Fisica I. Prima Sessione AA 2009-10.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 22/12/2009

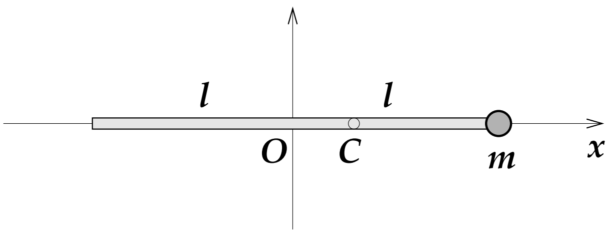
PROBLEMA 3B (AA PRECEDENTI)

Un ingegnere di massa $m = 70$ Kg siede a uno degli estremi di una barca di massa $m_b = 2\,m$ e semi-lunghezza $l = 5$ m. La barca è approssimabile a una sbarra omogenea e l'ingegnere a un punto materiale. Si consideri un sistema di riferimento con asse x diretto longitudinalmente alla barca e con origine O nel punto di mezzo della stessa, come in figura.

1. Si trovi la coordinata x_c del centro di massa C del sistema barca+ingegnere e il momento d'inerzia totale rispetto a un asse ortogonale alla barca e passante per C.

2. Supponendo che il centro di massa C si muova con velocità costante $v_0 = 36$ Km/h e che il sistema barca+ingegnere ruoti attorno a C con velocità angolare costante $\omega = v_0/l$, si calcoli l'energia cinetica del sistema.

3. **(Supplementare: 8 punti)**. Supponendo che la sbarra formi un angolo piccolo θ con l'asse x e che sulla barca agisca una forza esterna costante $F = 1500$ N parallela all'asse x con verso negativo e applicata nel centro O della sbarra, si trovi l'accelerazione del centro di massa e il periodo di piccole oscillazioni del sistema.



Soluzione.

1. Il centro di massa totale ha coordinata x_c data dalla seguente:

$$x_c = \frac{m_b\,0 + m\,l}{m_b + m} = \frac{l}{3} = 1.67 \text{ m} \tag{1}$$

Per calcolare il momento d'inerzia totale rispetto all'asse passante per C, I_c, sfruttiamo il teorema di Hughens-Steiner. Detto I_o il momento d'inerzia della sbarra rispetto al suo centro O, si ha:

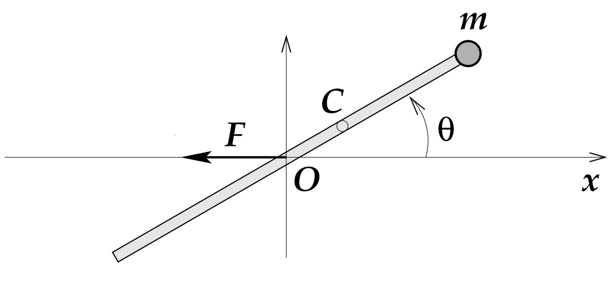
$$\begin{aligned} I_c &= I_o + m_b\,x_c^2 + m\,(l - x_c)^2 = \frac{1}{12}\,m_b\,(2\,l)^2 + m_b\,x_c^2 + m\,(l - x_c)^2 \\ &= \frac{2}{3}\,m\,l^2 + \frac{2}{9}\,m\,l^2 + \frac{4}{9}\,m\,l^2 = \frac{4}{3}\,m\,l^2 \end{aligned} \tag{2}$$

$$I_c = \frac{4}{3}\,m\,l^2 = 2333 \text{ Kg m}^2 \tag{3}$$

2. Applichiamo il teorema di König, l'energia cinetica K vale:

$$K = \frac{1}{2}\,(m_b + m)\,v_0^2 + \frac{1}{2}\,I_c\,\omega^2 = \frac{3}{2}\,m\,v_0^2 + \frac{2}{3}\,m\,v_0^2 = \frac{13}{6}\,m\,v_0^2 = 15.17 \text{ kJ} \tag{4}$$

3. La situazione è rappresentata nella figura seguente.



F è l'unica forza esterna e quindi la risultante agente sul sistema barca+ingegnere. Detto a il modulo dell'accelerazione subita dal centro di massa C, dalla prima legge cardinale della dinamica, si deduce che il sistema accelera lungo la direzione negativa dell'asse x e vale in modulo:

$$a \; = \; \frac{F}{m_b + m} \; = \; \frac{F}{3\,m} \; = \; 7.14 \;\; \mathrm{m/s^2} \tag{5}$$

Mentre il moto del centro di massa C accelera uniformemente secondo la (5), per calcolarne il periodo per piccole oscillazioni, si applica la seconda legge cardinale della dinamica applicata al polo C. L'unica forza esterna che contribuisce al momento risultante delle forze esterne è sempre F. Prendendo come direzione positiva quella normale al piano orizzontale e uscente, segue:

$$\frac{d}{dt}\,(I_c\,\dot{\theta}) \; = \; M_{\mathrm{ext}} \tag{6}$$

dove il momento esterno M_{ext} vale $-F\,x_c\,\sin\theta$, da cui segue:

$$I_c\,\ddot{\theta} \; = \; -F\,\frac{l}{3}\,\sin\theta \tag{7}$$

Per angoli piccoli, vale l'approssimazione $\sin\theta \simeq \theta$, da cui:

$$\ddot{\theta} \; = \; -\frac{F\,l}{3\,I_c}\,\theta \; = \; -\frac{F}{4\,m\,l}\,\theta \tag{8}$$

La (8) è l'equazione del moto armonico semplice di un oscillatore armonico con periodo T che vale:

$$T \; = \; 2\,\pi\,\sqrt{\frac{4\,m\,l}{F}} \; = \; 4\,\pi\,\sqrt{\frac{m\,l}{F}} \; = \; 6.07 \;\; \mathrm{s} \tag{9}$$

C.V.D.