Fisica I. Seconda Sessione AA 2009-10.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 12/07/2010

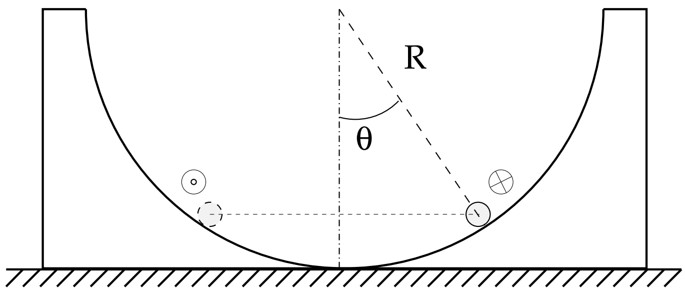
PROBLEMA 2

All'interno di una guida concava semisferica di raggio $R = 80$ cm una pallina di massa $m = 40$ g ruota attorno all'asse verticale della guida con velocità angolare costante ω. L'angolo formato tra la congiungente il centro della sfera con la posizione della pallina e la direzione verticale vale $\theta = 30°$ ed è costante nel tempo (ovvero, in un sistema di riferimento rotante con velocità angolare ω attorno all'asse della semisfera, la pallina risulta ferma).

1. Si trovi il valore di ω, il periodo corrispondente T e il modulo della reazione normale del piano N sulla pallina (si trascuri l'attrito tra il piano della guida e la pallina).

2. Supponendo che il coefficiente di attrito dinamico della guida valga $\mu_d = 0.1$, nell'approssimazione che dopo un giro percorso dalla pallina l'angolo θ sia variato di una quantità molto piccola, si calcoli il lavoro dissipato dall'attrito in un angolo giro, $\mathcal{L}_a$.

Si usi $g = 9.81$ m/s^2 e si consideri la pallina un punto materiale.



Soluzione.

1. In un sistema di riferimento rotante con velocità angolare costante ω attorno all'asse di simmetria della guida semisferica, la pallina è ferma. Su di essa agiscono tre forze: la reazione normale del piano, di modulo N, diretta radialmente verso il centro della semisfera; la forza peso diretta verso il basso) di modulo $m\,g$; la forza centrifuga, diretta orizzontalmente in direzione opposta all'asse di rotazione, dovuta al fatto che la pallina si trova in un sistema non inerziale). Poichè la pallina si trova a distanza $R\,\sin\theta$ dall'asse di rotazione, la forza centrifuga vale in modulo $m\,\omega^2\,R\,\sin\theta$.

   Affichè la pallina sia in equilibrio nel sistema rotante, conviene proiettare la forza risultante lungo le componenti orizzontale e verticale e porre entrambe uguale a zero

$$N\,\cos\theta - m\,g = 0 \tag{1}$$
$$-N\,\sin\theta + m\,\omega^2\,R\,\sin\theta = 0 \tag{2}$$

   Da cui ricava:

$$N = m\,\omega^2\,R \tag{3}$$
$$\omega^2\,R = \frac{g}{\cos\theta} \tag{4}$$

$$\omega \;=\; \sqrt{\frac{g}{R\,\cos\theta}} \;=\; \sqrt{\frac{2\,g}{\sqrt{3}\,R}} \;=\; 3.76 \text{ rad/s} \tag{5}$$

   Il periodo vale semplicemente:

$$T \;=\; \frac{2\,\pi}{\omega} \;=\; 2\,\pi\,\sqrt{\frac{\sqrt{3}\,R}{2\,g}} \;=\; 1.67 \text{ s} \tag{6}$$

$$N \;=\; \frac{m\,g}{\cos\theta} \;=\; \frac{2}{\sqrt{3}}\,m\,g \;=\; 0.45 \text{ N} \tag{7}$$

2. La forza d'attrito dinamico, F_d, vale in modulo $\mu_d\,N$ ed è diretta contrariamente alla velocità della pallina. Il lavoro compiuto da essa in un giro, nell'approssimazione che l'orbita della pallina non sia mutata apprezzabilmente in un giro, vale semplicemente:

$$\mathcal{L}_a \;=\; -F_d\;(2\,\pi\,R\,\sin\theta) \tag{8}$$

poichè lo spazio percorso equivale alla circonferenza descritta dalla pallina, ovvero $2\,\pi\,R\,\sin\theta$; il segno negativo è dovuto al fatto che il lavoro è dissipativo, ovvero che la forza è sempre diretta nel verso opposto allo spostamento. Segue pertanto:

$$\mathcal{L}_a \;=\; -\mu_d\left(\frac{m\,g}{\cos\theta}\right)\,(2\,\pi\,R\,\sin\theta) \;=\; -2\,\pi\,\mu_d\,m\,g\,R\;\tan\theta \;=\; -\frac{2\,\pi}{\sqrt{3}}\,\mu_d\,m\,g\,R \;=\; -0.11\ \mathrm{J} \tag{9}$$

C.V.D.