Fisica I. Seconda Sessione AA 2009-10.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 21/06/2010

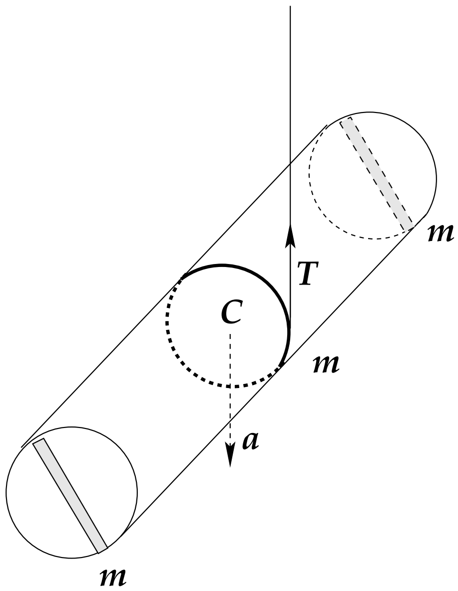
PROBLEMA 3B (AA PRECEDENTI)

Un cilindro omogeneo di raggio $R = 30$ cm e massa $m = 1500$ g ha incollate alle proprie estremità due sbarre omogenee, ciascuna di lunghezza $2\,R$ e massa m, come mostrato in figura. Una fune è arrotolata alla parte esterna del cilindro in corrispondenza del suo centro di massa C. Tutto il blocco è sospeso in aria e inizialmente fermo. Mentre il cilindro scende sotto l'effetto della gravità, la fune si srotola senza strisciare sulla superficie di contatto del cilindro.

1. Si trovi il momento d'inerzia totale rispetto all'asse di rotazione passante per il centro di massa C.

2. Si trovino l'accelerazione a con cui scende il cilindro e la tensione T esercitata dalla fune.

Si usi $g = 9.81$ m/s^2.



Soluzione.

1. Il momento d'inerzia totale, I, è dato dal contributo del cilindro e delle due sbarre, rispetto all'asse passante per i rispettivi centri di massa (longitudinale al cilindro e normale a ciascuna sbarra):

$$I \;=\; I_c + 2\,I_s \;=\; \frac{1}{2}\,m\,R^2 + 2\,\frac{1}{12}\,m\,(2\,R)^2 \;=\; \frac{7}{6}\,m\,R^2 \;=\; 0.157 \text{ Kg m}^2 \tag{1}$$

2. Impostiamo un sistema a due equazioni e a 2 incognite, a e T, applicando rispettivamente la prima e la seconda equazione cardinale della dinamica al sistema del cilindro e due sbarre. Detta $M = 3\,m$ la massa totale, segue:

$$M\,g - T = M\,a \tag{2}$$

$$R\,T = I\,\frac{d\omega}{dt} \tag{3}$$

La forza peso non contribuisce al momento nella eq. (2), in quanto applicata al centro di massa C e quindi con momento nullo rispetto allo stesso polo C.

Il vincolo di rotolamento si traduce in un vincolo tra l'accelerazione lineare del sistema, a e quella angolare, $d\omega/dt$:

$$\omega \;=\; \frac{v}{R} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\omega}{dt} \;=\; \frac{a}{R} \tag{4}$$

Sostituendo la (4) e la (1) nella (2):

$$3\,m\,g - T = 3\,m\,a \tag{5}$$

$$R\,T = \frac{7}{6}\,m\,R^2\,\frac{a}{R} \tag{6}$$

$$3\,m\,g - T = 3\,m\,a \tag{7}$$

$$T = \frac{7}{6}\,m\,a \tag{8}$$

Sommando membro a membro le due equazioni:

$$3\,m\,g \;=\; \frac{25}{6}\,m\,a \quad \Rightarrow \quad a \;=\; \frac{18}{25}\,g \;=\; 0.72\,g \;=\; 7.06\ \mathrm{m/s^2} \tag{9}$$

Sostituendo nella (8) si ottiene T:

$$T \;=\; \frac{21}{25}\,m\,g \;=\; 12.36\ \mathrm{N} \tag{10}$$

C.V.D.