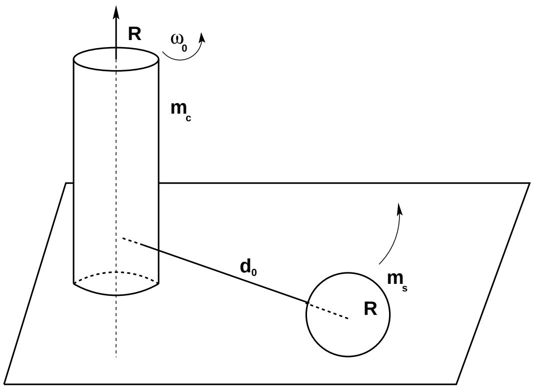
Problema 3

Un cilindro omogeneo di massa $m_C = 6m$ (m è una massa incognita) e raggio R è vincolato a ruotare attorno al proprio asse longitudinale, fisso rispetto a un piano orizzontale senza attrito, con una velocità angolare iniziale $\omega_0 = 37$ rad/min. Una sfera omogenea di massa $m_S = 5m$ e raggio R è legata al cilindro da un'asticella rigida di massa trascurabile, tale che la distanza iniziale del suo centro dall'asse del cilindro vale $d_0 = 3R$. Il tutto ruota attorno all'asse del cilindro, come mostrato in figura. Cilindro, sfera e asticella sono un sistema isolato. A un certo istante l'asticella inizia ad allungarsi lentamente. Nella configurazione finale la distanza del centro della sfera dall'asse vale $d_f = 6R$.

1. *Si calcoli la velocità angolare finale ω_f.*
2. *Dette K_0 e K_f l'energia cinetica totale iniziale e finale, rispettivamente, si calcoli il rapporto K_f/K_0.*
3. *In un sistema di riferimento solidale al sistema rotante, dette F_{0c} e F_{fc} la forza centrifuga agente sulla sfera all'inizio e alla fine, rispettivamente, si calcoli il rapporto F_{fc}/F_{0c}.*



Soluzione.

1. Poichè il sistema è isolato, durante l'allungamento dell'asticella il momento angolare totale si conserva. Questo è diretto normalmente al piano orizzontale verso l'alto, pertanto il problema è unidimensionale. Siano I_C e I_S rispettivamente il momento d'inerzia del cilindro e della sfera rispetto all'asse di rotazione del cilindro quando la sfera si trova a una distanza d dall'asse iniziale:

$$I_C = \frac{1}{2} m_C R^2 = 3mR^2 \qquad ; \qquad I_S(d) = \frac{2}{5} m_S R^2 + m_S d^2$$

dove, per il calcolo di I_S si è sfruttato il teorema di Huyghens-Steiner (scrivendo $I_S(d)$ si è voluto esplicitare la dipendenza di I_S da d). Mentre I_C non cambia, I_S dipende dalla distanza d: quando $d = d_0$, si ha $I_S = 47mR^2$, mentre nella configurazione finale ($d = d_f$) si ha $I_S = 182mR^2$. Siano I_0 e I_f i momenti d'inerzia totale iniziale e finale, rispettivamente. Allora valgono le seguenti:

$$I_0 \;=\; I_C + I_S(d_0) \;=\; 3mR^2 + 47mR^2 \;=\; 50mR^2$$

$$I_f \;=\; I_C + I_S(d_f) \;=\; 3mR^2 + 182mR^2 \;=\; 185mR^2$$

Imponendo la conservazione del momento angolare totale, si può esprimere la velocità angolare finale ω_f in funzione di ω_0, nota:

$$I_0\omega_0 \ = \ I_f\omega_f \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \frac{I_0}{I_f}\omega_0 \ = \ \frac{10}{37}\omega_0 \ = \ 10 \ \mathrm{rad/min}$$

2. Poichè valgono le seguenti: $K_0 = \frac{1}{2}I_0\omega_0^2$ e $K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2$, segue immediatamente:

$$\frac{K_f}{K_0} \ = \ \frac{I_f\omega_f}{I_0\omega_0}\,\frac{\omega_f}{\omega_0} \ = \ \frac{\omega_f}{\omega_0} \ = \ \frac{10}{37} \ \simeq \ 0.27$$

3. La forza centrifuga agente sulla sfera quando si trova a distanza d_0 dall'asse di rotazione, vale semplicemente:

$$F_{0c} = m_s\omega_0^2 d_0 \ = \ 3m_s\omega_0^2 R$$

Analogamente, la forza centrifuga agente sulla sfera nella configurazione finale vale:

$$F_{fc} = m_s\omega_f^2 d_f \ = \ 6\left(\frac{10}{37}\right)^2 m_s\omega_0^2 R$$

da cui segue immediatamente:

$$\frac{F_{fc}}{F_{0c}} \ = \ 2\left(\frac{10}{37}\right)^2 \ = \ \frac{200}{1369} \ \simeq \ 0.146$$

C.V.D.