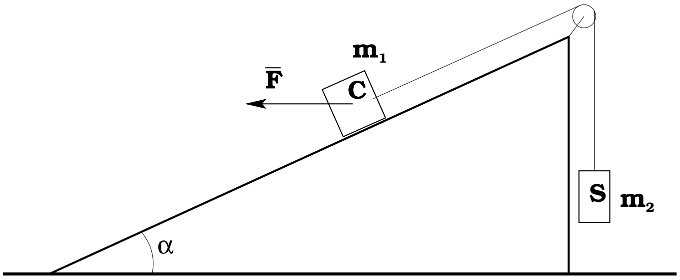
Problema 3

Sul piano inclinato ($\alpha = 30^{\circ}$) mostrato in figura é dato un contrappeso C di massa $m_1 = 2$ Kg legato con una fune di massa trascurabile a un secchio S colmo di massa $m_2 = 3$ Kg. Al contrappeso C si applica una forza $\vec{F}$ orizzontale costante, diretta dall'altra parte rispetto al secchio S (v. figura). Tale forza $\vec{F}$ é tale che il secchio S viene sollevato con un'accelerazione costante a. Si determini il valore massimo dell'accelerazione a a condizione che il contrappeso C non si stacchi dal piano inclinato e dire, in tal caso, quanto vale il modulo di $\vec{F}$. (Si trascurino gli attriti e si assuma $g = 9.81$ m/s^2).



Soluzione.
Sia T il modulo della tensione che la fune esercita sia sul contrappeso che sul secchio (per via della massa trascurabile della fune) e che questi a loro volta esercitano su di essa. Sia N il modulo della reazione normale che il piano inclinato esercita sul contrappeso e viceversa. Dal diagramma di corpo libero del secchio, prendendo come direzione positiva quella verticale verso l'alto, si ha:

$$m_2\, a = T - m_2\, g$$

Dal diagramma di corpo libero del contrappeso C, conviene scomporre l'accelerazione del contrappeso a_C lungo le componenti parallela a_{Cp} e normale a_{Cn} al piano inclinato: prendendo come versi positivi quelli verso l'alto, si ha:

$$\begin{cases} m_1\, a_{Cp} = T - m_1\, g\, \sin\alpha - F\, \cos\alpha \\ m_1\, a_{Cn} = F\, \sin\alpha - m_1\, g\, \cos\alpha + N \end{cases}$$

Dall'inestensibilitá della fune segue che: $a_{Cp} = -a$, da cui:

$$\begin{cases} m_2\, a = T - m_2\, g \\ m_1\, a = -T + m_1\, g\, \sin\alpha + F\, \cos\alpha \\ m_1\, a_{Cn} = F\, \sin\alpha - m_1\, g\, \cos\alpha + N \end{cases}$$

Sommando membro a membro le prime due equazioni, esprimiamo F e sostituiamo nella terza:

$$\begin{cases} F = \frac{(m_1+m_2)\, a\, +\, (m_2-m_1\, \sin\alpha)\, g}{\cos\alpha} \\ m_1\, a_{Cn} = \frac{(m_1+m_2)\, a\, \sin\alpha\, +\, (m_2-m_1\, \sin\alpha)\, g\, \sin\alpha}{\cos\alpha} - m_1\, g\, \cos\alpha + N \end{cases}$$

$$m_1\, a_{Cn} = \frac{(m_1 + m_2)\, a\, \sin\alpha\ +\ (m_2\, \sin\alpha - m_1)\, g}{\cos\alpha} + N$$

Quando il contrappeso si stacca, si ha: $a_{Cn} > 0$. Staccandosi, la reazione normale N si annulla, pertanto la condizione di distacco diviene:

$$(m_1 + m_2)\, a\, \sin\alpha \;+\; (m_2\, \sin\alpha - m_1)\, g \;>\; 0$$

$$a \;>\; \frac{m_1 - m_2\, \sin\alpha}{(m_1 + m_2)\, \sin\alpha}\, g$$

Poiché si chiede la massima accelerazione consentita affinché il contrappeso <u>non</u> si stacchi, segue:

$$\boxed{a \;<\; a_{max} \;=\; \frac{m_1 - m_2\, \sin\alpha}{(m_1 + m_2)\, \sin\alpha}\, g \;=\; \frac{1}{5}\, g \;\simeq\; 1.96\ \mathrm{m/s}^2}$$

Il valore corrispondente di F quando $a = \frac{1}{5}\, g$ vale:

$$\boxed{F \;=\; \frac{(m_1 + m_2)\, a \;+\; (m_2 - m_1\, \sin\alpha)\, g}{\cos\alpha} \;=\; 2\sqrt{3}\ \mathrm{Kg}\ g \;\simeq\; 34\ \mathrm{N}}$$

C.V.D.