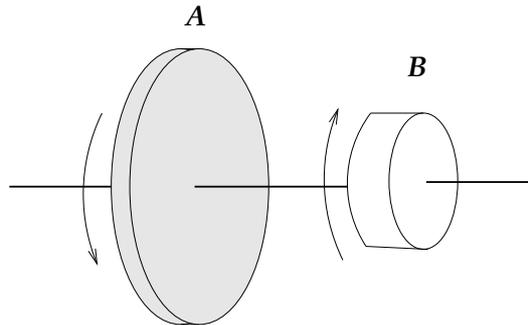


PROBLEMA 2

Due dischi A e B di massa uguale ma raggio diverso ($3r$ ed r , rispettivamente) ruotano senza attrito con uguale velocità angolare ω_0 attorno a un asse comune, ma in senso opposto (v. figura). I due dischi vengono lentamente portati a contatto. Le forze di attrito tra le superfici di contatto fanno sì che entrambi raggiungano una comune velocità angolare finale ω_f .

1. Si determini ω_f in funzione di ω_0 .
2. Quanto vale il rapporto tra energia cinetica totale finale e iniziale, K_f/K_0 ? Si dia una spiegazione.



Soluzione.

1. Siano I_A e I_B i rispettivi momenti d'inerzia, entrambi relativi all'asse passante per il proprio centro di massa e normale al piano di ciascun disco. Detta m la massa di ciascun disco, valgono pertanto:

$$I_A = \frac{1}{2} m (3r)^2 = \frac{9}{2} m r^2 \quad (1)$$

$$I_B = \frac{1}{2} m r^2 \quad (2)$$

Il momento angolare totale, \vec{L} , si conserva in quanto le forze che si scambiano i due dischi sono interne al loro sistema e le forze esterne sono nulle. Prima del contatto, i momenti angolari di entrambi i dischi sono entrambi diretti lungo l'asse di rotazione (essendo entrambi ruotanti attorno a un asse principale d'inerzia). Si faccia però attenzione che sono anti-paralleli, a causa dell'opposto senso di rotazione. Prendendo come verso positivo quello da sinistra a destra, il momento angolare del disco A risulta positivo, mentre quello di B risulta negativo:

$$L = I_A \omega_0 - I_B \omega_0 = (I_A - I_B) \omega_0 \quad (3)$$

Quando alla fine i dischi ruotano attaccati con la stessa ω_f , il momento d'inerzia globale di quello che ora può essere considerato come un unico corpo rigido vale è semplicemente la somma dei rispettivi momenti d'inerzia, per cui il momento angolare finale vale:

$$L = (I_A + I_B) \omega_f \quad (4)$$

Eguagliando le (3) e (4) si ottiene:

$$\omega_f = \frac{I_A - I_B}{I_A + I_B} \omega_0 = \frac{I_A/I_B - 1}{I_A/I_B + 1} \omega_0 = \frac{4}{5} \omega_0 = 0.8 \omega_0 \quad (5)$$

2. L'energia cinetica totale iniziale, K_0 vale:

$$K_0 = \frac{1}{2} I_A \omega_0^2 + \frac{1}{2} I_B \omega_0^2 = \frac{1}{2} (I_A + I_B) \omega_0^2 \quad (6)$$

Quella finale vale invece:

$$K_f = \frac{1}{2}(I_A + I_B)\omega_f^2 \quad (7)$$

Il loro rapporto vale pertanto:

$$\frac{K_f}{K_0} = \left(\frac{\omega_f}{\omega_0}\right)^2 = \frac{16}{25} = 0.64 \quad (8)$$

L'energia cinetica totale finale è minore, in quanto la parte mancante è stata dissipata dalle forze interne agenti tra i due dischi dal momento del contatto fintanto che non hanno raggiunto una velocità angolare comune.

C.V.D.