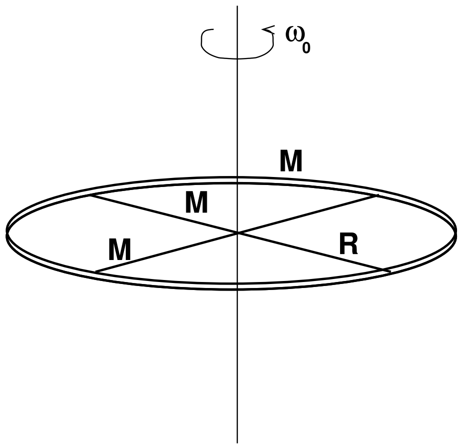
Problema 3

Si consideri un'astronave come quella del film "2001: Odissea nello spazio" composta dai seguenti moduli: un anello circolare di massa $M = 100$ t, raggio $R = 100$ m, e spessore trascurabile; due bracci ciascuno di massa M che s'intersecano perpendicolarmente nel centro dell'anello e colleganti l'anello stesso con un terzo braccio centrale, di massa trascurabile e diretto lungo l'asse longitudinale normale al piano dell'anello (v. figura). Sia $m = \frac{M}{3}$ la massa totale dell'equipaggio, inizialmente disposto lungo l'asse longitudinale. All'inizio, l'astronave ruota attorno al proprio asse longitudinale con velocità angolare costante ω_0, in modo tale che l'accelerazione centrifuga nell'anello sia pari a $g = 9.81$ m/s^2. (in altre parole, nell'anello si ha la gravità artificiale). Si calcolino i seguenti:

1. *la velocità angolare ω_0;*
2. *supponendo che tutto l'equipaggio si trasferisca sull'anello in modo uniforme, si calcoli la velocità angolare finale ω_f che avrà l'astronave al termine del trasferimento;*
3. *l'energia minima che si dovrà spendere, dopo il trasferimento dell'equipaggio sull'anello, per ripristinare la velocità angolare iniziale (in modo da riprodurre la gravità artificiale terrestre).*

L'astronave è un sistema isolato.
Sugg: all'inizio l'equipaggio non contribuisce al momento d'inerzia dell'astronave, mentre alla fine. . .



Soluzione.

1. Basta imporre che l'accelerazione centrifuga risentita nell'anello sia uguale a g:

$$\omega_0^2 R = g \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}} \simeq 0.313 \text{ rad/s} \simeq 3.0 \text{ giri/min}}$$

2. Siano I_0 e I_f i momenti d'inerzia iniziale e finale dell'astronave, rispettivamente. Questi sono cosí calcolati:

$$I_0 = 2 \times \frac{1}{12} M (2R)^2 + M R^2 = \frac{5}{3} M R^2$$

$$I_f = I_0 + m R^2 = \frac{5}{3} M R^2 + \frac{1}{3} M R^2 = 2M R^2$$

dove si è sfruttato il fatto che il momento d'inerzia di un braccio (tipo sbarra) rispetto a un asse perpendicolare passante per il suo centro vale $\frac{1}{12} M \ell^2$ dove ℓ è la sua lunghezza, e il momento d'inerzia di un anello omogeneo vale semplicemente $M\,R^2$. Anche le persone, distribuendosi in modo uniforme, formano un anello, il cui momento d'inerzia vale quindi $m\,R^2$. Poichè l'astronave è isolata, si ha la conservazione del suo momento angolare, da cui, imponendo questa condizione, si ricava immediatamente il valore di ω_f:

$$I_0\,\omega_0 \;=\; I_f\,\omega_f \quad\rightarrow\quad \boxed{\omega_f = \frac{I_0}{I_f}\,\omega_0 \;=\; \frac{5}{6}\,\omega_0 \;\simeq\; 0.26\ \mathrm{rad/s} \;\simeq\; 2.5\ \mathrm{giri/min}}$$

3. Per riportare il valore dell'accelerazione centrifuga sull'anello a g, è necessario riaccelerare l'astronave: questo non viola la conservazione del momento angolare totale: infatti, attraverso l'espulsione di gas da appositi ugelli, ciò che si conserva è il momento angolare del sistema astronave+gas, non quello della sola astronave che è pertanto libera di aumentare il proprio momento angolare (cosa non possibile se non attraverso l'espulsione di gas o comunque di parte della massa!). Pertanto, il lavoro richiesto da tale operazione è dato dalla differenza di energia cinetica dell'astronave (con l'equipaggio sull'anello):

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}\,I_f\,\omega_0^2 - \frac{1}{2}\,I_f\,\omega_f^2 \;=\; \frac{1}{2}\,I_f\,(\omega_0^2 - \omega_f^2)$$

$$\boxed{\mathcal{L} \;=\; \frac{11}{36}\,M\,R^2\,\omega_0^2 \;=\; \frac{11}{36}\,M\,g\,R \;\simeq\; 3.00 \times 10^7\ \mathrm{J}}$$

In realtà, questa è l'energia minima richiesta, in quanto nel caso più generale anche il gas espulso dagli ugelli si porterà via una parte di energia cinetica.

C.V.D.