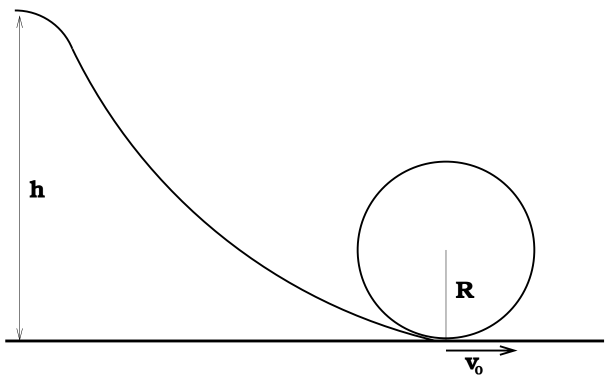
Problema 04

Alcuni ingegneri alle prese con le montagne russe devono costruire un tratto noto come il giro della morte, schematizzabile come un cerchio di raggio R appoggiato sul terreno (v. figura). Trascurando l'attrito delle rotaie, detta v_0 la velocitá che il treno ha quando si trova alla base del semicerchio, si calcoli la v_0 minima affinché il treno non si stacchi dalle rotaie quando é in cima al giro della morte. Supponendo poi che il treno, prima di tale giro, scenda da un'altezza h con velocitá iniziale nulla, si dica il valore minimo di h per un corretto giro della morte (si trascurino tutti gli attriti).

Soluzione.



Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica tra quando il treno si trova alla base del cerchio e quando si trova in cima: siano m la massa del treno e v_1 velocitá di questo quando si trova in cima:

$$\frac{1}{2}\, m\, v_0^2 = m\, g\, 2\, R + \frac{1}{2}\, m\, v_1^2$$

La condizione che il treno in cima non si stacchi dalle rotaie é che il modulo della reazione normale che le rotaie esercitano sul treno sia maggiore di zero: prendendo come verso positivo quello verso il basso, scriviamo la seconda legge della dinamica (a_1 é l'accelerazione del treno quando é in cima):

$$m\, g + N = m\, a_1 = m\, \frac{v_1^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N = m\, (\frac{v_1^2}{R} - g) > 0 \quad \Rightarrow \quad v_1^2 > g\, R$$

$$\frac{1}{2}\, v_0^2 = 2\, g\, R + \frac{1}{2}\, v_1^2 > 2\, g\, R + \frac{1}{2}\, g\, R \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 > v_{min} = \sqrt{5\, g\, R}}$$

L'altezza h_{min} deve essere tale che l'energia potenziale associata sia maggiore dell'energia cinetica minima del treno alla base del cerchio:

$$m\, g\, h_{min} = \frac{1}{2}\, m\, v_{min}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_{min} = \frac{5}{2}\, R}$$

C.V.D.