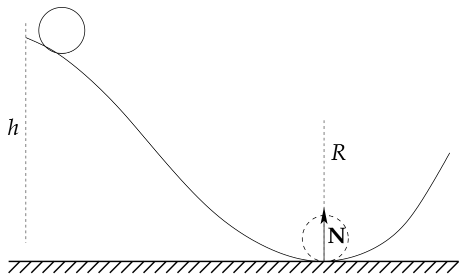
Fisica I. Terza Sessione AA 2011-12.
Corsi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione 03/09/2012

PROBLEMA 2

Una sfera omogenea di massa e raggio incogniti rotola senza strisciare lungo una superficie curva partendo da ferma da un'altezza h dal suolo. Quando la sfera raggiunge il livello del terreno nel punto più basso, si sa che il raggio di curvatura della guida in quel punto vale $R = 5$ m. Detta $\vec{N}$ la reazione normale che il suolo esercita sulla sfera in quel punto, si sa che è diretta verticalmente e che ha un modulo pari a 4 volte la forza peso della sfera stessa.

1. Calcolare v, velocità del centro di massa della sfera nel punto più basso della traiettoria.
2. Trovare l'altezza dal suolo h da cui è scesa la sfera.

Detto r il raggio della sfera, lo si trascuri rispetto ad h ed R, ovvero: $r \ll h$, $r \ll R$.



Soluzione.

1. Applichiamo la prima legge cardinale della dinamica alla sfera quando si trova nel punto più basso della traiettoria:

$$\vec{N} + m\,\vec{g} \;=\; m\,\vec{a}\;, \tag{1}$$

dove con $\vec{a}$ abbiamo indicato l'accelerazione della sfera in quel punto. Poichè sta percorrendo un tratto con raggio di curvatura R, $\vec{a}$ non è nulla, ma è diretta verso il centro di curvatura, ovvero verticalmente verso l'alto, e di modulo pari a v^2/R, dove v è la velocità del centro di massa della sfera in quel punto. Proiettando la (1) verticalmente, segue

$$(4\,m\,g) - m\,g \;=\; m\,\frac{v^2}{R} \quad\Rightarrow\quad v \;=\; \sqrt{3\,g\,R} \;=\; 12.13 \text{ m/s} \;=\; 43.67 \text{ Km/h}\;. \tag{2}$$

2. Poichè siamo in presenza di solo attrito volvente, si conserva l'energia meccanica. Applicando questa tra l'istante iniziale e il momento in cui la sfera si trova nel punto più basso della traiettoria, segue:

$$m\,g\,h \;=\; \frac{1}{2}\,I\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,m\,v^2\;, \tag{3}$$

dove ω è la velocità angolare istantanea con cui la sfera ruota attorno al proprio asse centrale nel punto più basso della traiettoria. $I = (2/5)\,m\,r^2$ indica invece il momento d'inerzia di un asse centrale di una sfera omogenea di massa m e raggio r. Il vincolo di rotolamento senza strisciamento è espresso dalla relazione $\omega = v/r$, da cui segue

$$m\,g\,h \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{I}{m\,r^2} + 1\right) m\,v^2 \;=\; \frac{7}{10}\,m\,v^2\;. \tag{4}$$

Sfruttando il risultato della (2), segue:

$$h \;=\; \frac{21}{10}\,R \;=\; 10.5 \text{ m}\;. \tag{5}$$

C.V.D.