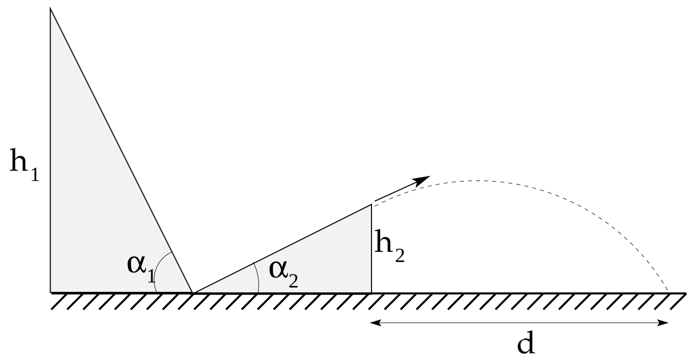
Fisica I. Prima Sessione AA 2010-11.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 24/01/2011

PROBLEMA 1

Un trampolino per il lancio con gli sci è costituito da due rampe di altezza $h_1 = 60$ m e $h_2 = 40$ m ed angoli $\alpha_1 = 60°$ e $\alpha_2 = 30°$, rispettivamente, come in figura. Si trascuri l'estensione del tratto di curvatura dolce di raccordo fra le due rampe.

1. Supponendo che le due rampe siano prive di attrito, si calcoli la distanza d dalla base della seconda rampa del punto in cui atterra uno sciatore che parta da fermo.
2. Assumendo che le due rampe presentino attrito con coefficiente di attrito dinamico $f_d = 0.1$, si calcoli la velocità v_a che ha lo sciatore quando spicca il volo (sempre partendo da fermo).

Si usi $g = 9.81$ m/s^2 e si trascuri l'effetto dell'attrito dell'aria sul moto dello sciatore.



Soluzione.

1. Poichè le rampe non presentano attrito, l'energia meccanica dello sciatore è sempre conservata. Applicando quindi la conservazione dell'energia meccanica tra il punto di partenza e il punto in cui spicca il volo, è possibile determinare la velocità v_0 con cui inizia il volo sospeso:

$$m\,g\,h_1 \;=\; m\,g\,h_2 + \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 \;=\; \sqrt{2\,g\,(h_1 - h_2)} \tag{1}$$

Prendendo un sistema cartesiano con origine O alla base della seconda rampa, asse y verticale ed asse x orizzontale con verso positivo diretto lungo la direzione di moto dello sciatore, il suo moto è descritto dalla:

$$x(t) = v_0\,\cos\alpha_2\,t \tag{2}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,\sin\alpha_2\,t + h_2 \tag{3}$$

Per trovare d, basta trovare prima il tempo di caduta t_c, imponendo $y(t_c) = 0$:

$$y(t_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad g\,t_c^2 - 2\,v_0\,\sin\alpha_2\,t_c - 2\,h_2 \;=\; 0 \tag{4}$$

$$t_c \;=\; \frac{v_0\,\sin\alpha_2 + \sqrt{v_0^2\,\sin^2\alpha_2 + 2\,g\,h_2}}{g} \;=\; \frac{v_0}{g}\,\left(\sin\alpha_2 + \sqrt{\sin^2\alpha_2 + \frac{2\,g\,h_2}{v_0^2}}\right) \tag{5}$$

La distanza d è uguale alla gittata, ovvero a $x(t_c)$, che vale:

$$d \;=\; x(t_c) \;=\; v_0\,\cos\alpha_2\,t_c \;=\; \frac{v_0^2}{g}\,\cos\alpha_2\,\left(\sin\alpha_2 + \sqrt{\sin^2\alpha_2 + \frac{2\,g\,h_2}{v_0^2}}\right) \tag{6}$$

Dalla (1) sappiamo che vale $v_0^2/g = 2\,(h_1 - h_2)$. Usando $\cos\alpha_2 = \sqrt{3}/2$ e $\sin\alpha_2 = 1/2$ e sostituendo nella (6):

$$d \;=\; \sqrt{3}\,(h_1 - h_2)\,\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{h_2}{h_1 - h_2}}\right) \tag{7}$$

$$d \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}\,(h_1 - h_2)\,\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\,h_2}{h_1 - h_2}}\right) \;=\; 40\,\sqrt{3}\text{ m} \;=\; 69.28\text{ m} \tag{8}$$

2. Questa volta l'attrito dinamico produce un lavoro dissipativo che riduce l'energia meccanica dello sciatore man mano che questi procede lungo le rampe. Detto $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ il lavoro complessivo della forza d'attrito, somma dei singoli contributi lungo la rampa 1 e 2, rispettivamente, si ha:

$$E_f - E_i \;=\; \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad (\frac{1}{2}\, m\, v_a^2 + m\, g\, h_2) - m\, g\, h_1 \;=\; \mathcal{L} \tag{9}$$

$$v_a^2 \;=\; 2\, g\, (h_1 - h_2) + \frac{2\, \mathcal{L}}{m} \tag{10}$$

Procediamo al calcolo di $\mathcal{L}_1$. Detto $F_{d,1}$ la forza d'attrito dinamico agente sulla rampa 1, contraria al moto e parallela al piano inclinato, detto $s_1 = h_1 / \sin\alpha_1$ lo spazio percorso sulla rampa 1, segue:

$$\mathcal{L}_1 \;=\; -F_{d,1}\, s_1 \;=\; -(f_d\, N_1)\, s_1 \tag{11}$$

dove N_1 è la componente normale al piano della reazione della rampa 1 e vale $m\, g\, \cos\alpha_1$, da cui:

$$\mathcal{L}_1 \;=\; -F_{d,1}\, s_1 \;=\; -f_d\, m\, g\, \cos\alpha_1\, \frac{h_1}{\sin\alpha_1} \;=\; -f_d\, m\, g\, h_1\, \cot\alpha_1 \;=\; -\frac{1}{\sqrt{3}}\, f_d\, m\, g\, h_1 \tag{12}$$

Analogamente, si ha:

$$\mathcal{L}_2 \;=\; -f_d\, m\, g\, h_2\, \cot\alpha_2 \;=\; -\sqrt{3}\, f_d\, m\, g\, h_2 \tag{13}$$

Da cui $\mathcal{L}$ vale:

$$\mathcal{L} \;=\; \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \;=\; -\frac{f_d\, m\, g}{\sqrt{3}}\, \Big(h_1 + 3\, h_2\Big) \tag{14}$$

Sostituendo la (14) nella (10) si ottiene finalmente v_a:

$$v_a^2 \;=\; 2\, g\, (h_1 - h_2) - \frac{2\, f_d\, g}{\sqrt{3}}\, (h_1 + 3\, h_2) \;=\; 2\, g\, \Big[\Big(1 - \frac{f_d}{\sqrt{3}}\Big)\, h_1 - (\sqrt{3}\, f_d + 1)\, h_2\Big] \tag{15}$$

$$v_a \;=\; \sqrt{2\, g\, (0.942\, h_1 - 1.173\, h_2)} \;=\; 13.72 \text{ m/s} \tag{16}$$

C.V.D.