Fisica I. Terza Sessione AA 2010-11.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 28/11/2011

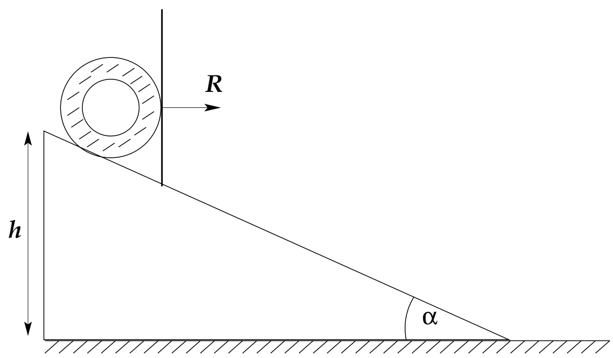
PROBLEMA 3

Un cilindro omogeneo cavo di massa $m = 60$ Kg e raggi r_1 e r_2 rispettivamente interno ed esterno, è inizialmente fermo, appoggiato su un piano inclinato di un angolo $\alpha = 30°$, ad un'altezza incognita h. Il cilindro poggia inizialmente contro una parete verticale fissata sul piano inclinato. Il tutto è inizialmente in equilibrio statico.

1. Si trovi il modulo R della reazione esercitata dal cilindro contro la parete verticale. Si trascuri l'attrito.

2. Dopo aver rimosso la parete verticale, il cilindro inizia a scendere attraverso un moto di rotolamento senza strisciamento. Quando il cilindro giunge al suolo, il suo centro di massa ha una velocità pari a $v = \sqrt{\frac{36}{31}\, g\, h}$. Trovare il valore del rapporto r_1/r_2.

Si ricorda che il momento d'inerzia rispetto all'asse centrale di simmetria di un cilindro cavo di massa m, e raggi r_1 ed r_2 vale $I = m\,(r_1^2 + r_2^2)/2$. Si consideri pari a h la differenza di quota del centro di massa tra l'inizio e la fine della discesa.



Soluzione.

1. Applicando la prima legge cardinale della dinamica al cilindro cavo, poichè questo si trova in equilibrio statico, la risultante delle forze esterne agenti su di esso deve essere necessariamente nulla. Le forze agenti sul cilindro sono 3: la sua forza peso, la reazione normale $\vec{N}$ del piano inclinato e la reazione $\vec{R}_{\rm pc}$ della parete verticale sul cilindro diretta orizzontalmente da destra verso sinistra. Decomponendo lungo le componenti verticale e orizzontale, segue

$$-m\,g + N\,\cos\alpha = 0 \tag{1}$$
$$N\,\sin\alpha - R_{\rm pc} = 0 \tag{2}$$

   da cui si ricava

$$R_{\rm pc} \;=\; m\,g\,\tan\alpha \;=\; 339.8\ \mathrm{N} \tag{3}$$

   Per il principio di azione e reazione, detta $\vec{R}_{\rm cp}$ la forza esercitata dal cilindro sulla parete, vale $\vec{R}_{\rm cp} = -\vec{R}_{\rm pc}$, quindi è una forza uguale in modulo e diretta orizzontalmente da sinistra verso destra, da cui $R = R_{\rm pc}$.

2. Il moto di rotolamento senza strisciamento garantisce la conservazione dell'energia meccanica, poichà al solito il lavoro delle forze d'attrito è nullo, essendo il punto di applicazione fermo istante per istante. Imponendo la conservazione dell'energia meccanica tra l'inizio e la fine segue

$$m\,g\,h \;=\; \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,I\,\omega^2 \tag{4}$$

   Dal vincolo di rotolamento senza strisciamento si ha $\omega = v/r_2$, da cui

$$v^2 \;=\; \frac{2\,g\,h}{1 + I/m\,r_2^2} \;=\; \frac{4\,g\,h}{2 + (\frac{r_1}{r_2})^2 + 1} \;=\; \frac{4\,g\,h}{3 + (\frac{r_1}{r_2})^2} \tag{5}$$

Usando l'espressione per il valore di v data dal problema stesso, segue

$$\frac{36\,g\,h}{31} = \frac{4\,g\,h}{3 + (\frac{r_1}{r_2})^2} \tag{6}$$

$$3 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{31}{9} \tag{7}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3} \tag{8}$$

C.V.D.