Fisica I. Seconda Sessione AA 2009-10.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 12/07/2010

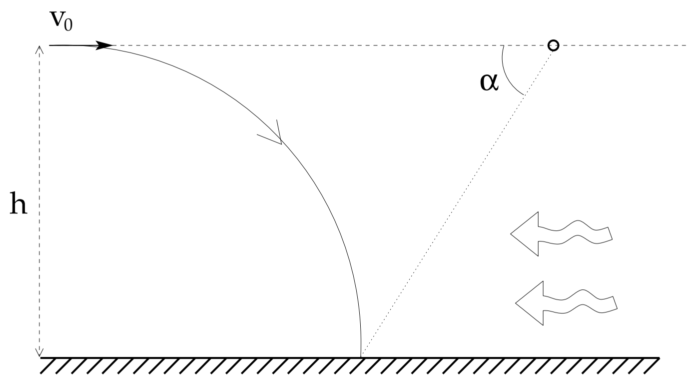
PROBLEMA 1

Un aereo viaggia di moto rettilineo uniforme a una quota costante incognita h dal suolo con velocità (orizzontale) $v_0 = 700$ Km/h. All'istante $t = 0$ l'aereo sgancia una bomba di massa $m = 70$ Kg. Durante tutta la discesa, la bomba è soggetta a un vento che esercita su di essa una forza costante orizzontale contraria alla direzione di moto dell'aereo e di modulo $F = 1500$ N.

1. Si trovi l'angolo α rispetto all'orizzonte sotto cui il pilota dell'aereo vede l'esplosione.

2. Quando si trova a un'altezza $h/2$, la bomba "vede" passargli accanto una pallottola sparata da terra. La velocità istantanea che la pallottola ha in quell'istante, *nel sistema di riferimento della bomba*, vale $v'_p = 150$ m/s ed è diretta verticalmente. Si trovi v_{0p}, velocità della pallottola appena sparata da terra (nel sistema di riferimento solidale al suolo). Si usi $h = 1$ Km *solo in questo punto!*.

Si usi $g = 9.81$ m/s^2. Si trascuri l'effetto del vento sul moto della pallottola e dell'aereo. Si trascuri la resistenza dell'aria sulla bomba lungo la direzione verticale.



Soluzione.

1. Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano Oxy, con l'asse x orizzontale e diretto lungo il moto dell'aereo, l'asse y verticale. Sia l'origine tale che la posizione dell'aereo+bomba all'istante $t = 0$ valga $x = 0$. Poichè la bomba è soggetta a una forza costante diretta in verso opposto all'asse x, anche il moto lungo tale asse è uniformemente (de)celerato. Pertanto, dette x_b e y_b le coordinate della bomba, valgono:

$$x_b(t) = v_0\, t - \frac{1}{2}\frac{F}{m}\, t^2 \tag{1}$$

$$y_b(t) = h - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \tag{2}$$

dove si è sfruttato il fatto che l'accelerazione dovuta al vento lungo l'asse x vale F/m e che la velocità iniziale di P è orizzontale e vale v_0. Detto t_c il tempo di caduta di P, vale $y_b(t_c) = 0$:

$$y_b(t_c) \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad t_c \;=\; \sqrt{\frac{2\,h}{g}} \tag{3}$$

La posizione della bomba al momento della caduta è quindi data:

$$x_b(t_c) \;=\; v_0\sqrt{\frac{2\,h}{g}} - \frac{F\,h}{m\,g} \tag{4}$$

Al tempo t_c la posizione lungo l'asse x dell'aereo, $x_a(t_c)$, vale semplicemente $x_a(t_c) = v_0\, t_c$. Dalla geometria del problema, si vede che l'angolo α è tale che la sua tangente vale il seguente:

$$\tan\alpha \;=\; \frac{h}{x_a(t_c) - x_b(t_c)} \;=\; \frac{m\,g}{F} \tag{5}$$

$$\alpha \;=\; \arctan\left(\frac{m\,g}{F}\right) \;=\; 0.429 \text{ rad} \;=\; 24.60^\circ \tag{6}$$

2. La velocità della bomba a un istante generico t vale:

$$v_{b,x}(t) = v_0 - \frac{F}{m}\,t \tag{7}$$
$$v_{b,y}(t) = -g\,t \tag{8}$$

la bomba si trova a un'altezza $h/2$ all'istante $\sqrt{h/g}$ (basta imporre $y_b(t) = h/2$), da cui nell'istante in cui la bomba "osserva" la pallottola, il suo vettore velocità $\vec{v}_b$ vale:

$$\vec{v}_b \;=\; v_{b,x}\,\hat{\imath} + v_{b,y}\,\hat{\jmath} \;=\; \left(v_0 - \frac{F}{m}\sqrt{\frac{h}{g}}\right)\hat{\imath} - \sqrt{g\,h}\;\hat{\jmath} \tag{9}$$

dove $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ sono i versori degli assi x e y, rispettivamente. La velocità della pallottola nel sistema di riferimento di P, $\vec{v}'_p$, vale:

$$\vec{v}'_p \;=\; v'_p\;\hat{\jmath} \tag{10}$$

Detta $\vec{v}_p$ la velocità della pallottola rispetto al terreno vale, per i moti relativi vale la seguente:

$$\vec{v}'_p \;=\; \vec{v}_p - \vec{v}_b \quad\Rightarrow\quad \vec{v}_p \;=\; \vec{v}'_p + \vec{v}_b \;=\; \left(v_0 - \frac{F}{m}\sqrt{\frac{h}{g}}\right)\hat{\imath} + (v'_p - \sqrt{g\,h})\;\hat{\jmath} \tag{11}$$

$$v_p \;=\; \sqrt{\left(v_0 - \frac{F}{m}\sqrt{\frac{h}{g}}\right)^2 + (v'_p - \sqrt{g\,h})^2} \;=\; 55.46 \text{ m/s} \tag{12}$$

Per trovare v_{0p}, basta applicare la conservazione dell'energia meccanica della pallottola tra l'istante in cui viene sparata da terra e l'istante in cui passa accanto alla bomba (ovvero quando si trova a una quota $h/2$). Detta m_p la massa (incognita) della pallottola, vale:

$$\frac{1}{2}\,m_p\,v_{0p}^2 \;=\; \frac{1}{2}\,m_p\,v_p^2 + m_p\,g\,\frac{h}{2} \tag{13}$$

da cui si ricava v_{0p}:

$$v_{0p} \;=\; \sqrt{v_p^2 + g\,h} \;=\; 113.52 \text{ m/s} \;=\; 408.66 \text{ Km/h} \tag{14}$$

C.V.D.