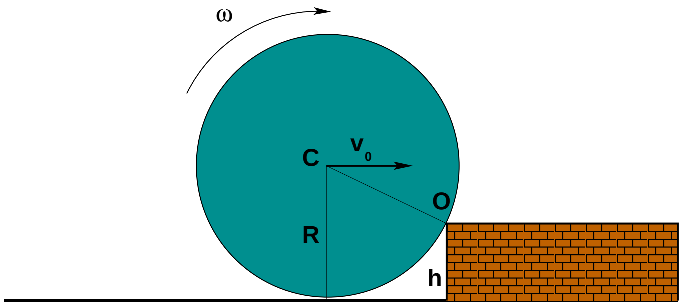
Problema 11

Una sfera omogenea di raggio R rotola senza strisciare su un pavimento orizzontale con velocitá costante v_0. Si calcoli il valore minimo di v_0 affinché la sfera riesca a superare un gradino di altezza h ($h < R$), sapendo che, quando la sfera tocca il gradino nel punto di contatto O, non si stacca da questo durante la rotazione.



Soluzione.
Sia il punto O il polo. Detto C il centro di massa (CM) della sfera, il momento angolare $\vec{L}_O$ della sfera vale:

$$\vec{L}_O = M\,\overrightarrow{OC} \times \vec{v}_C + \vec{L}_C$$

dove M é la massa della sfera, $\vec{v}_C$ é la velocitá del CM della sfera e $\vec{L}_C$ é il momento angolare calcolato in un sistema di riferimento solidale al CM e ad orientamento fisso, prendendo il CM come polo. Nel nostro caso, tutti i vettori di tale equazione sono normali al foglio (verso positivo entrante):

$$L_O = (R-h)\,M\,v_0 + \tfrac{2}{5}\,M\,R^2\,\omega_0$$

Dal vincolo di rotolamento segue: $v_0 = \omega_0\,R$, da cui:

$$L_O = (\tfrac{7}{5}\,R - h)\,M\,v_0$$

Subito prima e dopo l'urto della sfera con il gradino, il momento angolare non varia, in quanto l'unica forza agente *con momento non nullo* é la forza peso della sfera (prima, anche la reazione del pavimento) e, non essendo impulsiva, non puó produrre cambiamenti apprezzabili del momento angolare in tempi molto piccoli. Detta ω la velocitá angolare con cui la sfera ruota attorno al punto O immediatamente dopo l'urto, calcoliamo il momento d'inerzia della sfera rispetto a tale punto, servendoci del teorema di Huyghens-Steiner:

$$I_O = \tfrac{2}{5}\,M\,R^2 + M\,R^2 = \tfrac{7}{5}\,M\,R^2$$

Come si é detto, il momento angolare L_O non cambia subito prima e dopo l'urto:

$$L_O = (\tfrac{7}{5}\,R - h)\,M\,v_0 = I_O\,\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{(\tfrac{7}{5}\,R - h)\,M\,v_0}{\tfrac{7}{5}\,M\,R^2} = \left(1 - \frac{5}{7}\,\frac{h}{R}\right)\frac{v_0}{R}$$

Da subito dopo l'urto fino all'eventuale salita sul gradino, ció che si conserva é l'energia meccanica della sfera, in quanto l'unica forza che fa lavoro é la forza peso, conservativa: si noti che tra prima e dopo l'urto l'energia cinetica non si conserva, in quanto l'urto é anelastico e la reazione del gradino é impulsiva soltanto durante l'urto. In sintesi, attorno all'urto ció che si conserva é il momento angolare, mentre durante tutta la salita ció che si conserva é l'energia meccanica della sfera. Per trovare il valore minimo di v_0, $v_{\rm min}$ che permetta alla sfera di salire, basta imporre che l'energia cinetica posseduta dalla sfera subito dopo l'urto sia uguale alla differenza di energia potenziale richiesta per salire sul gradino:

$$M\,g\,h \;=\; \frac{1}{2}\,I_O\,\omega_{\rm min}^2 \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{7}{5}\,M\,R^2\,\left(1-\frac{5}{7}\,\frac{h}{R}\right)^2\,\left(\frac{v_{\rm min}}{R}\right)^2$$

$$v_0 \;>\; v_{\rm min} \;=\; \sqrt{\frac{10}{7}\,g\,h}\,\left(\frac{7\,R}{7\,R-5\,h}\right) \;=\; \sqrt{70\,g\,h}\,\left(\frac{R}{7\,R-5\,h}\right)$$

C.V.D.