Fisica I. Seconda Sessione AA 2011-12.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 15/06/2012

PROBLEMA 1

Ai nastri di partenza di un percorso rettilineo sono dati un punto materiale, una sfera omogenea e un cilindro omogeneo, ciascuno di massa incognita m e tutti con la stessa energia cinetica iniziale. La sfera e il cilindro rotolano senza strisciare. Al tempo $t = 0$ tutti e tre partono dalla stessa posizione. Sia v_0 la velocità iniziale incognita del punto materiale.

1. Al tempo $t_1 = 3$ minuti la distanza che separa la sfera dal cilindro è pari a $l = 200$ m. Determinare v_0.
2. Il punto materiale è soggetto a una decelerazione costante in modulo pari ad $a = 2$ m/s^2. Detto t_a il tempo di arresto del punto materiale, determinare gli spazi percorsi dagli altri due corpi al tempo t_a: $x_s(t_a)$, lo spazio percorso dalla sfera, e $x_c(t_a)$, lo spazio percorso dal cilindro.

Soluzione.

1. Siano v_s e v_c le velocità del centro di massa della sfera e del cilindro, rispettivamente. Poich'e tutti hanno la stessa energia cinetica iniziale del punto materiale, vale:

$$\frac{1}{2}\, m\, v_0^2 \;=\; \frac{1}{2}\, m\, v_s^2 + \frac{1}{2}\, I_s\, \omega_s^2 \,, \tag{1}$$

dove $I_s = (2/5)\, m\, r^2$ è il momento d'inerzia della sfera. Dal vincolo di rotolamento senza strisciamento, $\omega_s = v_s/r$, dove r è il raggio della sfera.

$$v_0^2 \;=\; v_s^2 \left(1 + \frac{I_s}{m\, r^2}\right) \quad \Rightarrow \quad v_s \;=\; \sqrt{\frac{5}{7}}\, v_0 \,. \tag{2}$$

Analogamente, per il cilindro, il cui momento d'inerzia è $I_c = (1/2)\, m\, r^2$, vale

$$v_0^2 \;=\; v_c^2 \left(1 + \frac{I_c}{m\, r^2}\right) \quad \Rightarrow \quad v_c \;=\; \sqrt{\frac{2}{3}}\, v_0 \,. \tag{3}$$

Poichè $v_s > v_c$, la distanza relativa tra sfera e cilindro in funzione del tempo t vale $(v_s - v_c)\, t$. Imponendo che al tempo t_1 valga l, si trova v_0:

$$v_0 \left(\sqrt{\frac{5}{7}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) t_1 \;=\; l \quad \Rightarrow \quad v_0 \;=\; \frac{l}{\left(\sqrt{\frac{5}{7}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) t_1} \;=\; 38.8 \text{ m/s} \,. \tag{4}$$

2. Detta $v_p(t)$ la velocità del punto materiale al tempo t, essendo un moto uniformemente decelarato, vale:

$$v_p(t) \;=\; v_0 - a\, t \,, \tag{5}$$

da cui si ricava immediatamente il tempo di arresto t_a:

$$v_p(t_a) \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad t_a \;=\; \frac{v_0}{a} \,. \tag{6}$$

Entrambi la sfera e il cilindro si muovono di moto rettilineo uniforme, da cui segue:

$$x_s(t_a) \;=\; v_s\, t_a \;=\; \sqrt{\frac{5}{7}}\, \frac{v_0^2}{a} \;=\; 635.2 \text{ m} \tag{7}$$

e analogamente

$$x_c(t_a) \;=\; v_c\, t_a \;=\; \sqrt{\frac{2}{3}}\, \frac{v_0^2}{a} \;=\; 613.7 \text{ m} \,. \tag{8}$$

C.V.D.