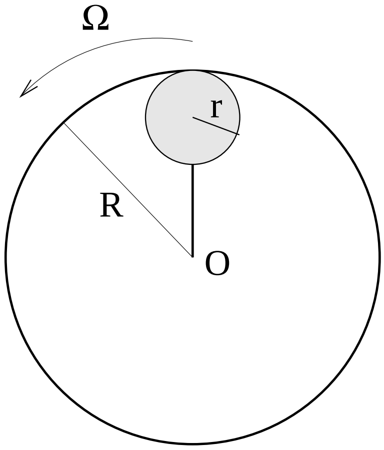
Fisica I. Prima Sessione AA 2009-10.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 22/12/2009

PROBLEMA 2

Su un piano orizzontale privo di attrito una sfera omogenea di massa $m = 100$ g e raggio $r = 75$ cm ruota con velocità angolare costante $\Omega = 5$ rad/s attorno al centro O, cui è collegata tramite un'asta rigida di massa trascurabile. La parte esterna della sfera scivola su una guida cilindrica di raggio $R = 4\,r$ e priva di attrito.

1. Quanto vale K, energia cinetica della sfera? Quanto vale e come è diretta la risultante delle forze esterne agenti sulla sfera, $\vec{F}_e$?
2. Alternativamente al caso precedente, la guida presenta attrito e la sfera vi rotola all'interno senza strisciare, mentre il suo centro di massa continua a ruotare attorno al centro O con la stessa velocità angolare Ω del caso precedente. In questo caso non vi è alcuna asta attaccata alla sfera. Si trovi il valore K' dell'energia cinetica della sfera.



Soluzione.

1. Dato che la sfera ruota rigidamente attorno al punto O, un metodo praticabile consiste nel calcolare il momento d'inerzia della sfera rispetto al centro di rotazione. Detto I_o tale momento d'inerzia ed I_c quello relativo al centro di massa della sfera, per il teorema di Huyghens-Steiner vale:

$$I_o \;=\; I_c + m\,(R-r)^2 \;=\; \frac{2}{5}\,m\,r^2 + 9\,m\,r^2 \;=\; \frac{47}{5}\,m\,r^2 \tag{1}$$

dove si è usato: $I_c = \frac{2}{5}\,m\,r^2$ e il fatto che vale $R - r = 3\,r$.

A questo punto l'energia cinetica della sfera è data semplicemente dalla seguente:

$$K \;=\; \frac{1}{2}\,I_o\,\Omega^2 \;=\; \frac{47}{10}\,m\,(r\,\Omega)^2 \;=\; 6.61\text{ J} \tag{2}$$

Un secondo metodo consiste nell'applicare il teorema di König. In un sistema di riferimento solidale al centro di massa della sfera *e a orientamento fisso* sia K_c l'energia cinetica della sfera; in tale sistema di riferimento, la sfera ruota attorno al proprio asse centrale con la stessa velocità angolare Ω. D'altra parte, la velocità del centro di massa vale $v_c = \Omega\,(R-r)$ in quanto in moto circolare uniforme su un'orbita di raggio $(R-r)$. Dal suddetto teorema segue quindi:

$$K \;=\; K_c + \frac{1}{2}\,m\,v_c^2 \;=\; \frac{1}{2}\,I_c\,\Omega^2 \;+\; \frac{1}{2}\,m\,\Omega^2\,(R-r)^2 \;=\; \frac{1}{2}\,\left[I_c + m\,(R-r)^2\right]\Omega^2 \tag{3}$$

equivalente a quanto ottenuto nelle (1) e (2).

Per la prima legge cardinale della dinamica, vale:

$$\vec{F}_e \;=\; m\,\vec{a}_c \tag{4}$$

dove $\vec{a}_c$ è l'accelerazione del centro di massa della sfera. Poichè quest'ultimo si muove di moto circolare uniforme e descrive una circonferenza di raggio $(R-r)$, la sua accelerazione è costantemente diretta verso il centro di rotazione O e vale in modulo $\Omega^2\,(R-r)$, da cui segue:

$$F_e \;=\; m\,\Omega^2\,(R-r) \;=\; 3\,m\,\Omega^2\,r \;=\; 5.625\text{ N} \tag{5}$$

2. In questo caso applichiamo il metodo visto nel punto precedente relativo al teorema di König. Nel sistema di riferimento solidale al centro di massa della sfera, l'energia cinetica, K'_c, è legata alla rotazione attorno al proprio asse centrale. Stavolta, però, poichè la sfera rotola senza strisciare sulla parete interna della guida cilindrica, ha una velocità angolare ω che è data dalla condizione di rotolamento senza strisciamento:

$$\omega \; = \; \frac{v_c}{r} \; = \; \frac{\Omega\,(R-r)}{r} \tag{6}$$

Il centro di massa si muove con una velocità pari a $v_c = \Omega\,(R-r)$. Applicando il suddetto teorema, si ottiene:

$$K' \; = \; K'_c + \frac{1}{2}\,m\,v_c^2 \; = \; \frac{1}{2}\,I_c\,\omega^2 \; + \frac{1}{2}\,m\,\Omega^2\,(R-r)^2 \; = \; \frac{1}{2}\left(\frac{I_c}{r^2} + m\right)(R-r)^2\,\Omega^2 \tag{7}$$

$$K' \; = \; \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}\,m\right)(9\,r^2)\,\Omega^2 \; = \; \frac{63}{10}\,m\,(r\,\Omega)^2 \; = \; 8.86 \text{ J} \tag{8}$$

C.V.D.