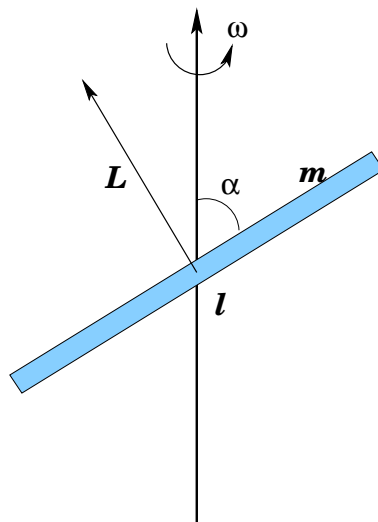


Problema 10

Una sbarra omogenea di lunghezza l e massa m é vincolata a ruotare con velocità angolare costante ω attorno a un asse passante per il suo centro di massa e formante un angolo α con la sbarra stessa. Trovare l'energia cinetica della sbarra e il momento risultante delle forze esterne agenti su quella, prendendo come polo il centro di massa della sbarra.



Soluzione.

In questo caso il vettore momento angolare \vec{L} non é parallelo al vettore velocità angolare $\vec{\omega}$. In particolare, ciò significa che $d\vec{L}/dt \neq 0$, quindi esiste un momento risultante non nullo agente sulla sbarra. Detto I_a il momento d'inerzia della sbarra relativo all'asse di rotazione, si ha che l'energia cinetica é esprimibile come segue:

$$T = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_a \omega^2 = \frac{1}{2} L_a \omega$$

dove $L_a = I_a \omega$ é la componente di \vec{L} parallela all'asse; infatti, \vec{L} é normale alla sbarra e il suo modulo L vale:

$$L = \int_{-l/2}^{l/2} x (\omega x \sin \alpha) \lambda dx = \omega \lambda \sin \alpha \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12} m l^2 \omega \sin \alpha$$

dove si é inteso con $\lambda = m/l$ la densità lineare della sbarra.

$$L_a = L \sin \alpha = \frac{1}{12} m l^2 \sin^2 \alpha \omega \rightarrow I_a = \frac{1}{12} m l^2 \sin^2 \alpha$$

$$T = \frac{1}{24} m l^2 \omega^2 \sin^2 \alpha$$

La componente di \vec{L} normale all'asse di rotazione ruota con velocità angolare ω , pertanto:

$$|\vec{M}| = \left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{L}_n}{dt} \right| = \omega L_n = \omega L \cos \alpha = \frac{1}{24} m l^2 \omega^2 \sin (2 \alpha)$$

C.V.D.