Fisica I. Prima Sessione AA 2009-10.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 22/12/2009

PROBLEMA 1

Su un piano orizzontale sono date due palline di masse $m_1 = 2\ Kg$ e $m_2 = 7\ Kg$ collegate da una molla di massa trascurabile, di costante elastica $k = 200$ N/m e compressa di una lunghezza $l_0 = 50$ cm rispetto alla sua lunghezza a riposo. Il tutto è inizialmente fermo (Fig. 1, sinistra). A un certo punto la molla si sblocca e cede tutta l'energia alle due palline, col risultato che la pallina 1 si muove verso sinistra e la 2 verso destra (Fig. 1, destra).

1. Si calcolino le velocità delle palline, v_1 e v_2.
2. Supponendo che il piano abbia un coefficiente di attrito dinamico $f_d = 0.7$, si trovi lo spazio s percorso dalla pallina 2 fino al momento in cui si arresta.
3. Alternativamente ai punti precedenti, si supponga che prima dello sblocco della molla, il sistema palline+molla si muova di moto rettilineo uniforme (verso destra) con velocità $v_0 = 72$ Km/h su un piano privo di attrito (Fig. 2, sinistra). Quanto valgono in questo caso le velocità finali delle palline, v_1' e v_2', calcolate rispetto al piano fisso, dopo lo sblocco della molla (Fig. 2, destra)?

Figura 1

Figura 2

Soluzione.

1. Il sistema delle due palline è isolato, quindi si conserva la quantità di moto totale. Inoltre, dal problema sappiamo che l'energia potenziale della molla si converte in energia cinetica delle due palline. Prendendo come verso positivo quello verso destra, detti v_1 e v_2 i moduli delle rispettive velocità finali, la conservazione della quantità di moto ed energia meccanica totale si traducono nelle seguenti:

$$0 = -m_1 v_1 + m_2 v_2 \tag{1}$$
$$\frac{1}{2} k\, l_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{2}$$

La soluzione del sistema nelle due incognite v_1 e v_2 ha la soluzione seguente:

$$v_1 = \sqrt{\frac{k\, m_2}{m_1(m_1 + m_2)}}\ l_0 = 4.41 \text{ m/s} \tag{3}$$
$$v_2 = \sqrt{\frac{k\, m_1}{m_2(m_1 + m_2)}}\ l_0 = 1.26 \text{ m/s} \tag{4}$$

2. Lungo la direzione del moto, la pallina 2 è sottoposta all'azione di un'unica forza, la forza di attrito dinamico. Questa è costante e diretta nel verso contrario al moto, quindi il moto è uniformemente decelerato con accelerazione a che vale:

$$m_2\, a = -f_d\, m\, g \quad \Rightarrow \quad a = -f_d\, g \tag{5}$$

Il fatto che a sia negativa conferma che si tratta di un moto decelerato. In tal caso, conoscendo la velocità iniziale, v_2, calcolata al punto precedente, la sua velocità in funzione del tempo vale:

$$v(t) = v_2 + a\, t = v_2 - f_d\, g\, t \tag{6}$$

Il tempo di arresto, t_a, è dato da $v(t_a) = 0$, da cui segue: $t_a = v_2/f_d\, g$. Lo spazio percorso nel tempo t_a vale quindi:

$$s \;=\; v_2\, t_a + \frac{1}{2}\, a\, t_a^2 \;=\; \frac{v_2^2}{f_d\, g} - \frac{1}{2}\,\frac{v_2^2}{f_d\, g} \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{v_2^2}{f_d\, g} \tag{7}$$

Sostituendo il valore di v_2 ottenuto nel punto precedente, si ottiene:

$$s \;=\; \frac{k\; l_0^2\; m_1}{2\, f_d\, m_2\, g\,(m_1 + m_2)} \;=\; 11.56\ \mathrm{cm} \tag{8}$$

3. Nel sistema di riferimento solidale al centro di massa (CdM) delle due palline, in moto rettilineo uniforme con velocità v_0, il problema è formalmente lo stesso del punto 1. Durante lo sblocco della molla, il CdM continua a muoversi di moto rettilineo uniforme con la stessa velocità per lo stesso motivo per cui la quantità di moto totale è conservata. Pertanto, dette v_1 e v_2 le velocità delle palline dopo lo sblocco della molla nel sistema di riferimento del CdM, si ha che queste sono le stesse del punto 1. Per passare al sistema di riferimento fisso rispetto al suolo, basta comporre le velocità: poichè i due sistemi sono inerziali, le velocità si compongono come segue:

$$v_1' \;=\; v_0 + (-v_1) \;=\; v_0 - \sqrt{\frac{k\, m_2}{m_1(m_1 + m_2)}}\;\; l_0 \;=\; 15.59\ \mathrm{m/s} \tag{9}$$

$$v_2' \;=\; v_0 + (+v_2) \;=\; v_0 + \sqrt{\frac{k\, m_1}{m_2(m_1 + m_2)}}\;\; l_0 \;=\; 21.26\ \mathrm{m/s} \tag{10}$$

C.V.D.