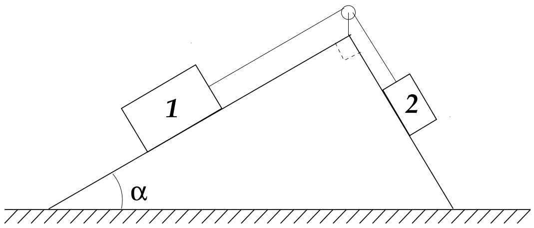
Fisica I. Prima Sessione AA 2011-12.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 09/01/2012

PROBLEMA 1

Un piano inclinato a forma di triangolo rettangolo con un angolo $\alpha = 30°$ poggia orizzontalmente sulla propria ipotenusa. Sui cateti poggiano due blocchi di massa $m_1 = 5$ Kg e $m_2 = 4$ Kg, rispettivamente. I due sono collegati da una fune inestensibile e di massa trascurabile.

1. Supponendo che entrambi i cateti siano privi di attrito, si dica con quale tipo di moto si muovono i blocchi e si trovi T, il modulo della tensione della fune.
2. In alternativa al punto precedente, si supponga che il solo cateto 1, su cui poggia il blocco 1, presenti attrito il cui coefficiente di attrito statico vale $f_s = 0.2$. Supponendo che entrambe le masse m_1 e m_2 siano incognite, si trovi il valore minimo $r_{\min}$ del rapporto $r = m_1/m_2$ affinchè il sistema dei due blocchi possa scendere dal lato del blocco 1.



Soluzione.

1. Applichiamo la seconda legge della dinamica a ciascuno dei due blocchi. Detta $\vec{T}_1$ la forza esercitata dalla fune sul blocco 1 e detta $\vec{T}_2$ quella esercitata dalla fune sul blocco 2, segue

$$m_1\,\vec{a}_1 = m_1\,\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 \tag{1}$$
$$m_2\,\vec{a}_2 = m_2\,\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 \tag{2}$$

dove $\vec{N}_1$ ed $\vec{N}_2$ sono le reazioni normali dei cateti sui rispettivi blocchi. Per l'inestensibilità della fune vale $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$. Avendo la fune massa trascurabile, vale anche $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$.

Detto β l'angolo opposto ad α, vale banalmente $\beta = 90° - \alpha = 60°$.

Proiettando le equazioni (1) e (2) lungo le direzioni parallele ai propri piani inclinati,

$$m_1\,a = m_1\,g\,\sin\alpha - T \tag{3}$$
$$m_2\,a = T - m_2\,g\,\sin\beta \;=\; T - m_2\,g\,\cos\alpha \tag{4}$$

dove abbiamo preso come verso positivo quello che vede scendere il blocco 1 (qualora fosse vero il contrario, si otterrebbe un valore negativo per a). Pertanto dalle (3) e (4) segue che il moto di entrambi i blocchi è uniformemente accelerato, essendo a costante nel tempo. Per trovare T basta risolvere il sistema (3-4) nelle due incognite a e T. Un modo veloce per trovare la sola T è quello di moltiplicare la (3) per m_2, la (4) per m_1,

$$m_1\,m_2\,a = m_1\,m_2\,g\,\sin\alpha - m_2\,T \tag{5}$$
$$m_1\,m_2\,a = m_1\,T - m_1\,m_2\,g\,\cos\alpha \tag{6}$$

e di sottrarre membro a membro la (6) dalla (5),

$$0 \;=\; m_1\,m_2\,g\,(\sin\alpha + \cos\alpha) - (m_1 + m_2)\,T \tag{7}$$

$$T \;=\; \frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\,g\,(\sin\alpha + \cos\alpha) \;=\; 29.8\text{ N} \tag{8}$$

2. Riapplicando la seconda legge della dinamica ai due blocchi, l'unica differenza rispetto al caso precedente è la presenza di una forza aggiuntiva per il blocco 1, ovvero la forza di attrito statico, $\vec{F}_s$:

$$m_1\,\vec{a}_1 = m_1\,\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_s \tag{9}$$

$$m_2\,\vec{a}_2 = m_2\,\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 \tag{10}$$

Essendo interessati al caso limite, consideriamo il caso in cui $\vec{F}_s$ ha il modulo massimo, ovvero $F_s = F_{s,\max} = f_s\,N_1$. Proiettando la (9) normalmente al piano si trova subito N_1:

$$N_1 \;=\; m_1\,g\,\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad F_s \;=\; f_s\,m_1\,g\,\cos\alpha \tag{11}$$

Il verso di $\vec{F}_s$ è contrario al verso del moto. Poichè si vuole che sia $a > 0$ (avendo scelto come verso positivo quello in cui il blocco 1 scende) proiettando parallelamente al piano, analogamente a quanto fatto nelle (3-4) si ha stavolta

$$m_1\,a = m_1\,g\,\sin\alpha - T - f_s\,m_1\,g\,\cos\alpha \tag{12}$$

$$m_2\,a = T - m_2\,g\,\sin\beta \;=\; T - m_2\,g\,\cos\alpha \tag{13}$$

Sommando membro a membro le (12) e (13), imponiamo $a > 0$

$$0 \;<\; (m_1 + m_2)\,a \;=\; (m_1\,\sin\alpha - f_s\,m_1\,\cos\alpha - m_2\,\cos\alpha)\,g \tag{14}$$

dividendo per m_2 e usando la definizione di $r = m_1/m_2$

$$(\sin\alpha - f_s\,\cos\alpha)\;r - \cos\alpha \;>\; 0 \tag{15}$$

$$r \;>\; \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha - f_s\,\cos\alpha} \;=\; \frac{1}{\tan\alpha - f_s} \tag{16}$$

Pertanto il valore minimo di r, $r_{\min}$ vale

$$r \;>\; r_{\min} \;=\; \frac{1}{\tan\alpha - f_s} \;=\; 2.65 \tag{17}$$

C.V.D.