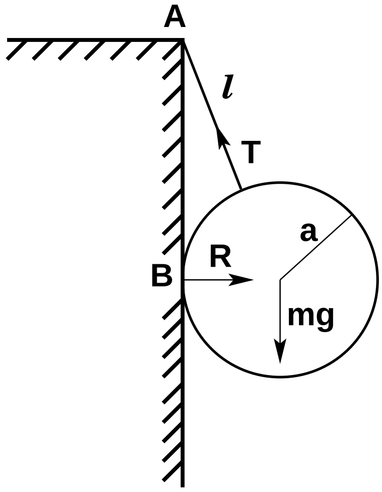
Problema 04

É data una sfera omogenea di raggio a e di massa m legata con una fune di lunghezza l inestensibile e di massa trascurabile al punto fisso A di una parete. La sfera é in equilibrio e tocca la parete in un punto B di questa. Si chiede di calcolare la reazione R che la parete esercita sulla sfera e la tensione T esercitata dalla fune.



Soluzione.
Sia α l'angolo compreso tra la fune e la direzione verticale della parete; quindi vale:

$$\sin\alpha = \frac{a}{l+a} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{1-(\frac{a}{l+a})^2} = \frac{\sqrt{l\,(l+2\,a)}}{l+a}$$

Applichiamo la seconda legge cardinale della dinamica alla sfera, prendendo come polo fisso il punto A: poiché il sistema é in equilibrio, il momento risultante $\vec{M}_A$ é nullo:

$$\vec{M}_A = \overrightarrow{AB} \times \vec{R} + \overrightarrow{AC} \times (m\,\vec{g})$$

dveo C é il centro di massa della sfera. Proiettando lungo la direzione normale al foglio, verso positivo uscente, si ha:

$$R\,(l+a)\,\cos\alpha - m\,g\,a = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{l\,(l+2\,a)}\;R - m\,g\,a = 0$$

$$R \;=\; \frac{a}{\sqrt{l\,(l+2\,a)}}\,m\,g$$

Per il calcolo di T, applichiamo la prima legge cardinale alla sfera, proiettandola orizzontalmente:

$$R - T\,\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{a}{\sqrt{l\,(l+2\,a)}}\,m\,g\,\left(\frac{l+a}{a}\right) = \frac{l+a}{\sqrt{l\,(l+2\,a)}}\,m\,g$$

C.V.D.