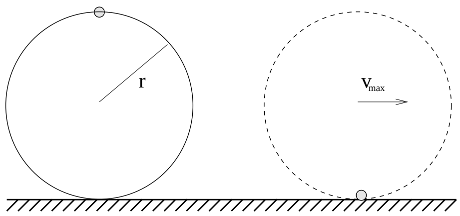
Fisica I. Seconda Sessione AA 2011-12.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 15/06/2012

PROBLEMA 3

Un cilindro *non* omogeneo di raggio $r = 50$ cm e massa m ha il proprio centro di massa coincidente con il centro geometrico e ha un momento d'inerzia rispetto all'asse centrale pari a $I = c\, m\, r^2$, con c coefficiente incognito. In cima a tale cilindro, inizialmente fermo, viene incollato un punto materiale di uguale massa m. Il momento d'inerzia finale del cilindro col punto materiale incollato rispetto all'asse centrale è 4 volte maggiore di quello iniziale del solo cilindro.

1. Trovare c.
2. Trovare la velocità massima $v_{\max}$ del centro del cilindro quando, in seguito a una piccolo spostamento dalla posizione iniziale, il cilindro inizia a rotolare senza strisciare fino a portare il punto materiale nel punto più basso (v. figura di destra). Si tenga presente che quando il punto materiale si trova nel punto più basso, la sua velocità istantanea è nulla.



Soluzione.

1. Detti I_0 e I_f i momenti d'inerzia iniziale e finale rispetto all'asse passante per il centro di massa del cilindro, si ha che il rapporto I_f/I_0, che sappiamo valere 4, è:

$$\frac{I_f}{I_0} = \frac{c\, m\, r^2 + m\, r^2}{c\, m\, r^2} = 1 + \frac{1}{c} = 4 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{3} \,. \tag{1}$$

2. Poichè non si ha strisciamento, durante il moto del cilindro non si ha dissipazione di energia, quindi l'energia meccanica si conserva. La variazione di energia potenziale gravitazionale è data dal solo punto materiale e vale $m\, g\, (2r)$. Questa pertanto si converte integralmente in energia cinetica del sistema cilindro+punto materiale. Inoltre, il punto materiale, quando si trova nel punto più basso, ovvero nel punto di contatto con il pavimento, ha una velocità istantaneamente nulla e quindi solo il cilindro ha energia cinetica in quel preciso istante. Imponendo pertanto la conservazione dell'energia meccanica, segue

$$m\, g\, 2\, r = \frac{1}{2}\, m\, v_{\max}^2 + \frac{1}{2}\, I\, \omega_{\max}^2 \,, \tag{2}$$

dove abbiamo usato il teorema di König per scrivere il membro di destra. La velocità angolare massima $\omega_{\max}$ è legata a $v_{\max}$ attraverso il vincolo di rotolamento senza strisciamento, $\omega_{\max} = v_{\max}/r$. Pertanto,

$$m\, g\, 2\, r = \frac{1}{2}\, m\, v_{\max}^2 \left(1 + \frac{I}{m\, r^2}\right) = \frac{2}{3}\, m\, v_{\max}^2 \,, \tag{3}$$

dove abbiamo usato $I = m\, r^2/3$ ricavato al punto precedente. Segue pertanto il risultato

$$v_{\max} = \sqrt{3\, g\, r} = 3.84 \text{ m/s} = 13.8 \text{ Km/h} \,. \tag{4}$$

C.V.D.