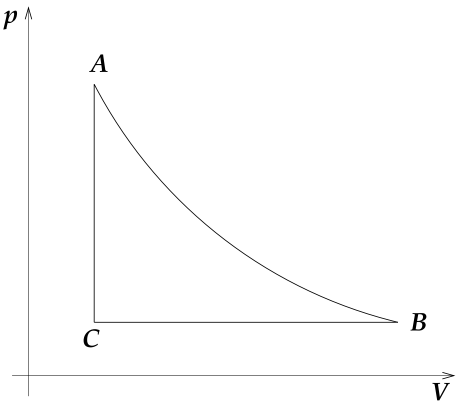
Fisica I. Prima Sessione AA 2009-10.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 19/02/2010

PROBLEMA 3A (AA 2009-10)

Due moli di gas perfetto monoatomico eseguono il ciclo termodinamico rappresentato nel piano di Clapeyron. La pressione in A vale $p_A = 0.1$ bar. Da A a B la trasformazione è isoterma, con $T_A = T_B = 127°$ C. Durante tale tratto, il calore ricevuto dal gas ammonta a $Q_{AB} = 500$ cal. Le trasformazioni $B \to C$ e $C \to A$ sono rispettivamente un'isobara e un'isocora.

1. Quanto vale il volume in B, V_B?
2. Si calcoli il rendimento, $\eta = L/Q_{AB}$, con L il lavoro totale prodotto sull'intero ciclo.



Soluzione.

1. Prima di tutto, ricaviamo il volume nel punto A, V_A: questo è dato immediatamente dalla equazione di stato dei gas perfetti.

$$V_A \;=\; \frac{n\,R\,T_A}{p_A} \;=\; 0.665 \text{ m}^3 \tag{1}$$

dove $n = 2$. Durante la trasformazione isoterma $A \to B$, dal primo principio della termodinamica segue che il calore scambiato Q_{AB} è uguale al lavoro prodotto, L_{AB}:

$$0 \;=\; n\,c_V\,(T_B - T_A) \;=\; Q_{AB} - L_{AB} \quad \Rightarrow \quad Q_{AB} \;=\; L_{AB} \tag{2}$$

Siccome sono tutte trasformazioni reversibili, è possibile calcolare L_{AB} analiticamente come segue:

$$Q_{AB} \;= L_{AB} \;=\; \int_{V_A}^{V_B} p\; dV \;=\; n\,R\,T_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} \;=\; n\,R\,T_A\; \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \tag{3}$$

Invertendo la (3) è possibile esprimere V_B in funzione di Q_{AB}, come segue:

$$V_B \;=\; V_A\; \exp\left(\frac{Q_{AB}}{n\,R\,T_A}\right) \;=\; \frac{n\,R\,T_A}{p_A}\; \exp\left(\frac{Q_{AB}}{n\,R\,T_A}\right) \;=\; 0.91 \text{ m}^3 \tag{4}$$

dove si è usato: $Q_{AB} = 500$ cal $= 2090$ J, $T_A = 400$ °K, $p_A = 10^4$ Pa.

2. Il lavoro totale L viene prodotto solo nei tratti $A \to B$ e $B \to C$, infatti la trasformazione isocora non può compiere lavoro. Da ciò segue:

$$\eta \;=\; \frac{L_{AB} + L_{BC}}{Q_{AB}} \;=\; \frac{Q_{AB} + L_{BC}}{Q_{AB}} \;=\; 1 + \frac{L_{BC}}{Q_{AB}} \tag{5}$$

Nella (5) l'unico valore incognito è L_{BC}, ovvero il lavoro svolto durante l'isobara, che vale $p_B\,(V_C - V_B)$. Poichè $V_C = V_A$, resta da calcolare solo la pressione in B (o, ugualmente, in C). Ma la pressione in B è ricavabile applicando l'equazione di stato dei gas perfetti nel punto B, dato che la temperatura è nota ($T_B = T_A$) e il volume V_B è già stato calcolato nella (4):

$$p_B \;=\; \frac{n\,R\,T_A}{V_B} \tag{6}$$

Da cui segue:

$$\eta \;=\; 1 + \frac{L_{BC}}{Q_{AB}} \;=\; 1 + \frac{p_B\,(V_A - V_B)}{Q_{AB}} \;=\; 1 + \frac{n\,R\,T_A\,(V_A - V_B)}{V_B\,Q_{AB}} \tag{7}$$

$$\eta \;=\; 1 + \frac{n\,R\,T_A}{Q_{AB}}\,\left(\frac{V_A}{V_B} - 1\right) \tag{8}$$

Sostituendo la (4) si ottiene infine:

$$\eta \;=\; 1 - \frac{n\,R\,T_A}{Q_{AB}}\,\left[1 - \exp\left(-\frac{Q_{AB}}{n\,R\,T_A}\right)\right] \;=\; 0.14 \tag{9}$$

C.V.D.