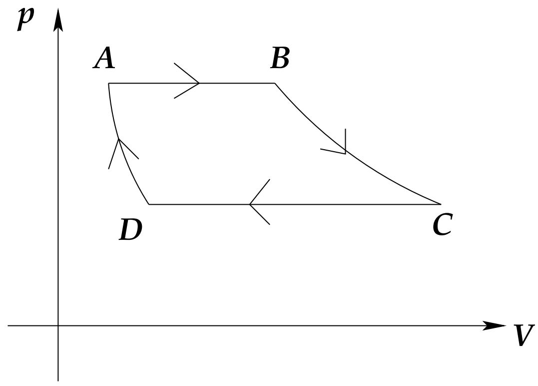
Fisica I. Seconda Sessione AA 2009-10.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 12/07/2010

PROBLEMA 3A (AA 2009-10)

Una mole di gas perfetto monoatomico compie il ciclo di trasformazioni reversibili indicato in figura: in particolare, le trasformazioni AB e CD sono isobare; il tratto BC è un'isoterma e il tratto DA è un'adiabatica. Si conoscono i valori della pressione e volume in D, rispettivamente $p_D = p_0$ e $V_D = 10$ l, dove $p_0 = 1$ bar. La pressione in A vale $p_A = 2\,p_0$. Il calore ricevuto dal gas nel tratto AB vale $Q_{AB} = 700$ cal.

1. Si trovi la temperatura del gas nel punto A, T_A.
2. Si trovi il lavoro totale L compiuto in un ciclo completo.



Soluzione.

1. Il tratto DA è un'adiabatica reversibile, quindi vale la seguente:

$$p_D\,V_D^\gamma \;=\; p_A\,V_A^\gamma \quad\Rightarrow\quad V_A \;=\; V_D\left(\frac{p_D}{p_A}\right)^{1/\gamma} \;=\; 2^{-1/\gamma}\,V_D \;=\; 2^{-3/5}\,V_D \tag{1}$$

   dove $\gamma = c_p/c_v = 5/3$ nel caso di gas perfetto monoatomico.

   Ora in A sono note pressione e volume; si ricava T_A dall'equazione di stato dei gas perfetti:

$$T_A \;=\; \frac{p_A\,V_A}{n\,R} \;=\; \frac{p_A^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\;p_D^{1/\gamma}\;V_D}{n\,R} \;=\; \frac{2^{2/5}}{R}\;p_0\,V_D \;=\; 158.79\ \text{°K} \tag{2}$$

   dove $R = 8.31$ J/(°K mole), $n = 1$, $V_D = 10\ \text{l} = 0.01\ \text{m}^3$.

2. Nel caso di un ciclo completo, il lavoro totale L è uguale al calore totale Q ricevuto dal gas. Questo segue immediatamente dal fatto che vale $\Delta U = 0$ (ciclo completo), e dal primo principio della termodinamica:

$$\Delta U \;=\; Q - L \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad L \;=\; Q \;=\; Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} \tag{3}$$

   Nel tratto DA non si ha scambio di calore, essendo un'adiabatica: $Q_{DA} = 0$. Poichè Q_{AB} è un dato del problema, restano da calcolare Q_{BC} e Q_{CD}. Essendo il tratto BC un'isoterma, dal primo principio segue:

$$0 \;=\; n\,c_v\,\Delta T \;=\; Q_{BC} - L_{BC} \quad\Rightarrow\quad Q_{BC} \;=\; L_{BC} \tag{4}$$

$$Q_{BC} \;=\; L_{BC} \;=\; \int_{V_B}^{V_C} p\,dV \;=\; n\,R\,T_B \int_{V_B}^{V_C}\frac{dV}{V} \;=\; n\,R\,T_B\;\ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) \tag{5}$$

   In un'isoterma vale $p_B\,V_B = p_C\,V_C$, da cui:

$$Q_{BC} \;=\; n\,R\,T_B\;\ln\left(\frac{p_B}{p_C}\right) \;=\; n\,R\,T_B\;\ln 2 \tag{6}$$

Per trovare T_B, basta considerare che il tratto AB è un'isobara di cui è dato il calore scambiato, Q_{AB}, da cui:

$$Q_{AB} \;=\; n\,c_p\,(T_B - T_A) \quad\Rightarrow\quad T_B \;=\; T_A + \frac{Q_{AB}}{n\,c_p} \tag{7}$$

Sostituendo la (7) nella (6) otteniamo finalmente Q_{BC}:

$$Q_{BC} \;=\; n\,R\,\ln 2\left(T_A + \frac{Q_{AB}}{n\,c_p}\right) \;=\; \ln 2\left(R\,T_A + \frac{2}{5}\,Q_{AB}\right) \;=\; 1725.87\text{ J} \;=\; 412.89\text{ cal} \tag{8}$$

Resta da calcolare Q_{CD}. Siamo nel caso di un'altra isobara, per cui vale:

$$Q_{CD} \;=\; n\,c_p\,(T_D - T_C) \;=\; n\,c_p\left(\frac{p_D\,V_D}{n\,R} - T_B\right) \;=\; \frac{5}{2}\,(p_0\,V_D - R\,T_B) \;=\; -3724.77\text{ J} \;=\; -891.09\text{ cal} \tag{9}$$

dove si è sfruttata l'equazione di stato in D e il fatto che $T_B = T_C$.
Sommando tutti e tre i termini si ottiene finalmente:

$$L \;=\; Q \;=\; Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} \;=\; \frac{2}{5}\,\ln 2\;Q_{AB} + \left[2^{2/5}\left(\ln 2 - \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2}\right] p_0\,V_D \;=\; 927.10\text{ J} \tag{10}$$

Ricordiamo che il valore così trovato per L corrisponde graficamente all'area del ciclo nel piano di Clapeyron.

C.V.D.