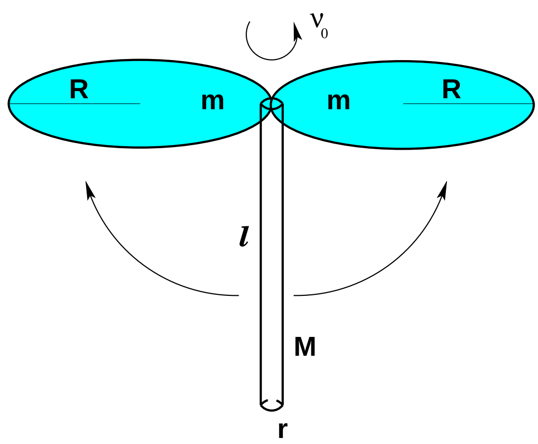
Problema 08

Una sonda schematizzabile come un cilindro omogeneo di lunghezza l, massa M e raggio r, ruota attorno al proprio asse longitudinale con una frequenza iniziale ν_0. Dopo aver dispiegato i pannelli solari, a forma di due dischi omogenei, ciascuno di raggio R e massa m, perpendicolarmente all'asse di rotazione, si ha che la frequenza di rotazione vale ν_1. Quanto vale la massa m di ciascuno dei due pannelli circolari? Quanto vale il lavoro prodotto per aprire i pannelli?
(Per semplicitá, si assuma che all'inizio la struttura dei pannelli sia tutta contenuta nell'asse di simmetria della sonda: in altre parole, si ignori la presenza dei pannelli nella configurazione iniziale).



Soluzione.
Siano I_s e I_p i momenti d'inerzia della sonda (priva di pannelli) e dei pannelli rispettivamente:

$$I_s \;=\; \frac{1}{2}\,M\,r^2$$

Servendoci del teorema di Huyghens-Steiner calcoliamo I_p:

$$I_p \;=\; 2\,(\frac{1}{2}\,m\,R^2 + m\,R^2) \;=\; 3\,m\,R^2$$

Detto I_f il momento d'inerzia totale nella configurazione finale, vale:

$$I_f = I_s + I_p = \frac{1}{2}\,(M\,r^2 + 6\,m\,R^2)$$

Durante il dispiegamento dei pannelli solari non agiscono forze esterne, quindi si conserva il momento angolare totale; dette $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ e $\omega_1 = 2\pi\nu_1$ le velocitá angolari iniziale e finale rispettivamente, segue:

$$I_s\,\omega_0 \;=\; (I_s + I_p)\,\omega_1 \quad\Rightarrow\quad I_s\,\nu_0 \;=\; (I_s + I_p)\,\nu_1$$

$$M\,r^2\,\frac{\nu_0}{\nu_1} \;=\; M\,r^2 + 6\,m\,R^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{m \;=\; \frac{M}{6}\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(\frac{\nu_0}{\nu_1} - 1\right)}$$

Il centro di massa totale sta sull'asse di rotazione per ragioni di simmetria, pertanto l'unico termine che contribuisce all'energia cinetica é quello rotazionale, sia all'inizio che alla fine: detto $\mathcal{L}$ il lavoro speso per aprire i pannelli, dette T_0 e T_1 l'energia cinetica totale prima e dopo l'apertura dei pannelli, dal teorema delle forze vive segue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;&=\; T_1 - T_0 \;=\; \tfrac{1}{2}\,(I_s + I_p)\,\omega_1^2 - \tfrac{1}{2}\,I_s\,\omega_0^2 \\
&=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,(M\,r^2 + 6\,m\,R^2)\,(2\pi\nu_1)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,M\,r^2\,(2\pi\nu_0)^2 \\
&=\; \pi^2\left[(M\,r^2 + 6\,m\,R^2)\,\nu_1^2 - M\,r^2\,\nu_0^2\right] \\
&=\; \pi^2\left[M\,r^2(1 + \frac{\nu_0}{\nu_1} - 1)\,\nu_1^2 - M\,r^2\,\nu_0^2\right] \;=\; \pi^2\,M\,r^2\,(\nu_0\,\nu_1 - \nu_0^2) \\
\mathcal{L} \;&=\; -M\,r^2\,\pi^2\,\nu_0\,(\nu_0 - \nu_1) \;<\; 0
\end{aligned}$$

Il fatto che $\mathcal{L}$ sia negativo significa che le forze interne alla sonda agenti sui pannelli durante la loro apertura hanno prodotto un lavoro negativo, ovvero hanno "frenato" l'apertura, essendo contrarie allo spostamento dei pannelli (in un sistema di riferimento solidale alla sonda, l'interpretazione di tale risultato é la seguente: per aprire i pannelli portandoli alla loro configurazione finale <u>fermi</u>, é stato necessario contrastare la forza centrifuga agente sui pannelli durante il loro dispiegamento attraverso forze interne frenanti).
C.V.D.