Fisica I. Terza Sessione AA 2009-10.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 06/09/2010

PROBLEMA 2

Una sonda spaziale di massa $m = 200$ Kg a forma di disco omogeneo di raggio $r = 3$ m è in orbita circolare attorno a Giove a una distanza dal centro del pianeta pari a $R = 5 \times 10^5$ Km. Inizialmente la sonda mantiene un orientamento costante rispetto alle stelle fisse (ovvero non ruota attorno al proprio asse). La massa di Giove vale $M_G = 1.9 \times 10^{27}$ Kg.

1. Si calcoli il periodo di rivoluzione della sonda attorno a Giove, T_0.
2. A un certo punto degli ugelli della sonda espellono del gas per un intervallo di tempo $\Delta t = 50$ minuti, esercitando così una coppia costante di forze il cui momento vale $\tau = 2000$ N·m. Si calcoli l'energia cinetica finale K_f della sonda e si dica se il periodo di rivoluzione attorno a Giove cambia.

La costante di gravitazione universale vale $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3 Kg^{-1} s^{-2}.

Soluzione.

1. La sonda è in orbita circolare. Applicando la prima legge cardinale della dinamica (essendo un corpo rigido e non un punto materiale), possiamo considerare tutta la massa concentrata nel centro di massa. L'equilibrio che governa l'orbita circolare è tale per cui in ogni istante la forza centrifuga eguaglia la forza di attrazione gravitazionale esercitata da Giove:

$$\frac{G\, M_G\, m}{R^2} \;=\; m\left(\frac{2\,\pi}{T_0}\right)^2 R \quad\Rightarrow\quad T_0 \;=\; 2\,\pi\,\sqrt{\frac{R^3}{G\, M_G}} \;=\; 1.97\times 10^5 \text{ s} \;=\; 2.28 \text{ giorni} \tag{1}$$

   Naturalmente la (1) è equivalente alla terza legge di Keplero (per i corpi orbitanti attorno a Giove!).

2. Prima dell'espulsione del gas dagli ugelli, il momento angolare iniziale della sonda è nullo, $L_0 = 0$, in quanto a orientamento costante. Applicando la seconda legge cardinale della dinamica, vale:

$$\frac{dL}{dt} \;=\; \tau \tag{2}$$

   Integrando la (2) è semplice, in quanto τ è costante, da cui segue:

$$\Delta L \;=\; L_f - L_0 \;=\; L_f \;=\; \tau\,\Delta t \tag{3}$$

   Per il teorema di König, l'energia cinetica totale della sonda è costituita da due termini: quello traslazionale, dovuto alla velocità con cui orbita attorno a Giove, e quello rotazionale, attorno al proprio asse. Il secondo, $K_{\rm rot}$, vale:

$$K_{\rm rot} \;=\; \frac{1}{2}\, I_c\,\omega^2 \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{L_f^2}{I_c} \;=\; \frac{(\tau\,\Delta t)^2}{m\,r^2} \;=\; 2\times 10^{10} \text{ J} \tag{4}$$

   dove $I_c = 1/2\, m\, r^2$ è il momento d'inerzia della sonda rispetto al proprio asse.
   Il termine traslazionale, $K_{\rm tr}$, è dato semplicemente dalla velocità del centro di massa, ricavabile dai dati del punto precedente:

$$K_{\rm tr} \;=\; \frac{1}{2}\, m\, v^2 \;=\; \frac{1}{2}\, m\left(\frac{2\,\pi\, R}{T_0}\right)^2 \;=\; \frac{G\, M_G\, m}{2\, R} \;=\; 2.53\times 10^{10} \text{ J} \tag{5}$$

   L'energia cinetica totale vale quindi:

$$K_f \;=\; K_{\rm rot} + K_{\rm tr} \;=\; 4.53\times 10^{10} \text{ J} \tag{6}$$

   L'orbita e quindi il periodo di rivoluzione della sonda attorno a Giove naturalmente non cambiano in seguito all'espulsione del gas, in quanto la coppia di forze ha una risultante nulla (in quanto coppia di forze uguali e opposte, ma ovviamente non un momento risultante nullo!) e per la prima legge cardinale della dinamica, il centro di massa della sonda non ha risentito di alcuna forza aggiuntiva rispetto a quelle discusse nel punto precedente.

C.V.D.