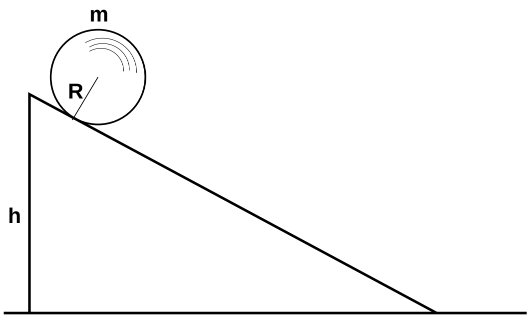
Problema 01

Si consideri una sfera omogenea di raggio R e massa m in cima a un piano inclinato di altezza h. La sfera rotola senza strisciare sul piano. Si calcoli la velocitá del centro di massa della sfera quando questa arriva al suolo. Si calcoli la velocitá anche nel caso in cui al posto della sfera ci sia un cilindro di ugual raggio e massa.

Soluzione.



Applichiamo la conservazione dell'energia, applicando il teorema di Koenig per esprimere l'energia cinetica della sfera:

$$m\,g\,h \;=\; \frac{1}{2}\,m\,v_c^2 + \frac{1}{2}\,I\,\omega^2$$

Il vincolo di rotolamento si esprime come: $v_C = \omega\,R$, da cui segue:

$$2\,g\,h \;=\; v_c^2\left(1 + \frac{I}{m\,R^2}\right) \quad\Rightarrow\quad v_C = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 + \frac{I}{m\,R^2}}}$$

1. Sfera: $I = \frac{2}{5}\,m\,R^2 \quad\Rightarrow\quad v_C = \sqrt{\frac{10}{7}\,g\,h}$
2. Cilindro: $I = \frac{1}{2}\,m\,R^2 \quad\Rightarrow\quad v_C = \sqrt{\frac{4}{3}\,g\,h}$

Secondo Metodo:
applichiamo la seconda legge cardinale, prendendo come polo il centro di massa della sfera: detta F_a la componente parallela al piano della forza d'attrito (diretta in senso contrario alla velocitá), detta N la componente normale al piano, siano L_C e M_C il momento angolare e il momento risultante delle forze esterne rispetto al centro di massa:

$$\vec{M}_C \;=\; \frac{d\vec{L}_C}{dt} + \vec{v}_C \times (m\,\vec{v}_C) \;=\; \frac{d\vec{L}_C}{dt}$$

Si proietta tale equazione lungo la direzione normale al foglio, verso entrante:

$$M_C = R\,F_a \quad ; \quad \frac{dL_C}{dt} = I\,\frac{d\omega}{dt} = \frac{I}{R}\,\frac{dv_C}{dt} = \frac{I}{R}\,a_C \quad\Rightarrow\quad F_a = \frac{I}{R^2}\,a_C$$

Si applica la prima legge cardinale, proiettata parallelamente al piano ($a_C = \frac{dv_C}{dt}$ é l'accelerazione del centro di massa e α é l'angolo del piano inclinato):

$$-F_a + m\,g\,\sin\alpha = m\,a_C \quad \Rightarrow \quad a_C = \frac{\sin\alpha}{1+\dfrac{I}{m\,R^2}}\,g$$

Quando la sfera é scesa, lo spazio percorso vale $s = h/\sin\alpha$. Poiché a_C é costante, ricordando che la velocitá di un corpo soggetto ad accelerazione costante a dopo aver percorso uno spazio s vale: $v = \sqrt{2\,a\,s}$:

$$v_C = \sqrt{2\,a_C\,s} = \sqrt{\frac{2\,g\,\sin\alpha}{1+\dfrac{I}{m\,R^2}}\,\frac{h}{\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1+\dfrac{I}{m\,R^2}}}$$

in accordo con quanto trovato sopra.

C.V.D.