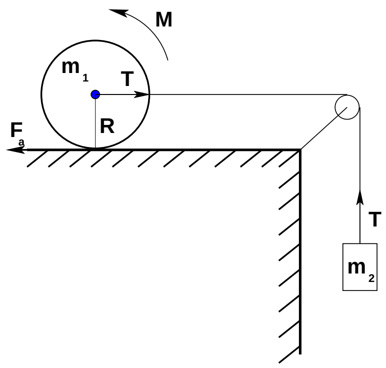
Problema 3

Un cilindro omogeneo di massa $m_1 = 6m$ (m incognito) e di raggio R rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Rispetto all'asse del cilindro é applicato un momento costante di modulo $M = 11\, m\, g\, R$ ($g = 9.81$ m/s^2), la cui direzione é normale al foglio con verso uscente (v. figura); un corpo di massa $m_2 = 5m$ é legato all'asse del cilindro tramite una fune inestensibile e di massa trascurabile, come mostrato in figura. Scrivere le equazioni cardinali della dinamica per il cilindro e la seconda legge della dinamica al corpo di massa m_2. Dalle equazioni risultanti, tenendo presente la condizione di rotolamento senza strisciamento, calcolare:

1. *l'accelerazione del centro di massa del cilindro;*
2. *il rapporto F_a/T tra la forza d'attrito agente sul cilindro e la tensione della fune;*
3. *il valore minimo del coefficiente di attrito statico f_s.*

(Si noti che m é una massa incognita, il cui valore non é necessario ai fini di quanto si chiede).



Soluzione.

1. Applichiamo le due equazioni cardinali al cilindro e la seconda legge della dinamica al secondo corpo:

$$\begin{cases} M - F_a\, R \;=\; I\,\frac{d\omega}{dt} \;=\; \frac{1}{2}\, m_1\, R^2\, \frac{a}{R} \\ F_a - T \;=\; m_1\, a \\ T - m_2\, g \;=\; m_2\, a \end{cases}$$

dove a é l'accelerazione del centro di massa del cilindro, $I = 1/2\, m\, R^2$ il momento d'inerzia del cilindro rispetto al proprio asse, T la tensione della fune, F_a la forza d'attrito statico agente sul cilindro (il punto in cui il cilindro tocca il piano ha velocitá nulla, ecco perché si parla di attrito statico e non dinamico). Si é sfruttato il vincolo di rotolamento: $v = \omega\, R \quad \rightarrow \quad a = \dot{\omega}\, R$.

Sommando membro a membro la seconda e la terza equazione:

$$F_a \;=\; m_2\, g + (m_1 + m_2)\, a$$

andando a sostituirla nella prima, ottengo a:

$$M - \Big[m_2\, g + (m_1 + m_2)\, a\Big]\, R = \frac{1}{2}\, m_1\, R\, a$$

dopo alcuni semplici passaggi si ottiene: $a \; = \; \dfrac{\dfrac{M}{gR} - m_2}{\frac{3}{2}\, m_1 + m_2}\, g \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{3}{7}\, g}$

Numericamente: $a \;\simeq\; 4.2$ m/s^2.

2. Nota l'accelerazione a dal punto 1., ricaviamo subito sia F_a che T:

   $$F_a \;=\; m_2\, g + (m_1 + m_2)\, a = (5 + \tfrac{3}{7}\, 11)\, m\, g \;=\; \tfrac{68}{7}\, m\, g$$

   $$T \;=\; m_2\, (a + g) = 5\, m\, \tfrac{10}{7}\, g \;=\; \tfrac{50}{7}\, m\, g$$

   $$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{F_a}{T} \;=\; \frac{34}{25} \;=\; 1.36}$$

3. Per poter avere una forza d'attrito pari al valore di F_a calcolato al punto precedente, é necessario che sia minore in modulo di $f_s\, N$:

   $$F_a \;<\; f_s\, N \;=\; f_s\, m_1\, g \;\rightarrow\; \tfrac{68}{7}\, m\, g \;<\; f_s\, 6\, m\, g \;\Rightarrow \boxed{f_s \;>\; \frac{34}{21} \;\simeq\; 1.62}$$

C.V.D.