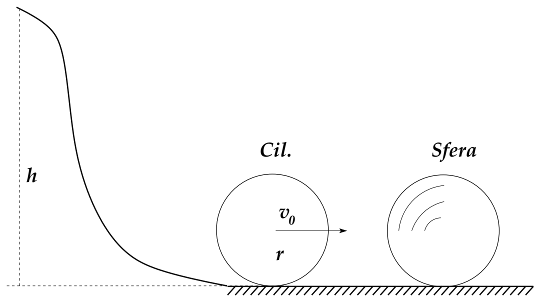
Fisica I. Seconda Sessione AA 2010-11.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 11/07/2011

PROBLEMA 3

Un cilindro omogeneo di massa $m = 10$ Kg e raggio incognito r rotola senza strisciare su un piano orizzontale con una velocità $v_0 = 54$ Km/h dopo essere sceso da un'altezza incognita h, partendo da fermo. Il cilindro rotola senza strisciare durante tutto il suo moto di caduta.

1. Trovare h (si consideri $r \ll h$).
2. In seguito a un urto con una sfera di uguale massa e raggio inizialmente ferma, il cilindro si arresta completamente mentre la sfera rotola senza strisciare. Determinare la quantità di energia dissipata durante l'urto.

Si usi $g = 9.81$ m/s^2 e si trascuri l'attrito dell'aria. Si trascuri r rispetto ad h.



Soluzione.

1. Durante il moto di caduta non si ha dissipazione di energia meccanica del cilindro. Quindi dalla conservazione dell'energia meccanica segue:

$$m\,g\,h \;=\; \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + \frac{1}{2}\,I_c\,\omega^2 \tag{1}$$

dove $I_c = 1/2\;m\,r^2$ è il momento d'inerzia di un cilindro omogeneo rispetto al suo asse centrale e ω è la sua velocità angolare. Quest'ultima per il vincolo di rotolamento senza strisciamento vale anche v_0/r, da cui

$$m\,g\,h \;=\; \frac{1}{2}\,v_0^2\left(m + \frac{I_c}{r^2}\right) \tag{2}$$

$$m\,g\,h \;=\; \frac{1}{2}\,v_0^2\left(m + \frac{m}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad h \;=\; \frac{3}{4}\,\frac{v_0^2}{g} \;=\; 17.20\ \text{m} \tag{3}$$

2. Durante l'urto le uniche forze esterne sono quelle di attrito volvente, applicate a ciascun punto di contatto del cilindro e della sfera al suolo e parallele a esso. Quindi a conservarsi è il momento angolare totale rispetto a un qualunque punto fisso del terreno preso come polo (rispetto al quale entrambe le forze di attrito hanno momento nullo).

$$r\,m\,v_0 + I_c\,\frac{v_0}{r} \;=\; r\,m\,v_f + I_s\,\frac{v_f}{r} \tag{4}$$

dove v_f è la velocità della sfera subito dopo l'urto. Usando anche $I_s = 2/5\;m\,r^2$, si ricava immediatamente v_f:

$$v_0\left(1 + \frac{I_c}{m\,r^2}\right) \;=\; v_f\left(1 + \frac{I_s}{m\,r^2}\right) \tag{5}$$

$$\frac{3}{2}\,v_0 \;=\; \frac{7}{5}\,v_f \quad\Rightarrow\quad v_f \;=\; \frac{15}{14}\,v_0 \tag{6}$$

Il lavoro prodotto dalle forze interne agenti durante l'urto è dato dalla variazione di energia cinetica,

$$\Delta K \;=\; K_s - K_c \tag{7}$$

dove K_s è l'energia cinetica della sfera (dopo l'urto) e K_c è l'energia cinetica del cilindro (prima dell'urto). Anche per la sfera vale il vincolo di rotolamento, per cui K_s vale

$$K_s \;=\; \frac{1}{2}\, v_f^2 \left(m + \frac{I_s}{r^2}\right) \;=\; \frac{7}{10}\, m\, v_f^2 \tag{8}$$

dove si è usato $I_s = 2/5\; m\, r^2$.

$$\Delta K \;=\; \frac{7}{10}\, m\, v_f^2 - \frac{3}{4}\, m\, v_0^2 \;=\; \frac{3}{56}\, m\, v_0^2 \;=\; 120.5 \text{ J} \tag{9}$$

essendo $\Delta K > 0$ l'energia cinetica cresce un po'. L'energia è stata fornita dalle forze interne durante l'urto, quindi invece di avere dissipazione si ha un incremento di energia. Si noti che la quantità di moto totale non è rigorosamente conservata durante l'urto (nel quale caso sarebbe stato $v_f = v_0$) a causa delle forze di attrito volvente, le quali agiscono impulsivamente per far sì che il rotolamento avvenga senza strisciamento.

C.V.D.