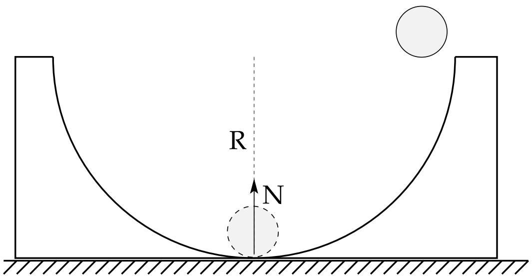
Fisica I. Prima Sessione AA 2010-11.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 24/01/2011

PROBLEMA 3

All'interno di un canale artificiale di sezione semicircolare di raggio $R = 7$ m e privo di acqua viene fatta cadere, da ferma, una sfera omogenea di massa $m = 3$ Kg e di raggio r incognito. L'altezza iniziale del suo centro di massa dal fondo del canale vale esattamente $R + r$ (v. figura). Durante tutto il moto di caduta sulla parete del canale, la sfera rotola senza strisciare.

1. Si trovi la velocità del centro di massa della sfera, v_c, quando raggiunge il fondo del canale.
2. Si trovi il valore di N, componente normale della reazione esercitata dal fondo del canale sulla sfera. Se fosse stato $R = 14$ m, quanto varrebbe N?

Si usi $g = 9.81$ m/s^2 e si trascuri l'attrito dell'aria sul moto della sfera.



Soluzione.

1. L'attrito volvente non compie alcun lavoro, in quanto il punto di applicazione della forza di attrito è istantaneamente fermo. Si conserva pertanto l'energia meccanica della sfera.

$$m\,g\,(R+r) \;=\; m\,g\,r + \frac{1}{2}\,m\,v_c^2 + \frac{1}{2}\,I\,\omega^2 \tag{1}$$

dove l'energia cinetica è stata espressa secondo i dettami del teorema di König, in cui ω è la velocità angolare della sfera in un sistema solidale al suo centro di massa C e ad orientamento fisso. $I = (2/5)\,m\,r^2$ è il momento d'inerzia di una sfera omogenea rispetto a un asse passante per il suo centro. Per il vincolo di rotolamento, $v_c = \omega\,r$, segue:

$$m\,g\,R \;=\; \frac{1}{2}\,m\,v_c^2 + \frac{1}{2}\,I\left(\frac{v_c}{r}\right)^2 \tag{2}$$

da cui segue immediatamente:

$$v_c^2 = \frac{2\,g\,R}{1 + I/m\,r^2} \;=\; \frac{10}{7}\,g\,R \quad\Rightarrow\quad v_c \;=\; \sqrt{\frac{10}{7}\,g\,R} \;=\; 9.90 \text{ m/s} \tag{3}$$

2. Conosciamo il moto del centro di massa C, in particolare il fatto che percorre un tratto di circonferenza. Quando si trova al fondo del canale, in particolare, conosciamo la sua velocità v_c calcolata nel punto precedente. Pertanto la componente radiale della accelerazione vale necessariamente $a_c = v_c^2/R$. Tenendo presente questo e applicando la prima equazione cardinale della dinamica alla sfera quando si trova sul fondo del canale, segue:

$$N - m\,g \;=\; m\,a_c \;=\; m\,\frac{v_c^2}{R} \tag{4}$$

Sostituendo la (3) nella (4) si ottiene:

$$N - m\,g \;=\; \frac{10}{7}\,m\,g \quad\Rightarrow\quad N \;=\; \frac{17}{7}\,m\,g \;=\; 71.47 \text{ N} \tag{5}$$

Chiaramente dalla (5) non compare alcuna dipendenza dal valore di R, pertanto anche qualora valesse $R = 14$ m il valore di N rimarrebbe lo stesso.

C.V.D.