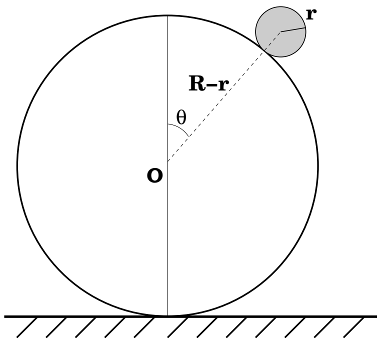
Problema 3

È data una superficie con attrito a forma di circonferenza, posta verticalmente (v. figura). Sulla sua sommità viene posta una sfera omogenea di raggio r e massa $m = 1$ Kg, inizialmente ferma. In seguito a una piccolissima spinta, la sfera comincia a rotolare senza strisciare lungo il tratto di circonferenza, di raggio $R - r$, con $R = 7$ m (così che la distanza del centro della sfera dal centro della circonferenza vale R). Indicando con θ l'angolo che la congiungente centro della sfera - centro della circonferenza forma con la verticale (v. figura), si calcolino i seguenti:

1. *la velocità v_1 del centro di massa della sfera quando $\theta = \theta_1 = 30^\circ$;*
2. *la componente normale N della reazione vincolare esercitata dalla circonferenza sulla sfera quando $\theta = \theta_1$;*
3. *l'angolo θ_d in corrispondenza del quale la sfera si stacca dalla circonferenza. Si calcoli tale angolo anche nel caso di un cilindro omogeneo di raggio r al posto della sfera.*

Si usi $g = 9.81$ m/s^2.



Soluzione.

1. Essendo in presenza di attrito volvente, questo non compie lavoro, quindi possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica alla sfera. Sia ω la velocità angolare con cui la sfera ruota, in corrispondenza di un generico θ; sia, inoltre, v la velocità corrispondente del centro di massa della sfera:

$$m\,g\,R \;=\; m\,g\,R\,\cos\theta + \tfrac{1}{2}\,m\,v^2 + \tfrac{1}{2}\,I\,\omega^2$$

dove si è inteso con m la massa della sfera, con I il suo momento d'inerzia rispetto a un asse centrale (nel caso della sfera: $I = I_S = \frac{2}{5}\,m\,r^2$). Per scrivere l'energia cinetica, si è sfruttato il teorema di Koenig.

Dal vincolo di rotolamento, segue: $\omega = v/r$. Sostituendo e risolvendo in funzione di v, si ottiene:

$$v^2 \;=\; 2\,g\,R\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\dfrac{I}{m\,r^2}}\right)$$

Sostituendo $I = I_S$ e $\theta = \theta_1 = 30^\circ$, otteniamo il valore di v_1:

$$\boxed{v_1 \;=\; \sqrt{\frac{10}{7}\, g\, R\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \;\simeq\; 3.63 \text{ m/s}}$$

2. Applichiamo la seconda legge della dinamica al centro di massa della sfera, proiettando radialmente; prendiamo come direzione positiva quella uscente:

$$N - m\, g\, \cos\theta \;=\; m\, a_r$$

dove con a_r si intende la componente radiale dell'accelerazione del centro di massa della sfera. Poichè il moto lungo quel tratto è circolare, possiamo esprimere a_r in funzione della velocità, secondo la seguente: $a_r = -v^2/R$. Da cui, sfruttando l'espressione di v^2 ottenuta al punto precedente, si ricava:

$$N \;=\; m\, g\, \cos\theta - m\,\frac{v^2}{R} \;=\; m\, g\, \cos\theta - 2\, m\, g\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\frac{I}{m\, r^2}}\right)$$

$$N \;=\; m\, g\left[\cos\theta - \frac{10}{7}\,(1-\cos\theta)\right] \;=\; \frac{17\,\cos\theta - 10}{7}\, m\, g$$

Sostituendo $\theta = \theta_1$, si ha:

$$\boxed{N \;=\; \frac{17\,\sqrt{3}/2 - 10}{7}\, m\, g \;\simeq\; 6.62 \text{ N}}$$

3. Riscriviamo la seconda legge della dinamica applicata al centro di massa della sfera per un angolo generico θ, come ottenuta al punto precedente:

$$N \;=\; m\, g\, \cos\theta - m\,\frac{v^2}{R} \;=\; m\, g\, \cos\theta - 2\, m\, g\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\frac{I}{m\, r^2}}\right)$$

La condizione di distacco è soddisfatta quando $N = 0$, da cui segue:

$$m\, g\, \cos\theta_d \;=\; 2\, m\, g\left(\frac{1-\cos\theta_d}{1+\frac{I}{m\, r^2}}\right)$$

Risolvendo in funzione di $\cos\theta_d$, si ottiene dopo banali passaggi:

$$\boxed{\cos\theta_d \;=\; \frac{2}{3+\frac{I}{m\, r^2}} \;=\; \begin{cases} 10/17 & ,\,(I = \frac{2}{5}\, m\, r^2, \text{sfera}) \\ 4/7 & ,\,(I = \frac{1}{2}\, m\, r^2, \text{cil.}) \end{cases}}$$

In particolare:

$\theta_d = \arccos 10/17 \;\simeq 53.97^\circ$ (sfera)
$\theta_d = \arccos 4/7 \;\simeq 55.15^\circ$ (cilindro).

N.B.
Si noti come, ponendo $I = 0$, ritroviamo il caso del punto materiale al posto della sfera. In questo caso ci riconduciamo al problema 05 della lezione 05.
C.V.D.