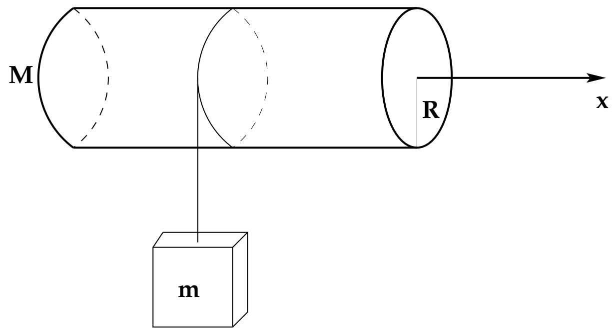
Problema 03

É dato un cilindro omogeneo di raggio R e massa M libero di ruotare senza attrito attorno al proprio asse longitudinale. Attorno al cilindro é parzialmente avvolta una corda inestensibile e di massa trascurabile, che non scivola sulla superficie del cilindro. All'estremo della corda é appeso un contrappeso di massa m. Si chiede di calcolare l'accelerazione con cui il contrappeso scende e la tensione che la corda esercita su quello.



Soluzione.
Definiamo l'asse x coincidente con l'asse di rotazione del cilindro, con verso positivo coincidente con quello del vettore velocitá angolare del cilindro. Consideriamo come polo il punto fisso sull'asse x avente la stessa coordinata della corda proiettata sull'asse. Applichiamo la seconda legge cardinale della dinamica, proiettando i vettori lungo l'asse x:

$$M = \frac{dL}{dt}$$

$$M = m\,g\,R \quad ; \quad L = I\,\omega + m\,v\,R$$

dove $I = \frac{1}{2}\,M\,R^2$ é il momento d'inerzia del cilindro e v é la velocitá con cui scende il contrappeso. Detta $a = dv/dt$ l'accelerazione del contrappeso, segue:

$$m\,g\,R = I\,\frac{d\omega}{dt} + m\,R\,a$$

Poiché la corda non puó scivolare sul cilindro, si ha il vincolo: $v = \omega\,R$, da cui segue:

$$m\,g\,R = \frac{I}{R}\,a + m\,R\,a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{1 + \frac{I}{m\,R^2}}\,g = \frac{2\,m}{2\,m + M}\,g$$

Per ottenere la tensione T, si applica la seconda legge della dinamica al contrappeso:

$$m\,g - T = m\,a \quad \Rightarrow \quad T = m\,(g - a) = \frac{M}{2\,m+M}\,m\,g$$

C.V.D.