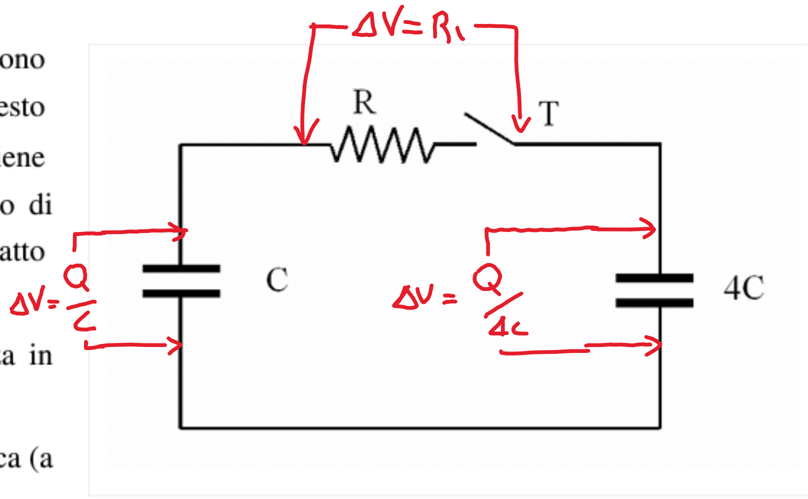
Un condensatore carico

Le armature di un condensatore di capacità C sono portate ad una differenza di potenziale V_o. A questo punto attraverso una resistenza R una armatura viene connessa alla armatura di un condensatore scarico di capacità $4C$. Le altre due armature erano in contatto sin dall'inizio. Determinare:



a) L'energia elettrostatica dissipata nella resistenza in tale processo.

b) La costante di tempo del processo di scarica/carica (a seconda di quale condensatore si considera).

(dati del problema $V_0 = 200\ V$, $R = 1\ M\Omega$, $C = 1\ \mu F$)

Solutions

a)

Sulle armature del I condensatore vi è una carica iniziale:

$$Q_0 = CV_o = 200\ \mu C$$

Con una energia iniziale pari a:

$$E_0 = \frac{1}{2}CV_o^2 = 20\ mJ$$

Alla fine del processo tale carica si deve conservare, quindi le cariche finali valgono:

$$Q_{1f} + Q_{2f} = Q_0$$

Inoltre le differenze di potenziale ai capi dei due condensatori debbono equivalersi:

$$\frac{Q_{1f}}{C} = \frac{Q_{2f}}{4C}$$

Cioè:

$$Q_{1f} = \frac{Q_o}{5} = 40\ \mu C$$

$$Q_{2f} = \frac{4}{5}Q_o = 160\ \mu C$$

Per cui:

$$E_f = \frac{1}{2}\frac{Q_{1f}^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{Q_{2f}^2}{4C} = \frac{1}{5}\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$$

Quindi l'energia dissipata vale:

$$\Delta E = E_0 - E_f = 16\ mJ$$

b)

L'equazione della maglia:

$$\frac{Q_1}{C} + RI - \frac{Q_2}{4C} = 0$$

Con in ogni istante:

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

Quindi:

$$\frac{Q_1}{C} + RI - \frac{Q_0 - Q_1}{4C} = 0$$

$$Q_1 + \frac{4}{5}RC\frac{dQ_1}{dt} - \frac{Q_0}{5} = 0$$

Quindi la costante di tempo vale:

$$\tau = \frac{4}{5}RC = 0.8\ s$$

e separando le variabili:

$$\frac{dQ_1}{Q_1 - Q_0/5} = -\frac{dt}{\tau}$$

$$\ln\frac{Q_1 - Q_0/5}{Q_0 - Q_0/5} = -\frac{t}{\tau}$$

$$Q_1 = \frac{Q_0}{5} + \frac{4Q_0}{5}e^{-t/\tau}$$

'E facile vedere come per $t = 0$ e $t = \infty$ assume i valori dati nel punto a).