo $a'_{Ay}/a'_{Ax} = \operatorname{tg}\alpha$, si ottiene:

$$(3) \qquad a_{Ay} = (a_{Ax} - a_B) \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Ora, risolvendo il sistema costituito dalle (1), (2) e (3), si ottiene:

$$a_{Ax} = -M_B(\text{sen } 2\alpha) \cdot g/2 \cdot (M_B + M_A \cdot \text{sen}^2 \alpha),$$

$$a_{Ay} = -(M_A + M_B)(\text{sen}^2 \alpha) \cdot g/(M_B + M_A \cdot \text{sen}^2 \alpha),$$

$$a_B = M_A(\text{sen } 2\alpha) \cdot g/2 \cdot (M_B + M_A \cdot \text{sen}^2 \alpha),$$

$$N = M_A \cdot M_B(\cos \alpha) \cdot g/(M_B + M_A \cdot \text{sen}^2 \alpha),$$

$$R = M_B(M_A + M_B) \cdot g/(M_B + M_A \cdot \text{sen}^2 \alpha).$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$a_{Ax} = -4{,}04 \text{ m/sec}^2,$$

$$a_{Ay} = -2{,}80 \text{ m/sec}^2,$$

$$a_B = 0{,}81 \text{ m/sec}^2,$$

$$N = 8{,}08 \text{ N},$$

$$R = 56{,}00 \text{ N}.$$

$$
\begin{cases}
N\cos\alpha - M_A g = M_A a_{Ay} \\
-N\sin\alpha = M_A a_{Ax} & M_B \\
R - M_B g - N\cos\alpha = 0 \\
N\sin\alpha = M_B a_B & -M_A
\end{cases}
$$

$$
\left.\begin{aligned} & M_A a_{Ax} + M_B a_B = 0 \\ & M_A a_{Ay} = -(M_A+M_B)g + R \end{aligned}\right.
$$

$\uparrow$ conservazione q. di moto

$$a_{Ay} = (a_{Ax} - a_B)\tan\alpha$$

$$-N\sin\alpha\,(M_A+M_B) = M_A M_B \frac{a_{Ay}}{\tan\alpha}$$

dalla 1ª: $N = \dfrac{M_A(g + a_{Ay})}{\cos\alpha}$

$$-\tan\alpha\, \cancel{M_A}(g + a_{Ay})(M_A+M_B) = \cancel{M_A} M_B \frac{a_{Ay}}{\tan\alpha}$$

$$-g(M_A+M_B) - a_{Ay}(M_A+M_B) = \frac{M_B a_{Ay}}{\tan^2\alpha}$$

$$a_{Ay}\left(\frac{M_B}{\tan^2\alpha} + M_A + M_B\right) = -g(M_A+M_B)$$

$$a_{Ay}\left(\frac{M_B}{\sin^2\alpha} + M_A\right) = -(M_A+M_B)g$$

$$\boxed{a_{Ay} = -\frac{(M_A+M_B)\sin^2\alpha}{M_B + M_A\sin^2\alpha}\, g}$$

$\rightarrow$ N dalla 1ª

$\rightarrow$ a_B dalla 4ª