

Problema 08

Un satellite attorno alla Terra percorre inizialmente un'orbita di raggio $a_0 = 7\,000\text{ Km}$. Detta $m = 200\text{ Kg}$ la massa del satellite, lo si vuole portare su un'orbita con un semiasse maggiore $a_1 = \frac{9}{2} a_0$. Sapendo che i motori accesi applicano una forza costante $F = 5\,000\text{ N}$ diretta come la velocità del satellite, calcolare per quanto tempo devono restare accesi per effettuare la manovra (si considerino costanti sia la direzione del vettore velocità che il vettore posizione durante l'accensione dei motori; si assumano il raggio della Terra $R = 6\,400\text{ Km}$; $g = \frac{GM}{R^2} = 9.81\text{ m/s}^2$).

Soluzione.

Prima e dopo la manovra, la posizione e, quindi, l'energia potenziale non sono cambiati: pertanto, la variazione dell'energia totale è data dalla variazione di energia cinetica:

$$\Delta E = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} m (v_1 - v_0) (v_1 + v_0)$$

Dal teorema dell'impulso di una forza, segue: $F \Delta t = \Delta p = m (v_1 - v_0)$. Poiché l'orbita di partenza è circolare, segue:

$$\frac{GM}{a_0^2} = \frac{v_0^2}{a_0} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{a_0}} \Rightarrow v_1 = \frac{\Delta p}{m} + \sqrt{\frac{GM}{a_0}}$$

Ricordiamo che l'energia totale di un satellite con semiasse maggiore a vale: $E = -\frac{GMm}{2a}$ (v. esercizio 7, lezione 5):

$$\Delta E = -\frac{GMm}{2a_1} + \frac{GMm}{2a_0} = \frac{1}{2} \Delta p \left(\frac{\Delta p}{m} + 2 \sqrt{\frac{GM}{a_0}} \right)$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado nella variabile Δp :

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \sqrt{\frac{GM}{a_0}} \Delta p - \frac{GMm}{2a_0} \frac{a_1 - a_0}{a_1} &= 0 \\ \Delta p &= \frac{-\sqrt{\frac{GM}{a_0}} \pm \sqrt{\frac{GM}{a_0} + \frac{GM}{a_0} \left(\frac{a_1 - a_0}{a_1} \right)}}{1/m} = m \sqrt{\frac{GM}{a_0}} \left(\sqrt{2 - \frac{a_0}{a_1}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Si considera soltanto la soluzione con $\Delta p > 0$ poiché è: $a_1 > a_0$.

$$\Delta t = \frac{m}{F} \sqrt{\frac{GM}{a_0}} \left(\sqrt{2 - \frac{a_0}{a_1}} - 1 \right) = \frac{m}{3F} \sqrt{\frac{GM}{a_0}} = \frac{m}{3F} \sqrt{\frac{gR^2}{a_0}} \simeq 101\text{ s}$$

C.V.D.