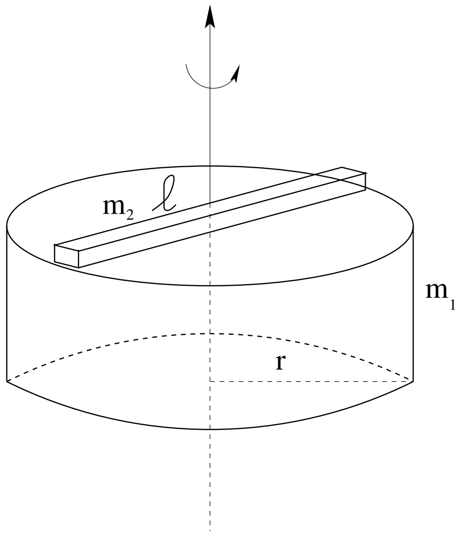
Problema 3

Un cilindro omogeneo di massa $m_1 = 4$ Kg e raggio $r = 3$ m ruota attorno al proprio asse inizialmente con una velocità angolare costante $\omega_0 = 40$ rad/min. A un certo punto viene lasciata cadere da ferma sul cilindro in movimento una sbarra omogenea di massa $m_2 = \frac{3}{4}\, m_1$ e lunghezza $\ell = 2\, r$, in modo tale che il centro della sbarra stia sull'asse di rotazione (v. figura). Una volta appoggiata sul cilindro, la sbarra vi si incolla, ruotando con quello. Sapendo che il sistema cilindro+sbarra è un sistema isolato per tutto il tempo, si calcolino i seguenti:

1. *l'energia cinetica del cilindro prima ancora che venga appoggiata la sbarra;*
2. *la velocità angolare finale ω_f con cui ruota il sistema cilindro+sbarra;*
3. *supponendo di voler frenare al sistema cilindro+sbarra applicando un momento delle forze esterno costante M, si determini il valore di questo affinchè il sistema si arresti in un tempo $t_f = 12$ s.*



Soluzione.

1. L'energia cinetica iniziale T del solo cilindro vale semplicemente:

$$T \;=\; \frac{1}{2}\, I_1\, \omega_0^2 \;=\; \frac{1}{4}\, m_1\, r^2\, \omega_0^2 \;=\; 4 \text{ J}$$

dove con $I_1 = \frac{1}{2}\, m_1\, r^2$ si è inteso il momento d'inerzia del cilindro.

2. Poichè il sistema è isolato, si conserva il momento angolare totale. Detto $I_2 = \frac{1}{12}\, m_2\, \ell^2$ il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione, detti L_0 ed L_f il momento angolare totale iniziale e finale rispettivamente, segue:

$$L_0 \;=\; I_1\, \omega_0 \qquad ; \qquad L_f \;=\; (I_1 + I_2)\, \omega_f$$

Imponendo la conservazione di L si ricava ω_f:

$$L_0 \;=\; L_f \quad \rightarrow \quad \omega_f \;=\; \frac{I_1}{I_1 + I_2}\, \omega_0 \;=\; \frac{1}{1 + I_2/I_1}\, \omega_0$$

Il rapporto I_2/I_1 è cosí calcolato:

$$\frac{I_2}{I_1} \;=\; \frac{\frac{1}{12}\,m_2\,\ell^2}{\frac{1}{2}\,m_1\,r^2} \;=\; \frac{1}{2}$$

da cui segue:

$$\boxed{\omega_f \;=\; \frac{2}{3}\,\omega_0 = \frac{4}{9}\;\mathrm{rad/s} \;\simeq\; 0.44\;\mathrm{rad/s} \;\simeq\; 26.67\;\mathrm{rad/min}}$$

3. Applichiamo la seconda equazione cardinale della dinamica al sistema cilindro+sbarra: a tal fine, indichiamo con ω la velocità angolare generica del sistema:

$$M \;=\; \frac{dL}{dt} \;=\; (I_1 + I_2)\,\frac{d\omega}{dt}$$

dove si è espresso il momento angolare totale in funzione di ω: $L(\omega) = (I_1 + I_2)\,\omega$.

Poichè il momento M è costante, abbiamo un moto angolare uniformemente accelerato con accelerazione angolare α:

$$\alpha \;=\; \frac{d\omega}{dt} \;=\; \frac{M}{I_1 + I_2}$$

L'equazione che descrive ω in funzione del tempo t è pertanto la seguente (si faccia attenzione che la velocità angolare al tempo t=0 nel nostro caso è ω_f, in quanto consideriamo sempre il sistema cilindro+sbarra):

$$\omega(t) \;= \alpha\,t + \omega_f$$

Imponendo che la velocità angolare si annulli al tempo $t_f = 12$ s, otteniamo una condizione su α e quindi su M:

$$\omega(t_f) \;= \alpha\,t_f + \omega_f \;=\; 0$$

$$\alpha = -\frac{\omega_f}{t_f} \quad\rightarrow\quad \frac{M}{I_1+I_2} \;=\; -\frac{2}{3}\,\frac{\omega_0}{t_f} \quad\rightarrow\quad M \;=\; -\frac{2}{3}\,\frac{\omega_0}{t_f}\,(I_1 + I_2)$$

$$I_1 + I_2 \;=\; \frac{1}{2}\,m_1\,r^2 + \frac{1}{12}\,\frac{3}{4}\,m_1\,4\,r^2 \;=\; \frac{3}{4}\,m_1\,r^2$$

da cui segue subito:

$$M \;=\; -\frac{m_1\,r^2\,\omega_0}{2\,t_f} \;=\; -1\;\mathrm{J}$$

Il valore negativo di M è dovuto al fatto che freniamo il sistema e quindi diminuiamo il suo momento angolare.

C.V.D.