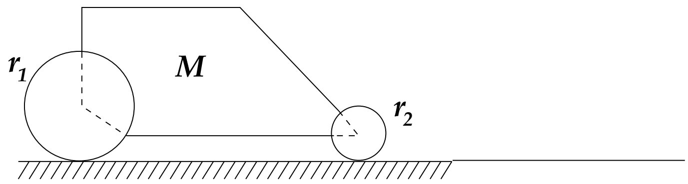
Fisica I. Prima Sessione AA 2009-10.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 15/01/2010

PROBLEMA 3

Una macchina per pressare il catrame è composta dal corpo principale e due cilindri omogenei di acciaio di raggi $r_2 = 40$ cm e $r_1 = 2\,r_2$, come mostrato in figura. La larghezza di tali cilindri vale $l = 2$ m. La massa del corpo principale vale $M = 15\,m_2$, dove m_2 indica la massa del cilindro di raggio r_2. All'inizio la macchina si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $v_0 = 7.2$ Km/h su un terreno con attrito in modo tale che entrambi i cilindri ruotano senza scivolare.

1. Si trovi l'energia cinetica totale K.
2. A un certo punto la macchina sconfina in un'area lastricata di ghiaccio, sulla quale l'attrito è praticamente nullo. L'operatore applica un momento costante frenante $\tau = 3000$ N×m alla coppia di cilindri tale da arrestarne la rotazione. Si calcoli il tempo t_f di frenamento. Descrivere il moto della macchina una volta bloccati i cilindri e se ne calcoli l'energia cinetica K'.

La densità dell'acciaio vale $\rho = 8 \times 10^3$ Kg/m^3.



Soluzione.

1. Le masse m_1 ed m_2 dei due cilindri valgono rispettivamente:

$$m_1 = \pi\, r_1^2\, l\, \rho = 32.17 \text{ t} \tag{1}$$
$$m_2 = \pi\, r_2^2\, l\, \rho = 8.04 \text{ t} \tag{2}$$

In particolare, si noti che $m_1/m_2 = (r_1/r_2)^2 = 4$. Poichè entrambi i cilindri ruotano senza strisciare, le velocità angolari di ciascuno, ω_1 e ω_2, sono legate alla velocità dei rispettivi centri di rotazione (pari a v_0) dalle seguenti:

$$\omega_1 = \frac{v_0}{r_1} \tag{3}$$
$$\omega_2 = \frac{v_0}{r_2} \tag{4}$$

Applichiamo il teorema di König e indico con K_c l'energia cinetica totale nel sistema di riferimento solidale al centro di massa. La macchina nel suo insieme ha una velocità pari a v_0 e quindi tale è anche la velocità del suo centro di massa, da cui segue:

$$K = \frac{1}{2}\,(M + m_1 + m_2)\, v_0^2 + K_c \tag{5}$$

Nel sistema solidale al centro di massa, gli unici contributi all'energia cinetica sono dati dal termine rotazionale dei due cilindri:

$$K_c = \frac{1}{2}\, I_1\, \omega_1^2 + \frac{1}{2}\, I_2\, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\, m_1\, r_1^2 \left(\frac{v_0}{r_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, r_2^2 \left(\frac{v_0}{r_2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}\,(m_1 + m_2)\, v_0^2 \tag{6}$$

Usando $m_1 = 4\, m_2$, segue pertanto:

$$K_c = \frac{5}{4}\, m_2\, v_0^2 \tag{7}$$

La (5) pertanto diviene:

$$K = \frac{45}{4}\, m_2\, v_0^2 = 361.9 \text{ kJ} \tag{8}$$

dove si è usato il dato del problema $M = 15\, m_2$.

2. Applicando la seconda equazione cardinale della dinamica, vale:

$$-\tau \;=\; \frac{dL}{dt} \tag{9}$$

dove il segno negativo tiene conto dell'azione frenante. Poichè τ è costante nel tempo e il momento angolare totale L vale $(I_1\,\omega_1 + I_2\,\omega_2)$, integrando nel tempo da $t = 0$ a $t = t_f$, si ha:

$$-\tau\, t_f \;=\; L_f - L_i \;=\; (I_1 \cdot 0 + I_2 \cdot 0) - (I_1\,\omega_1 + I_2\,\omega_2) \tag{10}$$

da cui segue:

$$t_f \;=\; \frac{I_1\,\omega_1 + I_2\,\omega_2}{\tau} \;=\; \left(\frac{I_1}{r_1} + \frac{I_2}{r_2}\right)\frac{v_0}{\tau} \;=\; \frac{1}{2}\,(m_1\,r_1 + m_2\,r_2)\,\frac{v_0}{\tau} \tag{11}$$

$$t_f \;=\; \frac{9}{2}\,\frac{m_2\,r_2\,v_0}{\tau} \;=\; 9.65 \text{ s} \tag{12}$$

Quando la macchina finisce sul ghiaccio, la sua velocità traslatoria, coincidente con quella del suo centro di massa, non viene alterata, in quanto nessuna forza d'attrito agisce e quindi l'assenza di forze esterne con componenti orizzontali spiega ciò, per la prima legge cardinale della dinamica. Una volta arrestata la rotazione dei cilindri, la macchina prosegue scivolando senza attrito con la stessa velocità v_0. Pertanto la sua energia cinetica K' è la stessa della (5) privata del termine dovuto alla rotazione dei cilindri:

$$K' \;=\; \frac{1}{2}\,(M + m_1 + m_2)\,v_0^2 \;=\; 10\,m_2\,v_0^2 \;=\; 321.7 \text{ kJ} \tag{13}$$

C.V.D.