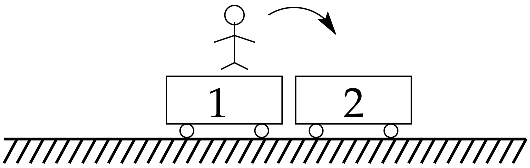
Fisica I. Prima Sessione AA 2010-11.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 14/02/2011

PROBLEMA 1

Un individuo di massa incognita m si trova su un vagone di massa $m_1 = 5\,m$, a fianco di un altro vagone di massa $m_2 = 3\,m$. Tutto è inizialmente fermo sopra dei binari rettilinei privi di attrito. Al tempo $t = 0$ l'individuo spicca un balzo e atterra sul vagone 2, arrestandovisi sopra. Al tempo $t_0 = 3$ minuti misura la distanza tra i due vagoni, che risulta essere $d = 2$ Km.

1. Trovare le velocità v_1 e v_2 dei due vagoni dopo il salto dell'individuo.
2. Al tempo t_0 l'individuo accende un motore che esercita una forza costante diretta contrariamente al moto del vagone 2 e di modulo uguale alla forza peso dell'individuo stesso. Quanto tempo trascorre dal suo salto al momento in cui il vagone 2 si ricongiunge al vagone 1?

Si usi $g = 9.81$ m/s^2.



Soluzione.

1. Il sistema costituito dall'individuo e i due vagoni è un sistema isolato per tutto il tempo. Questo significa che si conserva la quantità di moto totale. Poichè all'inizio è tutto fermo, la quantità di moto totale finale dovrà essere ancora nulla:

$$m_1\,\vec{v}_1 + (m + m_2)\,\vec{v}_2 \;=\; 0 \tag{1}$$

Il problema è chiaramente unidimensionale. Prendiamo come verso positivo quello diretto da sinistra verso destra, indichiamo con v_1 e v_2 le componenti delle due velocità.

$$m_1\,v_1 + (m + m_2)\,v_2 \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad 5\,m\,v_1 \;=\; -(m + 3\,m)\,v_2 \tag{2}$$

$$v_1 \;=\; -\frac{4}{5}\,v_2 \tag{3}$$

Consideriamo ora un sistema di riferimento solidale al vagone 1. Detta v_2' la velocità del vagone 2 in tale sistema di riferimento, per la composizione delle velocità risulta:

$$v_2' \;=\; v_2 - v_1 \;=\; v_2 - \left(-\frac{4}{5}\,v_2\right) \;=\; \frac{9}{5}\,v_2 \tag{4}$$

dove abbiamo usato la (3). Il vagone 2 in tale sistema di riferimento si muove di moto rettilineo uniforme, con velocità v_2' e distanza iniziale nulla, pertanto al tempo t_0 vale:

$$d \;=\; v_2'\,t_0 \;=\; \frac{9}{5}\,v_2\,t_0 \tag{5}$$

da cui si ricava immediatamente v_2:

$$v_2 \;=\; \frac{5}{9}\,\frac{d}{t_0} \;=\; 6.17 \text{ m/s} \tag{6}$$

e dalla (2) si ricava v_1:

$$v_1 \;=\; -\frac{4}{5}\,v_2 \;=\; -\frac{4}{9}\,\frac{d}{t_0} \;=\; -4.94 \text{ m/s} \tag{7}$$

Il segno negativo di v_1 sta semplicemente a indicare che il vagone 1 si muove da destra a sinistra.

2. Il sistema di riferimento solidale al vagone 1, considerato al punto precedente, è un sistema inerziale, dato che si muove di moto rettilineo uniforme. Pertanto non vi sono forze apparenti. Applicando la seconda legge di Newton al vagone 2 in tale sistema di riferimento a partire dall'istante t_0 (da quando, cioè, viene applicata la forza), segue:

$$(m + m_2)\, a \;=\; -m\, g \quad\Rightarrow\quad a \;=\; -\frac{1}{4}\, g \tag{8}$$

dove a è la componente dell'accelerazione di cui risente il vagone 2. Il segno negativo indica che l'accelerazione è rivolta da destra verso sinistra. Detta $x'_2(t')$ la distanza del vagone 2 dal vagone 1 al tempo $t' = t - t_0$, si tratta di un moto uniformemente accelerato, di cui la velocità iniziale vale v'_2 calcolata al punto precedente e la distanza iniziale (al tempo $t' = 0$, ovvero $t = t_0$) vale d.

Il valore di v'_2 è immediatamente ricavabile combinando la (4) e la (6):

$$v'_2 \;=\; \frac{9}{5}\, v_2 \;=\; \frac{9}{5}\,\frac{5}{9}\,\frac{d}{t_0} \;=\; \frac{d}{t_0} \tag{9}$$

Da cui segue:

$$x'_2(t') \;=\; \frac{1}{2}\, a\, t'^2 + v'_2\, t' + d \;=\; -\frac{1}{8}\, g\, t'^2 + \frac{d}{t_0}\, t' + d \tag{10}$$

Per trovare il tempo di ricongiungimento dei due vagoni, basta imporre $x'_2(t') = 0$:

$$t'^2 - 8\,\frac{d}{g\, t_0}\, t' - 8\,\frac{d}{g} \;=\; 0 \tag{11}$$

la cui soluzione è data dalla:

$$t' \;=\; \frac{4\, d}{g\, t_0}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{g\, t_0^2}{2\, d}}\right) \tag{12}$$

da cui il tempo cercato vale:

$$t \;= t_0 + t' \;=\; t_0 + \frac{4\, d}{g\, t_0}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{g\, t_0^2}{2\, d}}\right) \;=\; 225.17\ \mathrm{s} \;=\; 3^{\mathrm{m}}\ 45.17^{\mathrm{s}} \tag{13}$$

C.V.D.