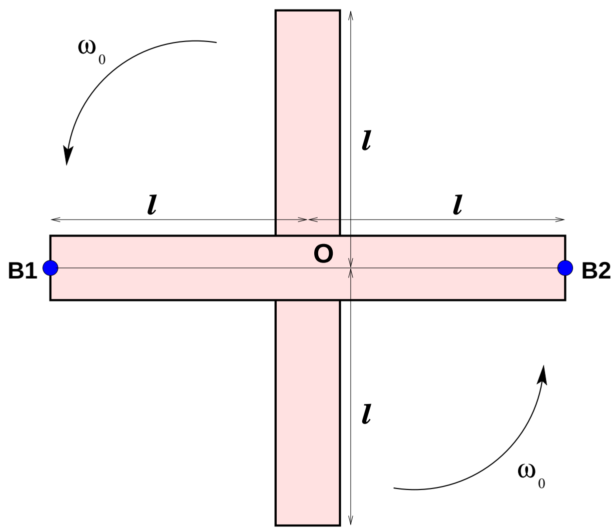
Problema 3

Una piattaforma orizzontale a forma di croce, formata da due lamine omogenee, ciascuna di massa $M = 4m$ e lunghezza $2\,l$, ruota su un piano privo di attrito attorno al proprio centro O con velocitá angolare iniziale ω_0 come mostrato in figura. Alle estremitá di una lamina sono posti due blocchi, $B1$ e $B2$, ciascuno di massa m e di dimensioni trascurabili e inizialmente posti a una distanza dal punto O pari a l. Due funi di massa trascurabile e inestensibili tirano simmetricamente i due blocchi fino a portarli al centro O (durante lo spostamento, i due blocchi si muovono lungo una guida nella lamina). Si chiede di calcolare:

1. *la velocitá angolare finale ω_f della piattaforma, quando i blocchi sono al centro;*
2. *la distanza r_m dei due blocchi dal centro O in corrispondenza della quale, in un sistema di riferimento solidale alla piattaforma, su ciascun blocco agisce la forza centrifuga massima;*
3. *le energie cinetiche totali all'inizio e alla fine, K_0 e K_f, e spiegare l'eventuale variazione.*

Si considerino i due blocchi due punti materiali.



Soluzione.
Siano I_p e $I_{0\mathrm{b}}$ i momenti d'inerzia della piattaforma (senza blocchi) e dei blocchi all'inizio, rispettivamente, riferiti all'asse normale alla piattaforma e passante per O:

$$I_p = 2\,\frac{M\,(2l)^2}{12} = \frac{2}{3}\,M\,l^2 = \frac{8}{3}\,m\,l^2 \qquad ; \qquad I_{0\mathrm{b}} = 2\,m\,l^2$$

1. Durante lo spostamento dei blocchi nel punto O, il momento risultante delle forze esterne é nullo, pertanto il momento angolare totale si conserva: proiettando questo lungo la direzione verticale (normale al foglio, verso positivo uscente), detto L_0 il momento angolare iniziale e L_f quello finale si ha:

$$L_0 = (I_p + I_{0\mathrm{b}})\,\omega_0 \qquad ; \qquad L_f = I_p\,\omega_f$$

$$L_0 = L_f \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \left(1 + \frac{I_{0\mathrm{b}}}{I_p}\right)\omega_0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_f = \frac{7}{4}\,\omega_0}$$

2. Quando ciascun blocco si trova a una distanza r, detta ω_r la velocitá angolare con cui la piattaforma ruota in quella configurazione, in un sistema di riferimento solidale

alla piattaforma risente di una forza centrifuga f_C:

$$f_C = m\,\omega_r^2\,r$$

Per trovare la distanza r_m che presenta la f_C massima, é prima necessario esprimere ω_r in funzione della distanza r: a tal fine, come al punto 1., basta imporre la conservazione del momento angolare totale tra l'inizio e tale configurazione. Detto I_b il momento d'inerzia dei blocchi quando sono a distanza r dal centro e detto L_r il momento angolare corrispondente, segue:

$$(I_p + I_{0\mathrm{b}})\,\omega_0 = L_0 = L_r = (I_p + I_\mathrm{b})\,\omega_r \qquad ; \qquad I_b = 2\,m\,r^2$$

$$\omega_r = \left(\frac{I_p+I_{0\mathrm{b}}}{I_p+I_\mathrm{b}}\right)\omega_0 = \left(\frac{\frac{14}{3}\,m\,l^2}{\frac{8}{3}\,m\,l^2+2\,m\,r^2}\right)\omega_0 = \left(\frac{7\,l^2}{4\,l^2+3\,r^2}\right)\omega_0$$

$$f_C = m\left(\frac{7\,l^2}{4\,l^2+3\,r^2}\right)^2\omega_0^2\,r$$

Per trovare r_m, si impone: $\frac{df_C}{dr} = 0$:

$$\left(\frac{7\,l^2}{4\,l^2+3\,r_m^2}\right)^2 + 2\,r_m\left(\frac{7\,l^2}{4\,l^2+3\,r_m^2}\right)(-1)\,\frac{7\,l^2}{\left(4\,l^2+3\,r_m^2\right)^2}\,(6\,r_m) \;=\; 0$$

$$1 - \frac{12\,r_m^2}{4\,l^2+3\,r_m^2} \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{r_m = \frac{2}{3}\,l}$$

3. Le energie cinetiche iniziale e finale sono calcolate come segue:

$$K_0 \;=\; \frac{1}{2}\,(I_p + I_{0\mathrm{b}})\,\omega_0^2 \;=\; \frac{7}{3}\,m\,l^2\,\omega_0^2$$

$$K_f \;=\; \frac{1}{2}\,I_p\,\omega_f^2 \;=\; \frac{49}{12}\,m\,l^2\,\omega_0^2 \quad\Rightarrow\quad K_f \;=\; \frac{7}{4}\,K_0 \;>\; K_0$$

L'energia cinetica é pertanto aumentata: ció si spiega col fatto che viene immagazzinato il lavoro che la tensione esercitata dalle funi sui blocchi, necessaria per vincere la forza centrifuga (nel sistema solidale alla piattaforma); tale energia viene immagazzinata in energia cinetica della piattaforma grazie alle guide su cui i blocchi sono vincolati a muoversi. In sintesi, l'energia meccanica totale del sistema piattaforma + blocchi non si conserva, ma aumenta, in quanto fornita dal motore posto nel punto O, indispensabile per tirare verso il centro i blocchi.

C.V.D.