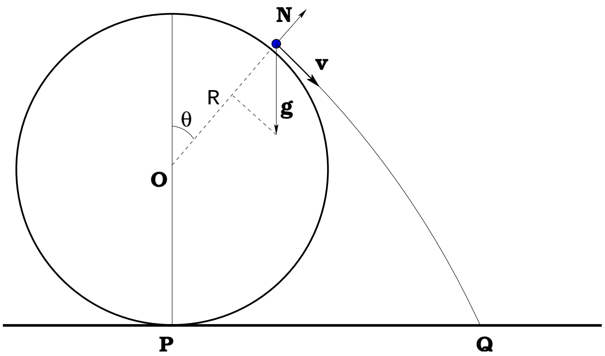
Problema 05

Si consideri una sfera di raggio R ferma su un piano orizzontale e un punto materiale posto sulla sua sommitá e avente velocitá nulla. Se il punto materiale, in seguito a una piccolissima perturbazione, inizia a cadere, si chiede di determinare il punto in cui si stacca dalla superficie della sfera e si determini la distanza del punto di caduta sul piano dalla proiezione del centro della sfera sul piano stesso.

Soluzione.



Siano P la proiezione del centro della sfera sul piano e Q il punto di caduta, come indicato nella figura. Detto θ_d l'angolo di distacco del punto dalla superficie della sfera, si ha che la velocitá in quel punto é ottenibile dalla conservazione dell'energia:

$$m\,g\,R\,(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = 2\,g\,R\,(1-\cos\theta)$$

Detta $\vec{N}$ la reazione normale alla superficie nel punto di tangenza che la sfera oppone alla gravitá del punto materiale, si ha che il distacco avviene quando tale reazione é nulla. Fino al distacco, il punto materiale descrive un arco di cerchio e quindi in ogni punto la forza risultante proiettata lungo il raggio ($m\,a_r$, ovvero normalmente alla traiettoria) vale:

$$m\,a_r = N - m\,g\,\cos\theta = -m\,\frac{v^2}{R} = -m\,2\,g\,(1-\cos\theta)$$

Pertanto quando $\theta = \theta_d$ si ha $N = 0$:

$$g\,\cos\theta_d = 2\,g\,(1-\cos\theta_d) \qquad \Rightarrow \qquad \theta_d = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 48.2^\circ$$

Dal momento in cui il punto si stacca, il moto diviene parabolico: a tal fine, consideriamo un sistema cartesiano Oxy con origine O coincidente col punto P, asse x orizzontale nel verso del moto del punto che cade e con asse y verticale. Sia v_d la velocitá del punto al momento del distacco. Le coordinate $x(t)$ e $y(t)$ del punto materiale in funzione del tempo t sono (il tempo $t = 0$ corrisponde al momento del distacco):

$$\sin\theta_d = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad : \quad v_d\,\cos\theta_d = \sqrt{\frac{8}{27}\,g\,R} \quad : \quad v_d\,\sin\theta_d = \sqrt{\frac{10}{27}\,g\,R}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_d\,\cos\theta_d\,t + R\,\sin\theta_d \\ y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 - v_d\,\sin\theta_d\,t + R\,(1+\cos\theta_d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{\frac{8}{27}\,g\,R}\,t + R\,\frac{\sqrt{5}}{3} \\ y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 - \sqrt{\frac{10}{27}\,g\,R}\,t + \frac{5}{3}\,R \end{cases}$$

Ottengo il tempo di caduta t_C imponendo $y(t_C) = 0$:

$$t_c^2 + 2\,\sqrt{\frac{10}{27}\,\frac{R}{g}}\,t_C - \frac{10}{3}\,\frac{R}{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_C = \frac{10}{3}\,(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{30}})\,\sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$x(t_C) = \sqrt{\frac{8}{27}\,g\,R}\,\frac{10}{3}\,(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{30}})\,\sqrt{\frac{R}{g}} + R\,\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{5\,\sqrt{5}+20\,\sqrt{2}}{27}\,R$$

In conclusione:

$$|\overrightarrow{PQ}| \;=\; \frac{5\,\sqrt{5}+20\,\sqrt{2}}{27}\,R \;\simeq\; 1.46\,R$$

C.V.D.