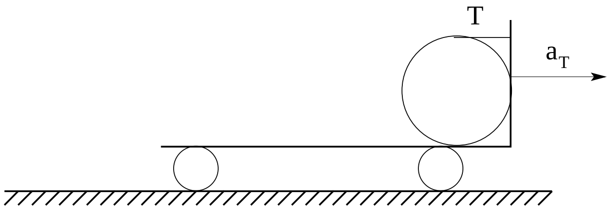
Fisica I. Sessione straordinaria AA < 2009-10.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 26/11/2010

PROBLEMA 3

Un treno si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione a_T. Un vagone merci di lunghezza $L = 9$ m trasporta un tronco di albero, approssimabile a un cilindro omogeneo di massa e raggio incognite. Tale cilindro è legato alla sommità con una fune orizzontale che esercita una tensione T come mostrato in figura. Il piano del vagone ha un coefficiente di attrito statico $f_s = 0.4$.

1. Trovare il valore massimo di a_T consentito affinchè il tronco non inizi a scivolare sul piano del vagone.
2. Assumendo $a_T = 3$ m/s^2, si supponga che a un certo punto si rompa la fune. Sapendo che il tronco rotola sul piano del vagone senza strisciare, si calcoli la velocità finale v_c con cui il tronco cade dal vagone relativamente allo stesso vagone.

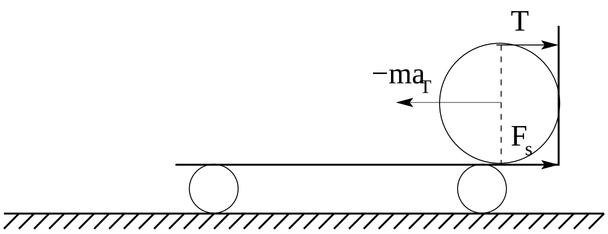


Soluzione.

1. Consideriamo un sistema di riferimento solidale al vagone. Essendo un sistema accelerato, il sistema non e' inerziale e quindi si hanno forze apparenti. In particolare, l'unica forza apparente in gioco è quella di trascinamento, $-m\,\vec{a}_T$, che è quindi diretta in verso contrario a quello del moto del vagone. Detta F_s la forza di attrito statico esercitata dal piano del vagone sul tronco, dalla prima legge cardinale della dinamica vale:

$$m\,a \;=\; -m\,a_T + T + F_s \;=\; 0 \tag{1}$$

dove a è l'accelerazione del tronco in tale sistema di riferimento e vale 0 fintanto che il tronco è fermo. Applicando la seconda legge cardinale della dinamica e prendendo come polo il centro di massa del tronco, segue:



$$I\,\frac{d\omega}{dt} \;=\; -R\,T + R\,F_s \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad T \;=\; F_s \tag{2}$$

dove si è usato $d\omega/dt = 0$ proprio perchè il tronco è fermo. Sostituendo la (2) nella (1):

$$m\,a_T \;=\; 2\,F_s \;\leq\; 2\,f_s\,m\,g \quad\Rightarrow\quad a_T \;\leq\; 2\,f_s\,g \;=\; 7.85 \text{ m/s}^2 \tag{3}$$

2. Quando si rompe la fune, la seconda legge cardinale della dinamica diventa:

$$I\,\frac{d\omega}{dt} \;=\; R\,F_s \tag{4}$$

Il vincolo di rotolamento senza strisciamento implica: $v = \omega\,R$, dove con R indichiamo il raggio del tronco e con v la velocità del suo centro di massa. Derivando nel tempo si ottiene:

$$\omega \;=\; \frac{v}{R} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\omega}{dt} \;=\; \frac{a}{R} \tag{5}$$

da cui segue:

$$I\,\frac{a}{R} \;=\; R\,F_s \quad\Rightarrow\quad F_s \;=\; \frac{I}{R^2}\,a \tag{6}$$

Prendiamo come direzione positiva quella lungo la quale si muove il tronco, rotolando sul vagone, ovvero da destra verso sinistra in figura. Applicando la prima legge cardinale della dinamica al tronco, si ha:

$$m\,a \;=\; m\,a_T - F_s \;=\; m\,a_T - \frac{I}{R^2}\,a \tag{7}$$

$$\left(m + \frac{I}{R^2}\right)a \;=\; m\,a_T \quad\Rightarrow\quad a \;=\; \left(\frac{1}{1 + I/m\,R^2}\right)a_T \;=\; \frac{2}{3}\,a_T \tag{8}$$

dove si è usato il momento d'inerzia di un cilindro omogeneo, $I = 1/2\,m\,R^2$.

A questo punto, nota l'accelerazione del centro di massa, la velocità finale di un moto uniformemente accelerato dopo aver percorso uno spazio L partendo da fermo vale:

$$v_c \;=\; \sqrt{2\,a\,L} \;=\; 2\sqrt{\frac{a_T\,L}{3}} \;=\; 6\ \text{m/s} \tag{9}$$

C.V.D.