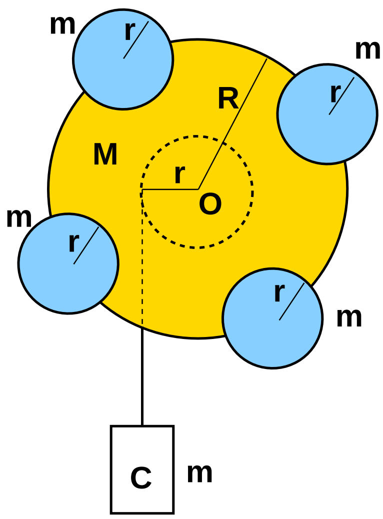
Problema 09

Un disco omogeneo di raggio R e massa M é disposto verticalmente, libero di ruotare attorno al proprio asse normale al disco, con tale asse fissato orizzontalmente a una parete. Sulla circonferenza di tale disco sono dati quattro perni, formanti un quadrato inscritto, attorno ai quali sono dati quattro dischetti omogenei uguali, di raggio r e massa $m = 2$ Kg. L'asse che sostiene il disco principale é un cilindro di raggio r (di massa trascurabile), attorno al quale é avvolta una fune inestensibile e di massa trascurabile che non puó scivolare; all'estremitá di tale fune vi é un contrappeso C di massa m. Trovare quanto vale l'accelerazione con cui il contrappeso scende e l'energia cinetica del disco+dischetti dopo un tempo $t = 1$ s (partendo da fermi) nei seguenti casi:

1. *i quattro dischetti sono saldati al disco principale;*
2. *i quattro dischetti sono liberi di ruotare ciascuno attorno al proprio asse.*

Si assumano le seguenti: $R = 3\,r$, $M = 4\,m$.



Soluzione.
Detto O il centro del disco principale, prendiamo O come polo (fisso). Sia I_O il momento d'inerzia del sistema disco+dischetti rispetto all'asse orizzontale passante per O. L'unico contributo non nullo al momento risultante é dato dalla forza peso del contrappeso: $M = r\,m\,g$, proiettando lungo la direzione normale al foglio, verso positivo uscente.

1. Dal teorema di Huyghens-Steiner, possiamo calcolare I_O:

   $$I_O = \tfrac{1}{2}\,M\,R^2 + 4\,(\tfrac{1}{2}\,m\,r^2 + m\,R^2) = (\tfrac{M}{2} + 4\,m)\,R^2 + 2\,m\,r^2$$

   Applichiamo la seconda equazione cardinale della dinamica: a tal fine, sia ω il modulo della velocitá angolare con cui ruota il disco, v la velocitá del contrappeso:

   $$r\,m\,g = I_O\,\frac{d\omega}{dt} + r\,m\,\frac{dv}{dt}$$

   Poiché la fune non puó scivolare, c'é il vincolo: $v = \omega\,r$. Detta $a = dv/dt$

l'accelerazione del contrappeso, segue:

$$r\,m\,g \;=\; (I_O + m\,r^2)\,\frac{d\omega}{dt} \;=\; \left[\left(\frac{M}{2} + 4\,m\right)R^2 + 3\,m\,r^2\right]\dot{\omega}$$

$$a = \dot{\omega}\,r \;=\; \frac{m\,r^2}{\left(\frac{M}{2} + 4\,m\right)R^2 + 3\,m\,r^2}\,g \;=\; \frac{1}{57}\,g$$

L'energia cinetica T del sistema disco+dischetti vale:

$$T \;=\; \frac{1}{2}\,I_O\,\omega^2 \;=\; \frac{1}{2}\,I_O\,(\tfrac{a}{r}\,t)^2 \;=\; \frac{1}{2}\,(56\,m\,r^2)\left(\frac{g\,t}{57\,r}\right)^2 \;=\; \frac{28}{57^2}\,m\,(g\,t)^2 \;\simeq\; 1.66\ \mathrm{J}$$

2. In questo caso, calcoliamo il momento angolare L_O nel seguente modo: il termine dovuto al disco é semplicemente $I\,\omega$, dove $I = 1/2\,M\,R^2$ é il momento d'inerzia del singolo disco. Per trovare il contributo di ciascuno dei quattro dischetti, sfruttiamo il teorema seguente:

$$\vec{L}_\Omega = \vec{r}_C \times m\,\vec{v}_C + \vec{L}_C$$

che esprime il momento angolare rispetto al polo fisso Ω in funzione della velocitá del centro di massa e del momento angolare calcolato in un sistema a orientamento fisso e solidale al centro di massa, prendendo questo come polo. Nel nostro caso, il centro di massa di un dischetto é il suo centro e il suo momento angolare L_C é nullo: infatti, all'inizio é nullo e le uniche forze esterne agenti, quella del perno e la forza peso, hanno momento nullo e quindi L_C é costante, rimanendo quindi nullo. Pertanto, l'unico contributo al momento angolare totale rispetto al polo O da parte di ogni dischetto é dato dal termine $m\,R^2\,\omega$, in quanto $v_C = \omega\,R$.

$$L_O = \frac{1}{2}\,M\,R^2\,\omega + 4\,m\,R^2\,\omega + r\,m\,v = \frac{1}{2}\,M\,R^2\,\omega + 4\,m\,R^2\,\omega + m\,r^2\,\omega$$

$$L_O = \left[\left(\frac{M}{2} + 4\,m\right)R^2 + m\,r^2\right]\omega$$

Dalla seconda equazione cardinale segue:

$$r\,m\,g \;=\; \frac{dL_O}{dt} \;=\; \left[\left(\frac{M}{2} + 4\,m\right)R^2 + m\,r^2\right]\dot{\omega}$$

$$a = \dot{\omega}\,r \;=\; \frac{m\,r^2}{\left(\frac{M}{2} + 4\,m\right)R^2 + m\,r^2}\,g \;=\; \frac{1}{55}\,g$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,M\,R^2\right)\omega^2 + 4\,\frac{1}{2}\,m\,(\omega\,R)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + 4\,m\right)R^2\,(\tfrac{a}{r}\,t)^2$$

$$T = \frac{27}{55^2}\,m\,(g\,t)^2 \simeq 1.72\ \mathrm{J}$$

C.V.D.