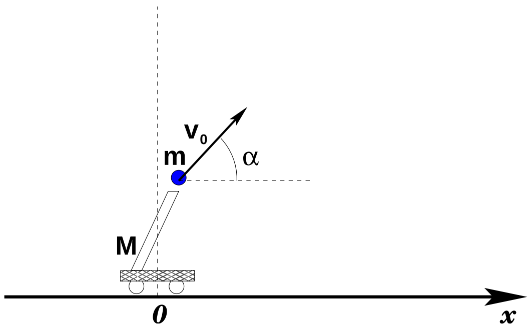
Problema 1

É dato un cannone saldato su un carrello inizialmente fermo, il quale è libero di muoversi senza attrito su un tratto rettilineo di rotaie. Si consideri l'asse x parallelo alle rotaie e diretto come mostrato in figura; al tempo $t = 0$ s il carrello si trova nel punto $x = 0$ (si consideri il sistema carrello-cannone puntiforme). Al tempo $t = 0$ s il cannone spara un proiettile di massa m (incognita), tale che in un sistema di riferimento in quiete rispetto al suolo, il proiettile ha velocità iniziale $v_0 = 360$ Km/h, la cui direzione forma un angolo $\alpha = 60^\circ$ sopra l'orizzonte. Sapendo che la massa del sistema carrello+cannone (senza proiettile) vale $M = 3m$, si calcoli:

1. *il modulo v' della velocità che il carrello acquista subito dopo lo sparo;*
2. *il modulo v_{0r} della velocità relativa del proiettile rispetto al carrello subito dopo lo sparo;*
3. *la distanza d del carrello dal proiettile nell'istante in cui questo cade a terra.*

Si usi $g = 9.81$ m/s^2.



Soluzione.

1. Applichiamo la conservazione della quantità di moto totale lungo l'asse x prima e subito dopo lo sparo: questo, perchè le forze orizzontali agenti sono tutte interne). Poichè all'inizio tutto è fermo, imponiamo che la quantità di moto totale subito dopo lo sparo si annulli. Detto v' il modulo della velocità del carrello subito dopo lo sparo, poichè questa è diretta in verso contrario all'asse x, la sua componente vale $-v'$. Pertanto:

$$-Mv' + mv_0 \cos\alpha \ = \ 0$$

$$\boxed{v' \ = \ \frac{m}{M} v_0 \cos\alpha \ = \ \frac{v_0}{6} \ = \ 60\,\mathrm{Km/h} \ \simeq \ 16.67\,\mathrm{m/s}}$$

2. Conosciamo la velocità $\vec{v}_0$ del proiettile in un sistema di riferimento in quiete. Per trovare $\vec{v}_{0r}$, ovvero quella rispetto al carrello subito dopo l'urto, applichiamo la composizione delle velocità nei moti relativi. Nel nostro caso la velocità di trascinamento è quella del carrello, diretta contrariamente all'asse x e di modulo v' (v. sopra):

$$\vec{v}_0 \ = \ \vec{v}' + \vec{v}_{0r} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{0r} \ = \ \vec{v}_0 - \vec{v}'$$

Per calcolare il modulo v_{0r}, si possono calcolare le componenti lungo x e ortogonalmente ad x, per poi sommarle in quadratura. Alternativamente, basta applicare il teorema di Carnot al triangolo individuato dai vettori $\vec{v}_0$ e $-\vec{v}'$: si noti che $-\vec{v}'$ è diretto lungo la direzione positiva dell'asse x:

$$v_{0r} \;=\; \sqrt{v_0^2 + v'^2 + 2\, v_0\, v'\, \cos\alpha} \;=\; v_0 \sqrt{1 + \frac{m}{M}\,(\frac{m}{M} + 2)\, \cos^2\alpha}$$

$$\boxed{v_{0r} \;=\; \frac{\sqrt{43}}{6}\, v_0 \;\simeq\; 393.45 \text{ Km/h} \;\simeq\; 109.29 \text{ m/s}}$$

3. Sia t_c il tempo di caduta del proiettile, la cui traiettoria è data dalle seguenti:

$$\begin{cases} x(t) &= v_0\, \cos\alpha\; t \\ y(t) &= -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_0\, \sin\alpha\; t \end{cases}$$

$$y(t_c) = 0 \quad \rightarrow \quad t_c = 2\, \frac{v_0\, \sin\alpha}{g}$$

La distanza d è data dalla somma della distanza percorsa dal proiettile e quella del carrello nel tempo di caduta del proiettile: la prima è data da $x(t_c)$:

$$x(t_c) \;=\; \frac{v_0^2}{g}\, \sin{(2\,\alpha)}$$

Lo spazio percorso dal carrello nello stesso tempo vale:

$$v'\, t_c = \frac{m}{M}\, v_0\, \cos\alpha\, 2\, \frac{v_0\, \sin\alpha}{g} = \frac{m}{M}\, \frac{v_0^2}{g}\, \sin{(2\,\alpha)}$$

Pertanto, in totale d vale:

$$\boxed{d = x(t_c) + v'\, t_c = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{v_0^2}{g}\, \sin{(2\,\alpha)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, \frac{v_0^2}{g} \;\simeq\; 1177.1 \text{ m}}$$

C.V.D.