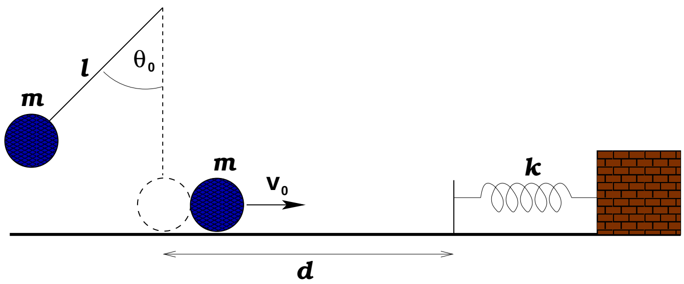
Problema 02

É dato un sistema costituito da un pendolo di lunghezza l con una sferetta di massa m, un'altra sferetta uguale di massa m libera di traslare sul piano e una molla con costante elastica k (v. figura). Inizialmente, si lascia cadere la sferetta del pendolo da un angolo iniziale θ_0 con la verticale. Quando questa raggiunge la posizione verticale, si ferma, trasferendo tutta la sua energia cinetica alla seconda sferetta, fino a quel momento ferma. Questa, a sua volta libera di muoversi senza attrito sul piano, percorre una distanza d, dopo la quale viene frenata dalla molla. Si supponga che la sferetta rimanga in contatto con la molla fintanto che questa viene compressa. Si chiedono le seguenti:

1. *Di quanto viene compressa la molla?*
2. *Quanto vale la forza media esercitata dalla molla sulla sferetta, durante tutto il tempo in cui restano a contatto?*
3. *Dopo quanto tempo si ritorna esattamente nella configurazione iniziale?*

Si trascurino tutti gli attriti.

Soluzione.



Sia v_0 la velocitá che la sferetta trasferisce a quella sul piano, inzialmente ferma. Per la conservazione dell'energia della sferetta del pendolo, si ha:

$$m\,g\,l\,(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2\,g\,l\,(1-\cos\theta_0)}$$

1. La molla si comprime fino al punto da arrestare istantaneamente la sferetta: in termini di energia, detto x_m il tratto di massima compressione della molla, ció avviene quando tutta l'energia cinetica della sferetta si trasforma in energia potenziale della molla:

   $$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 = m\,g\,l\,(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}\,k\,x_m^2 \quad \Rightarrow \quad x_m = \sqrt{\frac{2\,m\,g\,l\,(1-\cos\theta_0)}{k}}$$

   $$x_m = v_0 \Big/ \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{v_0}{\omega_k},$$

   dove $\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é la frequenza angolare di oscillazione propria del sistema sferetta + molla.

2. Per il teorema dell'impulso di una forza, vale: $F_m\,\Delta t = \Delta p$, dove F_m é la forza media agente sulla sferetta nell'intervallo di tempo Δt: nel nostro caso, da quando la sferetta entra in contatto con la molla a riposo fino a quando se ne stacca, la quantitá

Δp vale (verso positivo da sinistra verso destra):

$$\Delta p = m\,\Delta v = m\,(-v_0 - v_0) = -2\,m\,v_0$$

Fintanto che la sferetta resta in contatto con la molla, si sa che lo spostamento $x(t)$ in funzione del tempo t vale:

$$x(t) = x_m\,\sin(\omega_k\,t) = x_m\,\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t)$$

La forza F_m agisce da $t = 0$ a $t = \Delta t$, quando lo spostamento dalla posizione iniziale é nuovamente nullo:

$$x(\Delta t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{T_k}{2} = \pi\,\sqrt{\frac{m}{k}}$$, dove $T_k = \frac{2\,\pi}{\omega_k}$. Pertanto:

$$F_m = -\frac{2\,m\,v_0}{\Delta t} = -\frac{2}{\pi}\,\sqrt{2\,m\,g\,l\,k\,(1-\cos\theta_0)}$$

La forza F_m é negativa in quanto diretta in senso contrario rispetto alla direzione positiva scelta: infatti F_m é diretta da destra verso sinistra.

3. Il tempo totale é dato dai seguenti tre termini: il tempo impiegato dal pendolo a scendere da un angolo $\theta = \theta_0$ a $\theta = 0$, calcolato due volte (tenendo conto di quando risale alla fine). Secondo, il tempo impiegato dalla sferetta con velocitá v_0 a percorrere nei due sensi il tratto d. Terzo, il tempo di contatto sferetta-molla, giá calcolato al punto 2. Detto $T_p = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{l}{g}}$ il periodo del pendolo (supponendo che θ_0 sia sufficientemente piccolo), si ha:

$$T = \frac{T_p}{2} + \frac{2\,d}{v_0} + \frac{T_k}{2} = \pi\,\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{2\,d}{\sqrt{2\,g\,l\,(1-\cos\theta_0)}} + \pi\,\sqrt{\frac{m}{k}}$$

C.V.D.