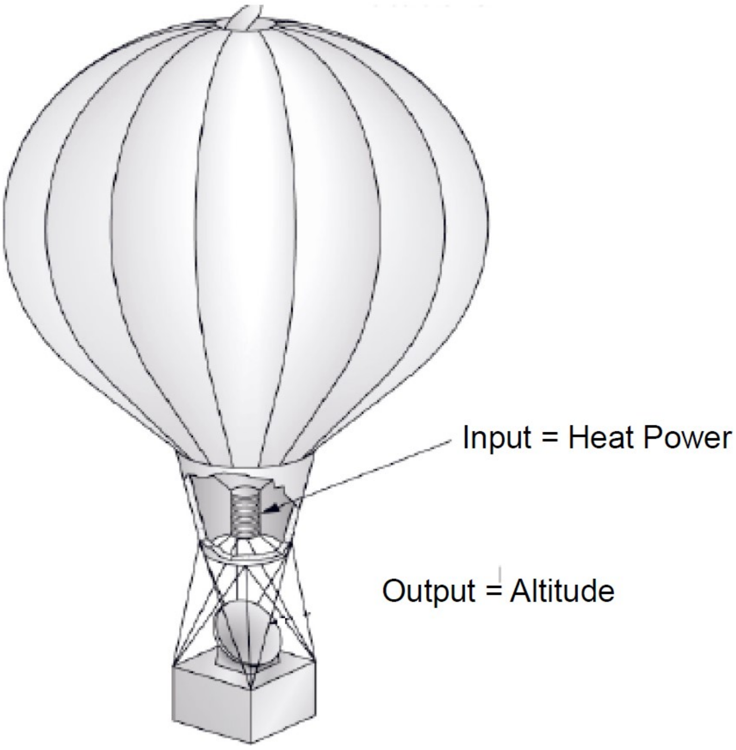
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 CFU) / “CONTROLLI AUTOMATICI” (A.A. fino al 2017/2018)

Prova scritta – 7 giugno 2019

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il problema della regolazione di quota dell’aerostato ad aria calda mostrato nella seguente figura:



Ipotizzando di considerare le quantità fisiche come piccole variazioni rispetto ad una opportuna condizione operativa, il modello matematico del sistema si può esprimere con le seguenti equazioni differenziali che descrivono la dinamica della temperatura interna all’aerostato T e della quota z:

$$C_t \dot{T} + \frac{1}{R_t} T = q$$

$$m\ddot{z} + f\dot{z} = E_q T$$

nelle quali C_t e R_t sono rispettivamente la capacità termica e la resistenza termica del contenitore di aria calda, q è il calore generato dal bruciatore, m è la massa complessiva dell'aerostato, f il coefficiente d'attrito corrispondente alla resistenza aerodinamica ed E_q esprime il rapporto tra la spinta ascensionale data dall'aria calda e la temperatura dell'aria all'interno dell'aerostato.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, <u>di ordine 3</u> e del tipo:

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u(t);\ y(t) = \boldsymbol{C}x(t) + \boldsymbol{D}u(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = T;\ x_2 = z;\ x_3 = \dot{z};\ u = q;\ y = x_2;$$

RISPOSTA:

Occorre

- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che la derivata della seconda variabile di stato corrisponde alla terza variabile di stato, quindi $\dot{x}_2 = x_3$:

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{1}{C_t R_t}x_1 + \frac{1}{C_t}u \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= \frac{E_q}{m}x_1 - \frac{f}{m}x_3
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_t R_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{E_q}{m} & 0 & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_2$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la seconda variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$C_t = 20; \quad R_t = 0{,}5; \quad m = 25; \quad f = 2{,}5; \quad E_q = 5;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno <u>completamente osservabile</u>, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema, di interesse per l'analisi di osservabilità (i.e. B non è di interesse), diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T \; A^T C^T \; (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/10 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 2, si progetti un osservatore in catena chiusa dello stato (osservatore identità), cioè del tipo:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

i cui autovalori assegnabili risultino tutti uguali a -1.

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente osservabile (v. Esercizio 2) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori dell'osservatore in catena chiusa. Fissare tali autovalori uguali a 1 significa imporre il <u>polinomio caratteristico desiderato</u> per l'osservatore uguale a:

$$p_{des}(\lambda) = (\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

La matrice K dell'osservatore deve essere di dimensione 3x1, cioè $K = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3]^T$, pertanto la matrice dell'osservatore con i coefficienti incogniti di K e il <u>polinomio caratteristico dell'osservatore</u> risultano:

$$A + KC = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 1 \\ \frac{1}{5} & k_3 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A - KC) = \\ &= \lambda^3 + (1/5 - k_2)\lambda^2 + (1/100 - k_3 - k_2/5)\lambda - k_1/5 - k_2/100 - k_3/10 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico dell'osservatore si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di K:

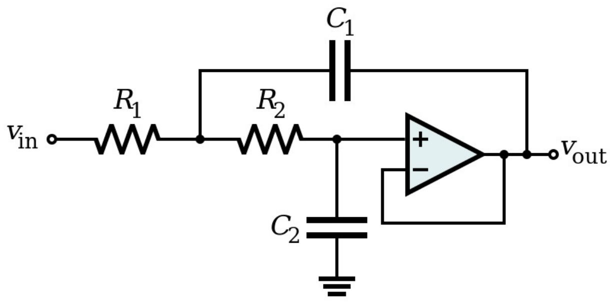
$$\begin{aligned} 1/5 - k_2 &= 3 \\ 1/100 - k_3 - k_2/5 &= 3 \\ -k_1/5 - k_2/100 - k_3/10 &= 1 \end{aligned}$$

dai quali si ottiene la soluzione finale:

$$K = [\;\; -729/200 \quad -14/5 \quad -243/100 \;\;]^T$$

ESERCIZIO 4.

Il seguente circuito elettrico attivo, con topologia detta di Sallen-Key:



risulta avere il seguente modello nello spazio degli stati:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Si determini la corrispondente funzione di risposta impulsiva.

RISPOSTA:

La matrice esponenziale del sistema risulta essere:

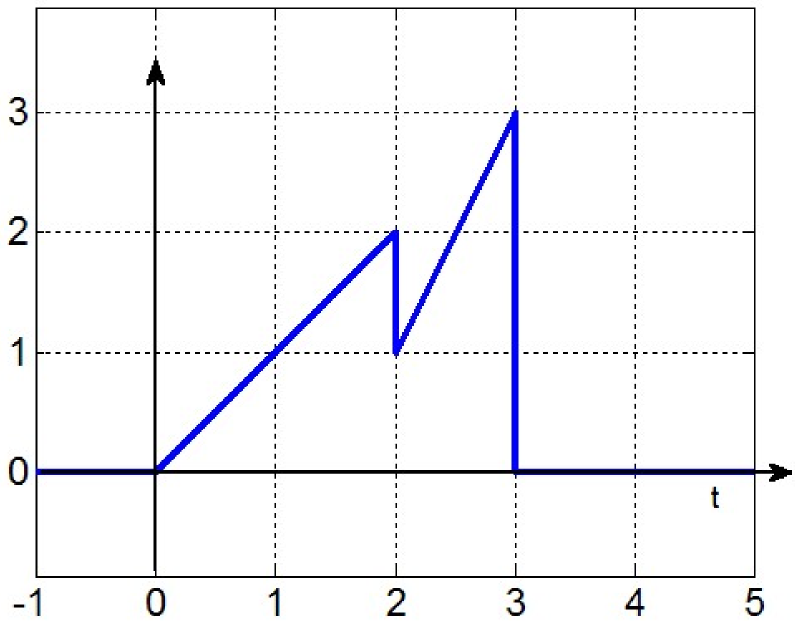
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{(e^{-t} - e^{-6\,t})}{5} \\ 0 & e^{-6\,t} \end{bmatrix}$$

Pertanto la funzione di risposta impulsiva $W(t) = C^*e^{At*}B$ è:

$$W(t) = \frac{7}{5}e^{-t} - \frac{2}{5}e^{-6\,t}$$

ESERCIZIO 5.

Data la funzione avente il seguente andamento nel tempo:



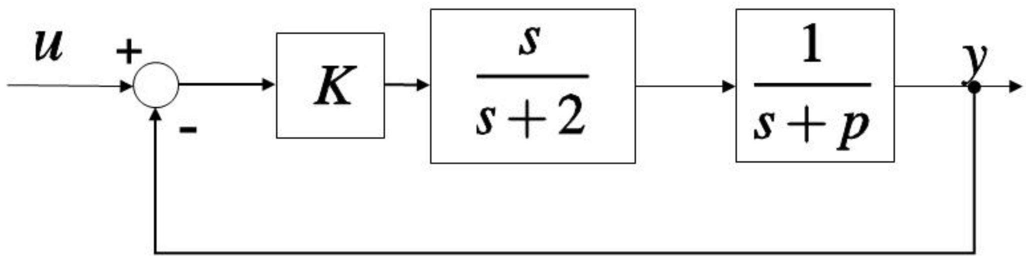
si calcoli la corrispondente funzione trasformata secondo Laplace.

RISPOSTA:

$$F(s) = 1/s^2 + (-1/s + 1/s^2)\, e^{-2s} + (-3/s - 2/s^2)\, e^{-3s}$$

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K e p tali che il sistema ad anello chiuso risulti avere pulsazione naturale $\omega_n = 8$ e tempo di assestamento $T_a = 0.8$ secondi.

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta $= s^2 + (K + p + 2)\, s + 2\, p$.

Confrontando tale polinomio con il denominatore tipico dei sistemi del secondo ordine $s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$, si può notare che il coefficiente del terzo termine corrisponde a $\omega_n^2 = 2\, p = 64$, da cui si ricava immediatamente $p = 32$.

Poiché le specifiche richieste dal testo sono compatibili con un coefficiente di smorzamento $\delta = 3/6{,}4 = 0{,}4688$ (**NOTA**: *il sistema di secondo ordine di riferimento si considera sempre con poli complessi e coniugati, cioè con* $0 \leq \delta \leq 1$), il tempo di assestamento si può considerare approssimato dalla formula:

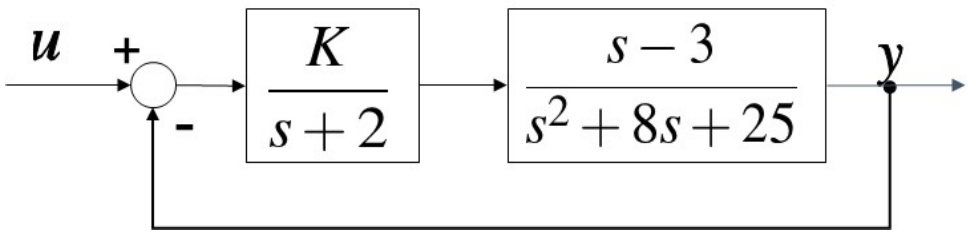
$$T_a = 3 / (\delta\, \omega_n)$$

Dati quindi i valori di p e δ, è necessario che il termine di primo grado nel denominatore ad anello chiuso, dipendente da K e p, sia pari a $7{,}5$. Pertanto il risultato finale è

$$K = -26{,}5 \qquad\qquad p = 32$$

ESERCIZIO 7.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

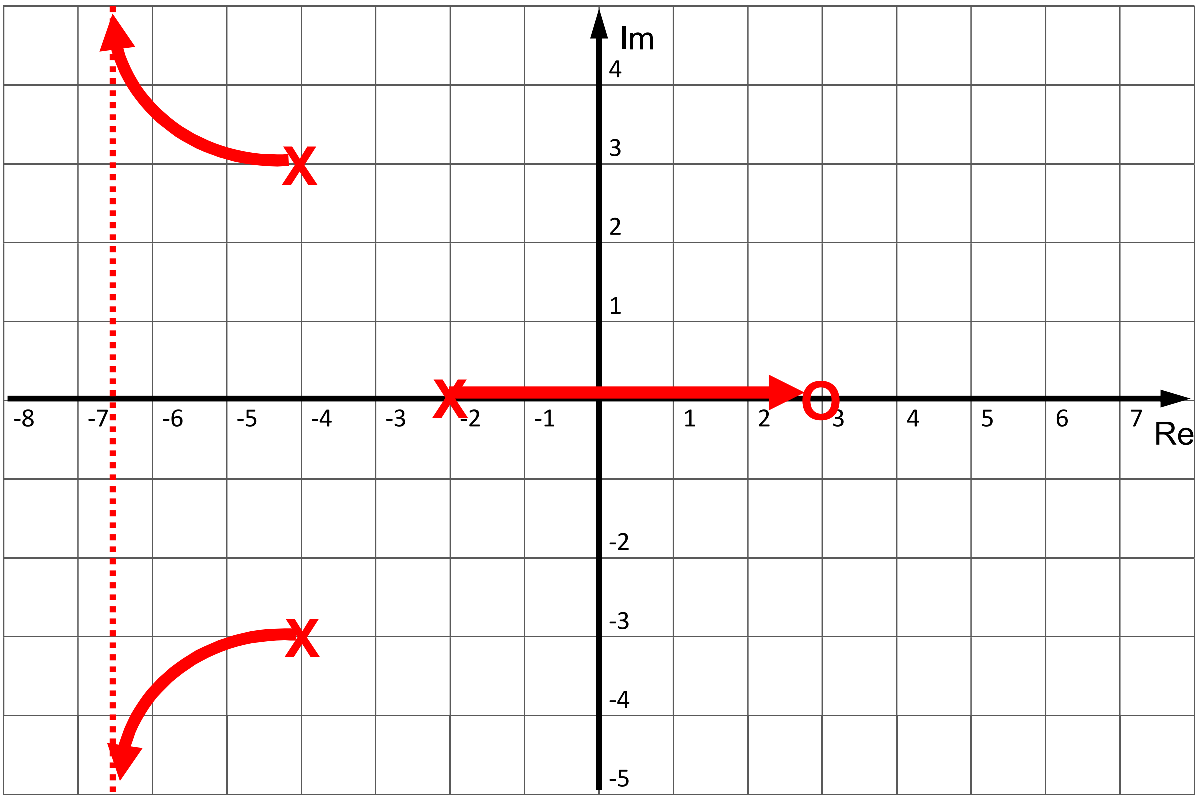


si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per $K > 0$ (luogo diretto) e si determini, se esiste, il valore di K compatibile con il luogo diretto per cui il sistema risulti semplicemente stabile.

RISPOSTA:

NOTA: la funzione di trasferimento di anello ha uno zero ($n_z = 1$) in $+3$ e tre poli ($n_p = 3$) rispettivamente in -2 e $-4 \pm j3$, pertanto il luogo ha due asintoti (numero asintoti $= n_p - n_z = 2$), disposti con angolo di $\pi/2$ e $3/2\,\pi$ rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z}\left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i\right) = -13/2$$



Il luogo delle radici dimostra che superando un determinato valore di K il sistema in retroazione diventa instabile, con un polo reale. Si noti, infatti, che il luogo ha un ramo tendente verso lo zero positivo. Per uno specifico valore di K, corrispondente appunto alla condizione di stabilità semplice (o stabilità marginale), il sistema ad anello chiuso risulterà avere un polo nullo. Applicando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

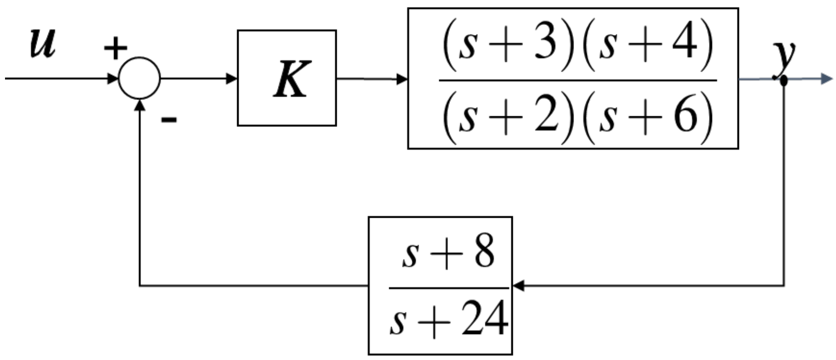
$$D_{cl}(s) = s^3 + 10s^2 + (K + 41)s + 50 - 3K$$

si verifica che i due estremi dell'intervallo di valori di K per cui il sistema in retroazione risulta asintoticamente stabile sono -360/13 e 50/3. Quest'ultimo valore, essendo il primo escluso dal vincolo su K richiesto dal testo (i.e. luogo diretto ➔ K > 0), determina il valore numerico richiesto dall'esercizio, cioè:

K = 50/3

ESERCIZIO 8.

Dato il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



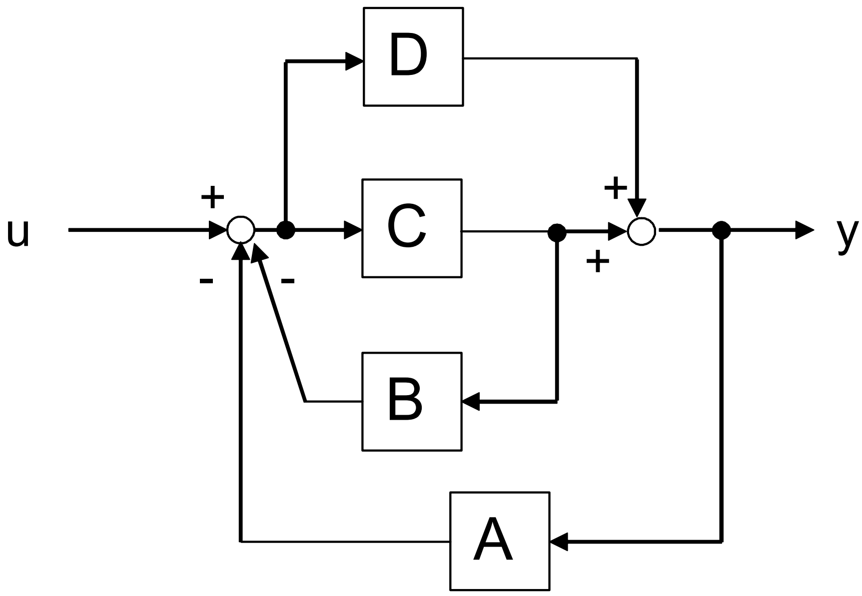
si progetti il valore di K affinchè risulti $e(\infty) = 0.1$ con ingresso a gradino unitario (i.e. $u(s) = 1/s$)

RISPOSTA:

$$K = 27$$

ESERCIZIO 9.

Si determini la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi:



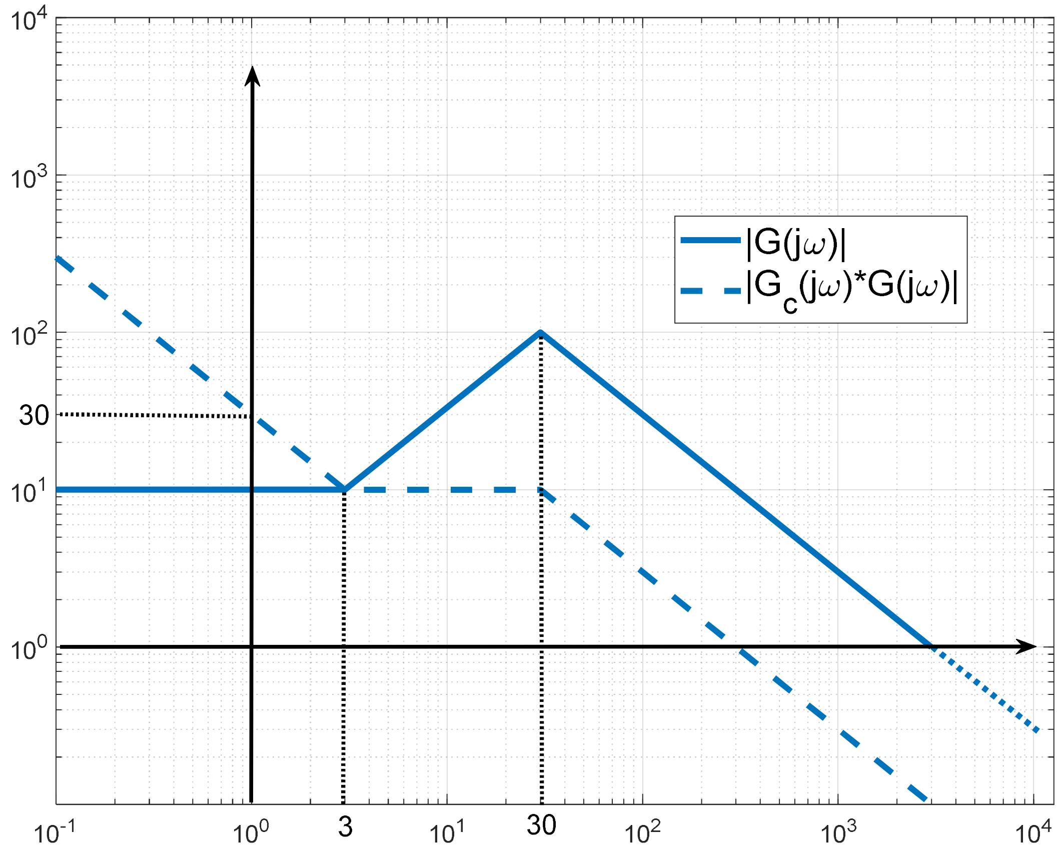
RISPOSTA:

E' possibile spostare il punto di diramazione del segnale entrante nel blocco D da monte a valle del blocco C. Dopo tale spostamento, la funzione di trasferimento del blocco più in alto diventa D/C e risulta in parallelo con un ramo unitario. Tale parallelo si trova in serie all'anello costituito da C e B, che può essere ridotto in modo indipendente, ottenendo C / (1 + B C). La serie tra C / (1 + B C) e (1 + D/C) risulta essere in retroazione con il blocco A. Riducendo anche questo anello si ottiene infine:

$$Y/U = \frac{\left(\frac{C}{1+BC}\right)\left(1+\frac{D}{C}\right)}{1+\left(\frac{C}{1+BC}\right)\left(1+\frac{D}{C}\right)A}$$

ESERCIZIO 10.

Dati i seguenti diagrammi di Bode delle ampiezze, si determinino le funzioni di trasferimento $G(s)$ e $G_c(s)$, supponendo che entrambe siano a fase minima:



RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{10\left(1+\frac{s}{3}\right)}{\left(1+\frac{s}{30}\right)^2} \qquad G_c(s) = \frac{3\left(1+\frac{s}{30}\right)}{s}$$