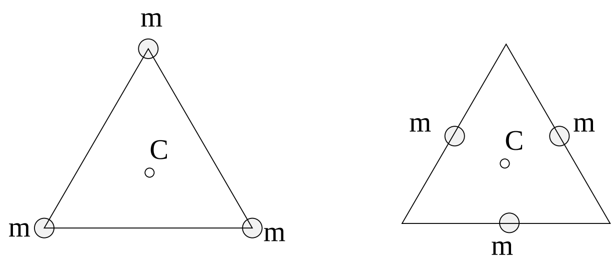
Fisica I. Prima Sessione AA 2011-12.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 09/01/2012

PROBLEMA 3

È data una piattaforma omogenea di massa $M = 3\,m$ con $m = 40$ Kg e di forma pari a un triangolo equilatero di lato $l = 5$ m sulla superficie di un lago ghiacciato. Detto C il baricentro della piattaforma, questo si muove di moto rettilineo uniforme sul ghiaccio con velocità $v_0 = 2$ Km/h, mentre la piattaforma ruota attorno al proprio asse con velocità angolare costante $\omega_0 = 0.3$ rad/s. Su ciascuno dei vertici della piattaforma è posto un bambino di massa m (v. figura, pannello di sinistra).

1. Si trovi K_0, l'energia cinetica totale del sistema piattaforma + bambini.
2. A un certo punto i bambini si spostano sul punto medio di ciascun lato della piattaforma (pannello di destra). Si trovi la velocità angolare finale della piattaforma, ω_f.

Il momento d'inerzia di un triangolo equilatero omogeneo di massa M e lato l rispetto all'asse passante per il baricentro e normale al triangolo stesso vale $I_c = \frac{5}{12}\,M\,l^2$.
Si considerino i bambini puntiformi e si trascuri l'attrito del ghiaccio.



Soluzione.

1. Per il teorema di König spezziamo K_0 in due termini, quello traslazionale e quello rotazionale, da cui

$$K_0 \;=\; \frac{1}{2}\,(M + 3\,m)\,v_0^2 + \frac{1}{2}\,I_0\,\omega_0^2 \tag{1}$$

dove $(M + 3\,m)$ è la massa totale del sistema e con I_0 indichiamo il momento d'inerzia totale rispetto all'asse verticale passante per C. Quest'ultimo è la somma del momento della piattaforma e dei contributi dei singoli bambini. Detta d_0 la distanza di ciascun bambino da C, vale $d_0 = l/\sqrt{3}$.

$$I_0 \;=\; I_c + 3\,m\,d_0^2 \;=\; \frac{5}{12}\,M\,l^2 + m\,l^2 \;=\; \frac{9}{4}\,m\,l^2. \tag{2}$$

dove si è usato $M = 3m$ e l'espressione per I_c.

$$K_0 \;=\; 3\,m\,v_0^2 + \frac{9}{8}\,m\,(\omega_0\,l)^2 \;=\; 138.3 \text{ J} \tag{3}$$

2. Il momento risultante delle forze esterne sul sistema piattaforma + bambini è nullo, in quanto le uniche forze agenti sul sistema durante lo spostamento dei bambini sono interne al sistema e quindi non alterano il momento angolare totale dello stesso. Imponendo la conservazione del momento angolare totale,

$$I_0\,\omega_0 \;=\; I_f\,\omega_f \tag{4}$$

dove I_f è il momento d'inerzia totale finale del sistema. L'unica variazione è data dal contributo ad esso dei bambini, pertanto detta d_f la distanza finale dei bambini da C, si ha $d_f = d_0/2$ ovvero $d_f = l/2\sqrt{3}$.

$$I_f \;=\; I_c + 3\,m\,d_f^2 \;=\; \frac{5}{12}\,M\,l^2 + \frac{1}{4}\,m\,l^2 \;=\; \frac{3}{2}\,m\,l^2. \tag{5}$$

$$\omega_f \;=\; \frac{I_0}{I_f}\,\omega_0 \;=\; \frac{3}{2}\,\omega_0 \;=\; 0.45 \text{ rad/s} \tag{6}$$

C.V.D.