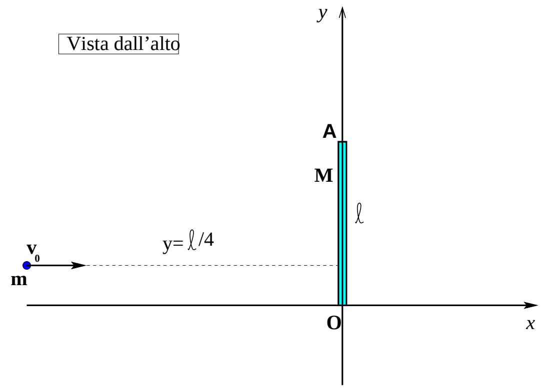
Problema 3

Su un piano orizzontale privo di attrito è dato un sistema cartesiano Oxy (v. figura). Una pallina puntiforme di massa m (incognita) si muove di moto rettilineo uniforme lungo la retta di equazione $y = \ell/4$ ($\ell = 2$ m è una lunghezza data) con velocità $v_0 = 18$ Km/h, lungo la direzione positiva dell'asse x. Una sbarra omogenea di larghezza e spessore trascurabili, lunghezza ℓ e massa $M = \frac{7}{4}m$ è inizialmente ferma ed è orientata lungo l'asse y come mostrato in figura. La sbarra è libera di muoversi sul piano. Subito dopo l'urto, la pallina rimane attaccata alla sbarra. Si descriva come avviene il moto dopo l'urto. Si calcolino, inoltre, i seguenti:

1. *la coordinata y_C del centro di massa del sistema sbarra-pallina dopo l'urto e si dica se (ed eventualmente come) varia nel tempo tale coordinata;*
2. *la velocità v_C del centro di massa del sistema sbarra-pallina dopo l'urto.*
3. *Supponendo che la sbarra sia fissata al piano e libera di ruotare attorno all'estremità A e che la pallina rimbalzi indietro con la stessa velocità in modulo v_0, si calcoli il periodo di rotazione T della sbarra dopo l'urto.*



Soluzione.
Le uniche forze esterne agenti sul sistema sbarra-pallina sono le forze peso e le reazioni normali del piano, tutte dirette verticalmente; pertanto, la componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema si conserva prima e dopo l'urto. In particolare, il centro di massa continua a muoversi di moto rettilineo uniforme. Inoltre, anche il momento angolare totale si conserva. In generale, è ragionevole attendersi che dopo l'urto il sistema ruoti attorno al proprio asse verticale e passante per il proprio centro di massa, mentre questo si muove di moto rettilineo uniforme.

1. Siano y_S e y_P le coordinate y del centro della sbarra e della pallina prima dell'urto, rispettivamente. Si ha: $y_S = \ell/2$ e $y_P = \ell/4$. Per calcolare y_C, consideriamo la sbarra omogenea come un punto materiale di massa M posto nel centro, da cui segue:

$$\boxed{y_C = \frac{m\,y_P + M\,y_S}{m+M} = \frac{9}{22}\,\ell \simeq 0.82 \text{ m}}$$

2. Applichiamo la conservazione della quantità di moto totale prima e dopo l'urto lungo la direzione x:

$$m\,v_0 = (m+M)\,v_C$$

$$\boxed{v_C \;=\; \frac{m}{m+M}\, v_0 \;=\; \frac{4}{11}\, v_0 \;\simeq\; 6.55 \text{ Km/h} \simeq\; 1.82 \text{ m/s}}$$

3. Applichiamo la conservazione del momento angolare totale prima e dopo l'urto: prendiamo come polo l'estremità A della sbarra, attorno cui ruota dopo l'urto. Poichè il moto avviene sul piano Oxy, il momento angolare è diretto ortogonalmente al piano: prendiamo come verso positivo quello uscente. Detti L_i e L_f il momento angolare totale prima e dopo l'urto rispettivamente, detta $y_A = \ell$ la coordinata y del punto A, segue:

$$L_i \;=\; m\, v_0\, (y_A - y_P) \;=\; \frac{3}{4}\, m\, v_0\, \ell$$

$$L_f \;=\; -m\, v_0\, (y_A - y_P) + I_A\, \omega \;=\; -\frac{3}{4}\, m\, v_0\, \ell + I_A\, \omega$$

I_A è il momento d'inerzia della sbarra calcolato nel punto A. Sapendo che il momento d'inerzia relativo all'asse passante per il centro vale $\frac{1}{12}\, M\, \ell^2$, si calcola facilmente I_A applicando il teorema di Huyghens-Steiner:

$$I_A \;=\; \frac{1}{12}\, M\, \ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \;=\; \frac{1}{3}\, M\, \ell^2$$

Imponendo la conservazione del momento angolare totale, si ricava ω e quindi anche T:

$$L_i = L_f \quad \rightarrow \quad \frac{3}{4}\, m\, v_0\, \ell \;=\; -\frac{3}{4}\, m\, v_0\, \ell + I_A\, \omega$$

$$\frac{7}{12}\, m\, \ell^2\, \omega \;=\; \frac{3}{2}\, m\, v_0\, \ell \quad \rightarrow \quad \omega \;=\; \frac{18}{7}\, \frac{v_0}{\ell}$$

Da cui segue:

$$\boxed{T \;=\; \frac{2\,\pi}{\omega} \;=\; \frac{7\,\pi}{9}\, \frac{\ell}{v_0} \;\simeq\; 0.98 \text{ s}}$$

C.V.D.