Fisica I. Prima Sessione AA 2010-11.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 14/02/2011

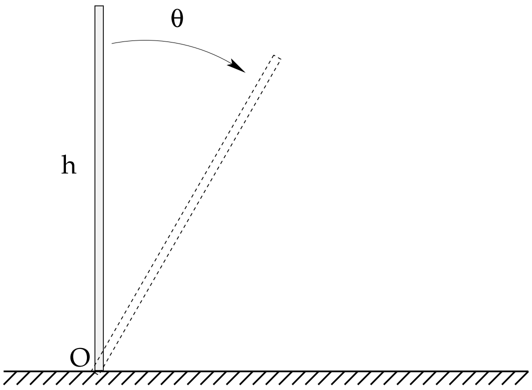
PROBLEMA 3

Un palo della luce di altezza $h = 5$ m e massa $m = 30$ Kg è inizialmente piantato, fermo, in posizione verticale, fissato al terreno al punto O (v. figura). A un certo punto il palo inizia a cadere rimanendo fissato al terreno al punto O e con velocità iniziale nulla. Si tratti il palo come un'asta omogenea.

1. Calcolare la velocità finale v_f con cui l'estremo superiore del palo impatta sul terreno. Come è rispetto a quella che avrebbe un punto materiale in caduta libera dalla stessa altezza h, partendo da fermo?

2. Detto θ l'angolo tra la verticale e il palo a un generico istante durante la caduta, determinare la componente radiale F_R (ovvero parallela al palo stesso) della reazione vincolare che tiene il palo incernierato al punto O quando vale $\theta = 60°$.

Si usi $g = 9.81$ m/s^2 e si trascuri l'attrito dell'aria.



Soluzione.

1. Oltre alla forza di gravità l'unica altra forza esterna agente sul palo è la reazione vincolare nel punto O. Poichè tale punto rimane fermo durante tutto il moto, la reazione vincolare non compie alcun lavoro. Pertanto durante il moto di caduta si conserva l'energia meccanica della sbarra. Tenendo conto che l'altezza iniziale del centro di massa del palo vale $h/2$, segue:

$$m\,g\,\frac{h}{2} \;=\; \frac{1}{2}\,I_O\,\omega_f^2 \tag{1}$$

dove con $I_0 = 1/3\,m\,h^2$ s'intende il momento d'inerzia del palo rispetto a un estremo (il punto O, nel caso specifico), in quanto asta omogenea di massa m e lunghezza h. Con ω_f indichiamo la velocità angolare finale del palo immediatamente prima di cadere a terra.

$$m\,g\,\frac{h}{2} \;=\; \frac{1}{6}\,m\,(h\,\omega_f)^2 \quad\Rightarrow\quad \omega_f \;=\; \sqrt{3\,\frac{g}{h}} \tag{2}$$

La velocità v_f è semplicemente:

$$v_f \;=\; h\,\omega_f \;=\; \sqrt{3\,g\,h} \;=\; 12.13 \text{ m/s} \tag{3}$$

Tale velocità è superiore a quella che avrebbe un punto materiale in caduta libera, da fermo, da un'altezza h, che invece sarebbe $\sqrt{2\,g\,h}$.

2. Applicando la conservazione dell'energia meccanica del punto precedente, questa volta tra l'istante iniziale (in cui l'energia è tutta sotto forma di energia potenziale gravitazionale) e quella generica in cui il palo forma un angolo θ con la verticale, segue:

$$m\,g\,\frac{h}{2} \;=\; m\,g\,\frac{h}{2}\,\cos\theta \;+\; \frac{1}{2}\,I_O\,\omega_\theta^2 \tag{4}$$

dove con ω_θ s'intende la velocità angolare istantanea del palo in corrispondenza di un generico θ. Segue:

$$\omega_\theta \;=\; \sqrt{\frac{3\,g\,(1-\cos\theta)}{h}} \tag{5}$$

Durante il moto di caduta ciascun punto del palo descrive un moto circolare. In particolare, questo vale per il centro di massa C del palo. Da questo sappiamo che la componente radiale dell'accelerazione di C, a_C, è diretta verso il centro e vale in modulo $\omega_\theta^2/(h/2)$, dove si tiene conto che il raggio dell'arco di cerchio descritto da C vale $h/2$.

Applicando la prima legge cardinale della dinamica al palo e prendendo come verso positivo quello radiale uscente, deve valere:

$$F_R - m\,g\,\cos\theta \;=\; m\,a_C \;=\; -m\,\omega_\theta^2\,\frac{h}{2} \tag{6}$$

dove si è proiettata radialmente anche la forza peso del palo. Sostituendo la (5) nella (6) segue:

$$F_R - m\,g\,\cos\theta \;=\; -\frac{3}{2}\,m\,g\,(1-\cos\theta) \tag{7}$$

$$F_R \;=\; \frac{1}{2}\,m\,g\,(5\,\cos\theta - 3) \tag{8}$$

La (8) vale per un generico valore di θ. Per il caso particolare di $\theta = 60°$ segue:

$$F_R \;=\; \frac{1}{2}\,m\,g\,(5\,\frac{1}{2} - 3) \;=\; -\frac{1}{4}\,m\,g \;=\; -73.58\ \mathrm{N} \tag{9}$$

Il segno negativo sta a indicare che la componente radiale è diretta verso il punto O.

C.V.D.