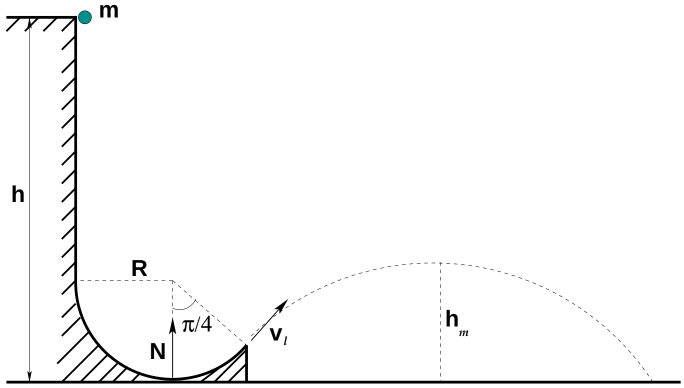
Problema 1

Una pallina di massa $m = 700$ g e di dimensioni trascurabili viene fatta cadere, da ferma, da un'altezza $h = 5R$. Cadendo, finisce dentro una guida circolare di raggio $R = 2$ m priva di attrito. La guida circolare s'interrompe ad un angolo pari a $\pi/4$ rad rispetto alla verticale: quando la pallina, risalendo, raggiunge il termine della guida, che funge da trampolino, viene proiettata in aria. Si chiede di calcolare i seguenti:

1. *la reazione normale N che la guida circolare esercita sulla pallina, quando questa si trova nel punto piú basso della traiettoria;*
2. *la velocitá di lancio v_l che la pallina ha quando si stacca dalla guida, sul trampolino;*
3. *l'altezza massima h_m che la pallina raggiunge dopo aver abbandonato la guida.*

Si trascuri ogni attrito e si consideri la pallina un punto materiale. (Usare $g = 9.81$ m/s^2).



Soluzione.

Sia v la velocitá che la pallina ha quando si trova nel punto piú basso della traiettoria, nell'estremo inferiore del cerchio. Applichiamo la conservazione dell'energia:

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{10\,g\,R}$$

1. Applichiamo la seconda legge della dinamica alla pallina, prendendo come direzione positiva quella verso l'alto; a tal fine, si sfrutta il fatto che la pallina, percorrendo un arco di cerchio, ha un'accelerazione a che é legata alla velocitá v dalla seguente: $a = v^2/R$, da cui segue:

$$N - m\,g = m\,a = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = m\,g + m\frac{v^2}{R} = 11\,m\,g \;\simeq\; 75.54\ \mathrm{N}}$$

2. Quando la pallina giunge al termine della guida, ovvero sul trampolino, la sua altezza vale: $R\,(1 - \cos\frac{\pi}{4}) = R\,(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$. Applichiamo la conservazione dell'energia tra l'inizio e il lancio dal trampolino:

$$m\,g\,5\,R = \frac{1}{2}\,m\,v_l^2 + m\,g\,R\,(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$v_l^2 = 10\,g\,R - g\,R\,(2 - \sqrt{2}) = (8 + \sqrt{2})\,g\,R$$

$$v_l^2 = (8+\sqrt{2})\, g\, R \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_l = \sqrt{(8+\sqrt{2})\, g\, R} \;\simeq\; 13.6 \text{ m/s}}$$

3. Detta v_{lx} la componente orizzontale della velocitá che ha la pallina ha sul trampolino, di modulo v_l, si ha:

   $$v_{lx} = v_l \cos\tfrac{\pi}{4} = \frac{v_l}{\sqrt{2}}$$

   Durante il volo dopo aver lasciato il trampolino, di traiettoria parabolica, si ha che quando raggiunge l'altezza massima h_m, la componente verticale della velocitá si annulla; essendo la componente orizzontale, v_{lx}, costante, si ha che la velocitá v_m coincide con v_{lx}. Applichiamo la conservazione dell'energia:

   $$m\, g\, 5\, R \;=\; m\, g\, h_m + \tfrac{1}{2}\, m\, v_{lx}^2 \;=\; m\, g\, h_m + \tfrac{1}{4}\, m\, v_l^2$$

   $$h_m \;=\; 5\, R - \frac{1}{4}\,\frac{v_l^2}{g} \;=\; 5\, R - \frac{8+\sqrt{2}}{4}\, R = \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) R$$

   $$\boxed{h_m \;=\; \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) R \;\simeq\; 5.3 \text{ m}}$$

C.V.D.