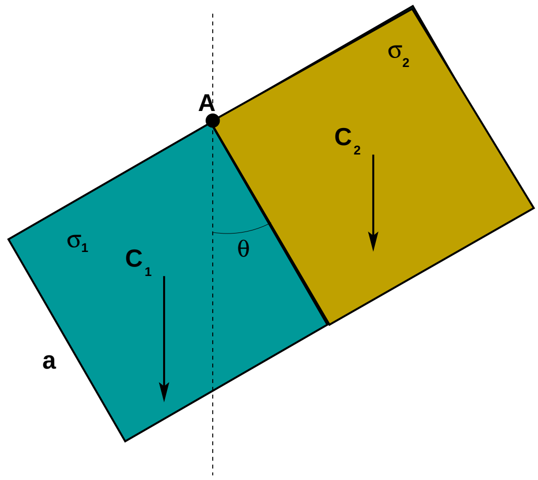
Problema 05

Sono date due lamine omogenee quadrate di lato a, con densitá σ_1 e σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2$), saldate per un lato. Appese a una parete verticale nel punto A come illustrato in figura, in situazione di equilibrio la linea di saldatura forma un angolo θ con la verticale. Trovare il valore di θ.



Soluzione.
Siano $m_1 = a^2\,\sigma_1$ e $m_2 = a^2\,\sigma_2$ le masse delle due lamine. In situazione di equilibrio, il momento risultante (il punto A é il polo) deve essere nullo: siano C_1 e C_2 i due centri di massa delle due lamine:

$$m_1\,g\,\frac{a}{\sqrt{2}}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) - m_2\,g\,\frac{a}{\sqrt{2}}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) = 0$$

Si sono intese le seguenti: la distanza di A dai due centri é la stessa e vale $\frac{a}{\sqrt{2}}$; gli angoli che i vettori $\overrightarrow{AC_1}$ e $\overrightarrow{AC_2}$ formano con la linea di saldatura sono entrambi di $\frac{\pi}{4}$ *rad*.

$$\sigma_1\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \sigma_2\,\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)\sigma_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)\sigma_2$$

$$\tan\theta = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} \quad\Rightarrow\quad \theta = \arctan\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)$$

Secondo Metodo:
Il centro di massa comune deve stare lungo la verticale passante per il punto A, altrimenti il momento della forza di gravitá sarebbe non nullo e il sistema non sarebbe in equilibrio. Detto x l'asse normale alla linea di saldatura e con verso positivo dalla 1 alla 2, determiniamo la coordinata x_C del centro di massa:

$$x_C = \frac{-\frac{a}{2}\,m_1 + \frac{a}{2}\,m_2}{m_1+m_2} = -\frac{a}{2}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)$$

$$\tan\theta = \frac{|x_C|}{a/2} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} \qquad \text{C.V.D.}$$