Fisica I. Prima Sessione AA 2010-11.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 24/01/2011

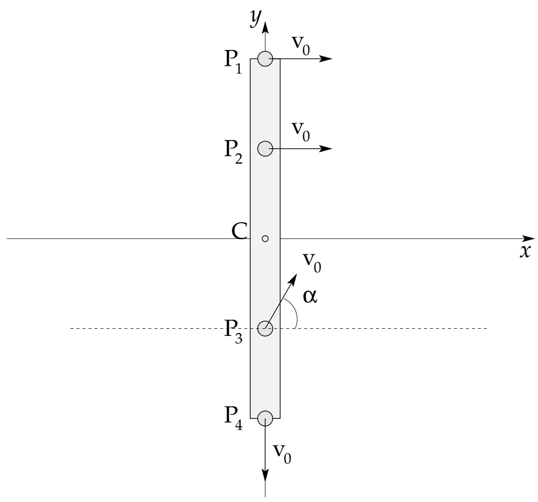
PROBLEMA 2

Una nave da guerra di massa M e lunghezza $l = 30$ m è ferma in acqua. Essa è dotata di 4 postazioni di cannoni: P1, P2, P3 e P4, di cui la prima e l'ultima diposte agli estremi e le altre due a una distanza di $l/4$ dal centro (v. figura). Si consideri un sistema di riferimento cartesiano Oxy, con origine O coincidente con il centro di massa C della nave e l'asse y parallelo alla nave. A un certo punto e nello stesso istante tutte le postazioni sparano un proiettile di massa $m = M/1000$ orizzontalmente e con velocità in modulo $v_0 = 100$ m/s, ma con direzioni diverse. Detta $\vec{v}_i$ il vettore velocità del proiettile sparato dalla i-esima postazione: $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono parallele all'asse x (verso positivo), $\vec{v}_3$ forma un angolo $\alpha = 60°$ con la direzione positiva dell'asse x (e $90° - \alpha$ con quella positiva dell'asse y), $\vec{v}_4$ è diretta lungo l'asse y, verso negativo (v. figura).

1. Si trovi il modulo del vettore velocità $\vec{v}_c$ del centro di massa della nave dopo aver sparato.

2. Si trovi la velocità angolare finale ω_f con cui la nave ruota attorno al proprio centro di massa dopo aver sparato.

Si trascuri ogni attrito dell'acqua sul moto della nave. Si approssimi la nave a una sbarra omogenea. Si noti che M è la massa della sola nave (ovvero senza i proiettili).



Soluzione.

1. A cavallo dello sparo vale la conservazione della quantità di moto totale del sistema nave + proiettili dal momento che le uniche forze che agiscono sono forze (impulsive) interne. Poichè all'inizio è tutto fermo, la stessa vale zero e quindi imponiamo che la quantità di moto totale dopo lo sparo sia nulla:

$$M\,\vec{v}_c + \sum_{i=1}^{i=4} m\,\vec{v}_i \;=\; 0 \tag{1}$$

Esprimendo le $\vec{v}_i$ in funzione dei versori cartesiani $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ segue:

$$-\frac{M}{m}\,(v_{c,x}\,\hat{\imath} + v_{c,y}\,\hat{\jmath}) \;=\; (v_0\,\hat{\imath}) + (v_0\,\hat{\imath}) + v_0\,(\cos\alpha\,\hat{\imath} + \sin\alpha\,\hat{\jmath}) + (-v_0\,\hat{\jmath}) \tag{2}$$

Da questa seguono le due:

$$-\frac{M}{m}\,v_{c,x} = v_0\,\,(2+\cos\alpha) \quad\Rightarrow\quad v_{c,x} \;=\; -\frac{5}{2000}\,v_0 \tag{3}$$

$$-\frac{M}{m}\,v_{c,y} = v_0\,\,(\sin\alpha - 1) \quad\Rightarrow\quad v_{c,y} \;=\; \frac{2-\sqrt{3}}{2000}\,v_0 \tag{4}$$

Da cui il modulo v_c vale:

$$v_c \;=\; \sqrt{v_{c,x}^2 + v_{c,y}^2} \;=\; \frac{\sqrt{8-\sqrt{3}}}{1000}\,v_0 \;\simeq\; 2.5\times10^{-3}\,v_0 \;=\; 0.25\text{ m/s} \tag{5}$$

2. Sempre per lo stesso motivo di prima (ovvero assenza di forze esterne) si conserva anche il momento angolare totale. Prendiamo come polo l'origine O del sistema cartesiano, inzialmente coincidente con il centro di massa della nave. Poichè all'inizio è tutto fermo, il momento angolare totale deve essere (e rimanere) nullo.

$$I\,\vec{\omega}_f + \sum_{i=1}^{i=4} \vec{r}_i \times (m\,\vec{v}_i) \;=\; 0 \tag{6}$$

dove $I = (1/12)\,M\,l^2$ è il momento d'inerzia della nave rispetto al suo centro di massa, $\vec{r}_i$ è il vettore posizione di ciascun proiettile subito dopo lo sparo (quindi coincidente con quello della corrispondente postazione di cannoni). Essendo tutti vettori normali al piano xy, proiettiamo lungo tale direzione prendendo come verso positivo quello uscente:

$$I\,\omega_f + \Big(-\frac{l}{2}\,m\,v_0\Big) + \Big(-\frac{l}{4}\,m\,v_0\Big) + \Big(\frac{l}{4}\,m\,v_0\,\sin\big(\frac{\pi}{2}+\alpha\big)\Big) + (0) \;=\; 0 \tag{7}$$

Usando $\sin(\pi/2+\alpha) = \cos\alpha$:

$$I\,\omega_f \;=\; \Big(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\,\cos\alpha\Big)\,m\,v_0\,l \;=\; \frac{5}{8}\,m\,v_0\,l \tag{8}$$

$$\omega_f \;=\; \frac{3}{400}\,\frac{v_0}{l} \;=\; 0.025\ \text{rad/s} \;=\; 25\ \text{mrad/s} \tag{9}$$

C.V.D.