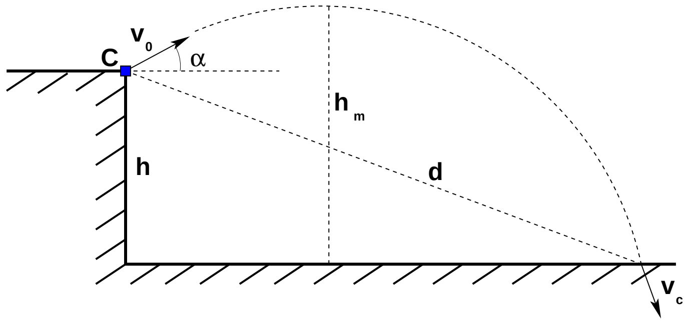
Problema 1

Un cannone fermo, posto su una montagna ad un'altezza $h = 50$ m da terra, spara un proiettile di massa $m = 10$ Kg con una velocitá iniziale $v_0 = 144$ Km/h con un angolo $\alpha = 30^\circ$ rispetto alla direzione orizzontale, come mostrato in figura. Si calcoli:

1. *il modulo della velocitá v_C che il proiettile ha quando cade a terra;*
2. *l'altezza massima da terra h_m raggiunta dal proiettile;*
3. *la distanza d in linea d'aria del punto di caduta del proiettile dal cannone, indicato in figura col punto C;*
4. *subito dopo l'impatto a terra, il proiettile rimbalza con una velocitá $v_r = \frac{2}{3}\,v_0$. Si calcoli quanta energia é stata dissipata nell'impatto.*

Si considerino cannone e proiettile puntiformi. Si trascuri l'attrito dell'aria e si assuma $g = 9.81$ m/s^2.



Soluzione.

1. Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica tra il momento del lancio e quando il proiettile cade a terra:

$$m\,g\,h + \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 \;=\; \frac{1}{2}\,m\,v_c^2$$

$$v_C \;=\; \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,h} \;\simeq\; 50.80\ \mathrm{m/s} \;\simeq\; 182.9\ \mathrm{Km/h}$$

dove si é opportunamente convertito: $v_0 = 144$ Km/h $= 40$ m/s.

2. La componente orizzontale della velocitá iniziale, $v_0\,\cos\alpha$, si conserva durante tutto il volo del proiettile: quindi, detta v_m la velocitá del proiettile quando si trova nel punto di massima altezza, dove la componente verticale v_{0y} si annulla, vale $v_m = v_{0x} = v_0\,\cos\alpha$. Quindi applichiamo la conservazione dell'energia tra il momento del lancio e quando il proiettile raggiunge la massima altezza:

$$m\,g\,h + \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 \;=\; m\,g\,h_m + \frac{1}{2}\,m\,v_0^2\,\cos^2\alpha$$

$$h_m \;=\; h + \frac{v_0^2\,\sin^2\alpha}{2\,g} \;=\; h + \frac{v_0^2}{8\,g} \;\simeq\; 70.39\ \mathrm{m}$$

3. Sia Oxy un sistema di riferimento con asse x orizzontale e asse y verticale, in modo tale che la posizione del cannone é data da $(0, h)$. Scriviamo le equazioni orarie del proiettile al tempo t ($t = 0$ s corrisponde al momento dello sparo):

$$\begin{cases} x(t) &= v_0\, t\, \cos\alpha \\ y(t) &= -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_0\, t\, \sin\alpha + h \end{cases}$$

Sia t_C il tempo di caduta del proiettile, ovvero: $y(t_C) = 0$:

$$t_C \;=\; \frac{v_0\, \sin\alpha + \sqrt{v_0^2\, \sin^2\alpha + 2\, g\, h}}{g}$$

dove si é presa solo la soluzione positiva per t_C (unica ad avere senso fisico nel nostro caso). Detta d_x la componente orizzontale della distanza d, vale:

$$d_x = x(t_C) \;=\; v_0\, \cos\alpha \left(\frac{v_0\, \sin\alpha + \sqrt{v_0^2\, \sin^2\alpha + 2\, g\, h}}{g} \right) \;\simeq\; 201.85 \text{ m}$$

$$d \;=\; \sqrt{d_x^2 + h^2} \;\simeq\; 207.95 \text{ m}$$

4. L'energia dissipata é data dalla differenza tra l'energia totale prima e dopo l'impatto:

$$\Delta E \;=\; m\, g\, h + \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_r^2 \;=\; m\, g\, h + \frac{5}{18}\, m\, v_0^2 \;\simeq\; 9349.4 \text{ J}$$

C.V.D.