Problema 1

Un'automobile di massa $M = 7m$ (m è una massa incognita), che viaggia lungo un tratto rettilineo di strada inizialmente con velocità costante $v_0 = 108$ Km/h, urta un motociclo di massa m parcheggiato in mezzo alla strada. Subito dopo l'urto, l'automobile prosegue la propria corsa con velocità costante $v_1 = \frac{2}{3}\, v_0$, mentre il motociclo acquista una velocità istantanea v' lungo la stessa strada. Si calcolino i seguenti:

1. *il valore di v';*
2. *sapendo che l'asfalto su cui striscia il motociclo ha un coefficiente di attrito dinamico $f_d = 0.7$, si determini lo spazio s percorso dal motociclo;*
3. *la distanza d che separa l'automobile dal motociclo nell'istante in cui questo si ferma.*

Si trascuri la resistenza dell'aria e si assuma $g = 9.81$ m/s^2.

Soluzione.

1. Applichiamo la conservazione della quantità di moto totale prima e subito dopo l'urto lungo la direzione della strada:

$$M\, v_0 \;=\; M\, v_1 + m\, v' \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v' \;=\; \frac{M\,(v_0 - v_1)}{m} \;=\; \frac{7}{3}\, v_0 = 70\ \mathrm{m/s}}$$

dove si è sfruttato: $v_0 = 108\,\mathrm{Km/h} = 30\,\mathrm{m/s}$.

2. Applichiamo il teorema di conservazione dell'energia meccanica nel caso generale di forze non conservative:

$$E(B) - E(A) = \mathcal{L}_a$$

dove con $E(A)$ e $E(B)$ indichiamo l'energia del motociclo subito dopo l'urto e nell'istante in cui si arresta, rispettivamente. $\mathcal{L}_a$ indica il lavoro svolto dalla forza attrito, unica forza che compie lavoro in questo caso.

$$E(A) = \frac{1}{2}\, m\, v'^2 \;; \qquad E(B) = 0 \;; \qquad \mathcal{L}_a = F_a\, s$$

dove la forza d'attrito F_a ha segno negativo in quanto diretta in senso contrario al moto, che avviene lungo la direzione che prendiamo positiva:

$$\mathcal{L}_a = F_a\, s = -f_d\, m\, g s$$

da cui segue:

$$0 - \frac{1}{2}\, m\, v'^2 \;=\; -f_d\, m\, g\, s \quad \rightarrow \quad \boxed{s = \frac{v'^2}{2\, f_d\, g} \;\simeq\; 356.78\ \mathrm{m}}$$

3. Poichè il motociclo è sottoposto a una forza di modulo costante ($f_d\, m\, g$), il suo moto è uniformemente decelerato (in quanto l'accelerazione ha direzione contraria al moto). Sia $x_m(t)$ la coordinata del motociclo all'istante t, dove si è presa come origine il punto dell'urto (avvenuto all'istante $t = 0$). L'accelerazione a vale: $a = F_a/m$. Pertanto vale:

$$x_m(t) \;=\; \frac{1}{2}\, a\, t^2 + v'\, t \;=\; -\frac{1}{2}\, f_d\, g\, t^2 + v'\, t$$

L'automobile prosegue di moto rettilineo uniforme con velocità v_1. Quindi, detta $x_a(t)$ la coordinata dell'automobile al tempo t, vale semplicemente:

$$x_a(t) \;=\; v_1\, t$$

Detto t_f il tempo di frenamento del motociclo, la distanza cercata d è data semplicemente dalla seguente:

$$d \;=\; x_m(t_f) - x_a(t_f)$$

La coordinata $x_m(t_f)$ è stata già calcolata e vale s (spazio di frenamento calcolato al punto precedente). Per determinare t_f, basta annullare la velocitá del motociclo:

$$\frac{d\, x_m}{dt} = -f_d\, g\, t_f + v' \;=\; 0 \quad \rightarrow \quad t_f \;=\; \frac{v'}{f_d\, g}$$

da cui, sostituendo nell'espressione di $x_a(t)$ si ottiene finalmente:

$$d \;=\; s - v1\, \frac{v'}{f_d\, g} \;=\; \frac{v'^2}{2\, f_d\, g} - \frac{v_1\, v'}{f_d\, g} \;=\; \frac{v'}{f_d\, g}\left(\frac{v'}{2} - v_1\right)$$

$$\boxed{d \;=\; \frac{7}{6}\, \frac{v_0^2}{f_d\, g} \;\simeq\; 152.90 \text{ m}}$$

C.V.D.