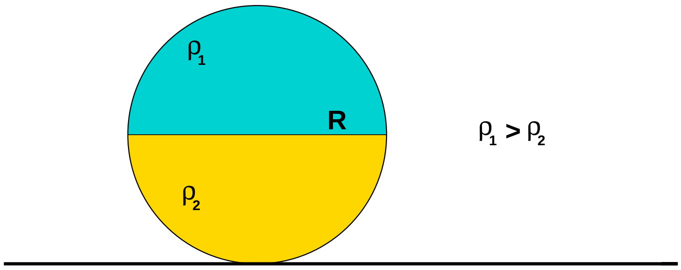
Problema 07

Una sfera di raggio R é costituita da due semisfere omogenee di densitá ρ_1 e ρ_2 rispettivamente ($\rho_1 > \rho_2$). Inizialmente la sfera ha la parte con densitá maggiore esattamente sopra ed é ferma; in seguito a una piccolissima perturbazione, la sfera comincia a rotolare. Si calcoli l'energia cinetica posseduta dalla sfera quando questa ha compiuto una rotazione di un angolo pari a π.



Soluzione.
Siano m_1 e m_2 le masse delle due semisfere rispettivamente:

$$m_1 = \tfrac{2}{3}\,\pi\,R^3\,\rho_1 \qquad ; \qquad m_2 = \tfrac{2}{3}\,\pi\,R^3\,\rho_2$$

Sia y_C l'altezza del centro di massa comune: per calcolarlo, é necessario prima calcolare l'altezza del centro di massa di ciascuna semisfera.
Sia Oxy un sistema di riferimento centrato nell'origine della sfera, con asse y verticale e asse x orizzontale. Detto y_{1C} l'altezza del CM della semisfera superiore, questo é cosí calcolato:

$$y_{1C} = \frac{1}{m_1}\int_0^R y\,\pi\,x^2\,\rho_1\,dy \;=\; \frac{\rho_1\,\pi}{m_1}\int_0^R y\,(R^2 - y^2)\,dy \;=\; \frac{3}{8}\,R$$

Per ragioni di simmetria, si ha: $y_{2C} = -\frac{3}{8}\,R$, da cui segue:

$$y_C = \frac{m_1\,y_{1C} + m_2\,y_{2C}}{m_1 + m_2} \;=\; \frac{3}{8}\,\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\,R$$

Dopo una rotazione di π radianti, il centro di massa della sfera si abbassa di una quantitá pari a $2\,y_C$; pertanto, applicando la conservazione dell'energia, segue:

$$T = (m_1 + m_2)\,g\,2\,y_C = \tfrac{2}{3}\,\pi\,R^3\,(\rho_1 + \rho_2)\,g\,\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right)R = \tfrac{\pi}{2}\,g\,R^4\,(\rho_1 - \rho_2)$$

C.V.D.