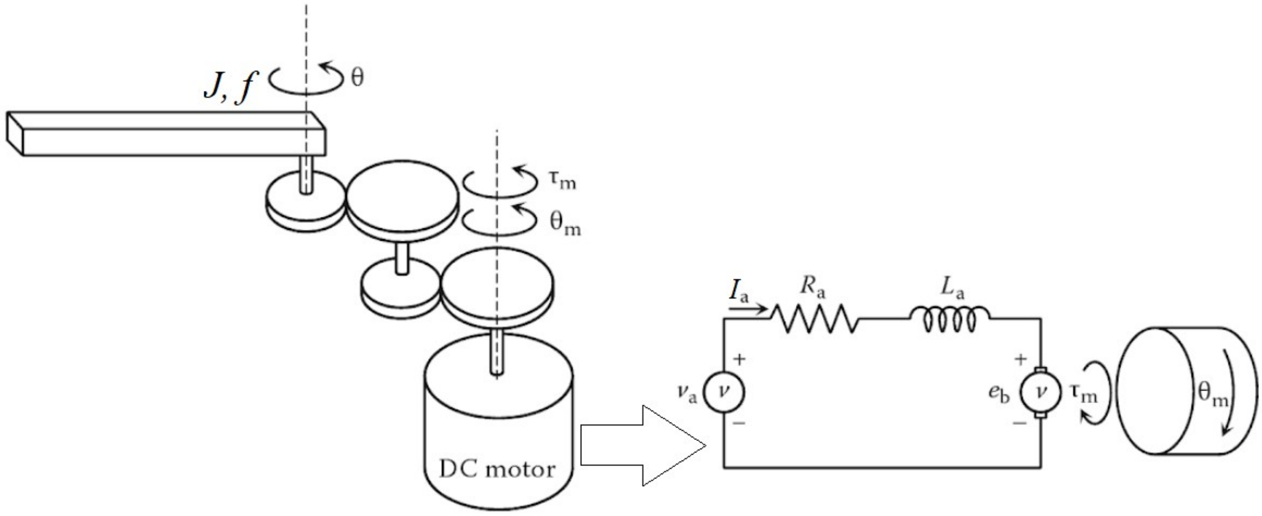
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 CFU) / “CONTROLLI AUTOMATICI” (A.A. fino al 2017/2018)

Prova scritta – 21 giugno 2019

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il sistema robotico costituito da un singolo braccio meccanico azionato, tramite un riduttore meccanico ad ingranaggi, da un motore a corrente continua (*DC motor*). Il sistema è quindi schematizzabile come mostrato nella seguente figura:



Il modello matematico del sistema si può esprimere con le seguenti equazioni:

$$v_a = R_a I_a + L_a \dot{I}_a + K_m \dot{\theta}_m$$

$$\frac{K_m I_a}{n} = J\ddot{\theta} + f\dot{\theta}$$

$$\theta = n\theta_m$$

nelle quali R_a e L_a sono rispettivamente la resistenza e l’induttanza del circuito di armatura del motore, K_m è la costante di accoppiamento elettromagnetico, J è il momento di inerzia del braccio, f il coefficiente d’attrito viscoso, ed n è il rapporto di riduzione della serie di ingranaggi. Si noti che la prima equazione fa riferimento alla velocità angolare dell’albero motore, la seconda esprime il bilancio delle coppie all’asse di rotazione del braccio, mentre la terza è relazione algebrica tra le posizioni (e quindi tra le velocità e le accelerazioni) dei due alberi.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, di ordine 3 e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita (si noti il riferimento all'albero del braccio meccanico):

$$x_1 = I_a;\ x_2 = \theta;\ x_3 = \dot{\theta};\ u = v_a;\ y = \theta = x_2;$$

RISPOSTA:

Occorre

- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che la derivata della seconda variabile di stato corrisponde alla terza variabile di stato, quindi $\dot{x}_2 = x_3$:

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{R_a}{L_a}x_1 - \frac{K_m}{nL_a}x_3 + \frac{1}{L_a}u \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= \frac{K_m}{nJ}x_1 - \frac{f}{J}x_3
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{K_m}{nL_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_m}{nJ} & 0 & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_2$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso D = 0 (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la seconda variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$L_a = 0{,}5; \quad R_a = 5; \quad J = 0{,}25; \quad f = 2{,}5; \quad K_m = 75; \quad n = 25;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno <u>completamente controllabile</u>, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema, di interesse per l'analisi di controllabilità (i.e. C non è di interesse), diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & -10 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$P = \begin{bmatrix} B \ AB \ A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -20 & 56 \\ 0 & 0 & 24 \\ 0 & 24 & -480 \end{bmatrix}$$

rango(P) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente controllabile.

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 2, si progetti una retroazione stato-ingresso (i.e. $u = H\,x + v$), in modo tale che:

- gli autovalori assegnabili del sistema chiuso in retroazione siano tutti reali e distinti;
- il più lento di tali autovalori abbia tempo di assestamento (al 5%) di 3 secondi e gli altri assegnabili abbiano valori assoluti progressivi di una unità (es. -1, -2, ecc.).

RISPOSTA:

Poiché la matrice di raggiungibilità ha rango 3, (v. Esercizio 2) è possibile assegnare tutti gli autovalori del sistema chiuso in retroazione con una retroazione stato-ingresso. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 3$, l'autovalore più lento deve essere pari a $\lambda_1 = -1$, mentre gli altri devono essere: $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$.

Con tale scelta, il <u>polinomio caratteristico desiderato</u> per il sistema chiuso in retroazione deve essere:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6 \end{aligned}$$

La matrice H del controllore deve essere di dimensione 1x3, cioè $H = [h_1 \;\; h_2 \;\; h_3]$, pertanto la matrice del sistema chiuso in retrazione con i coefficienti incogniti di H risulta:

$$A + BH = \begin{bmatrix} 2h_1 - 10 & 2h_2 & 2h_3 - 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il <u>polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione</u> risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A - BH) = \\ &= \lambda^3 + (20 - 2h_1)\lambda^2 + (171 - 24h_3 - 20h_1)\lambda - 24h_2 \end{aligned}$$

Uguagliando quindi i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nella parte di polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione dipendente da H si ottengono i vincoli di progetto:

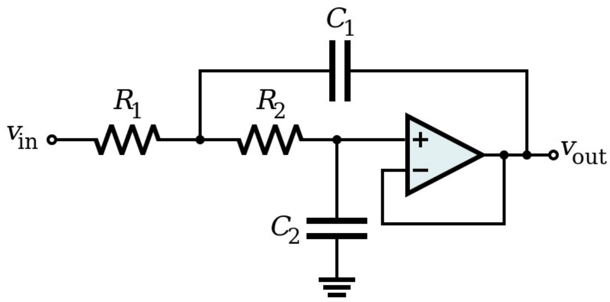
$$\begin{aligned} 20 - h_1 &= 6 \\ 171 - 24h_3 - 20h_1 &= 11 \\ -24h_2 &= 6 \end{aligned}$$

Risolvendo i quali, rispetto agli elementi di H, risulta

$$H = [\;7 \quad -1/4 \quad 7/8]$$

ESERCIZIO 4.

Il seguente circuito elettrico attivo, con topologia detta di Sallen-Key:



risulta avere il seguente modello nello spazio degli stati:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Si determini la corrispondente funzione di trasferimento G(s).

RISPOSTA:

La funzione di trasferimento G(s) è:

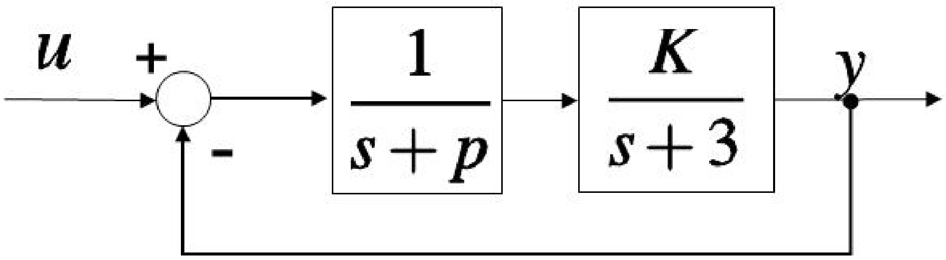
$$G(s) = C^*(s\,I - A)^{-1*}B$$

Pertanto, nel caso considerato risulta:

$$G(s) = \frac{s+11}{s^2+7s+8}$$

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K e p tali per cui il sistema ad anello chiuso risulti avere tempo di assestamento $T_a = 1$ secondo e coefficiente di smorzamento $\delta = 0{,}5 = 1/2$

RISPOSTA:
Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta $= s^2 + (3 + p)\, s + K + 3\, p$. Confrontando tale polinomio con il denominatore tipico dei sistemi del secondo ordine $s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$, si può notare che il coefficiente del secondo termine, dipendente solo da p; corrisponde a $2\,\delta\,\omega_n$. Imporre $T_a = 1$ e ricordando che la formula compatibile con la condizione desiderata sul coefficiente di smorzamento è $T_a = 3 / (\delta\, \omega_n)$, si ottiene che $\delta\,\omega_n = 3$ e di conseguenza:

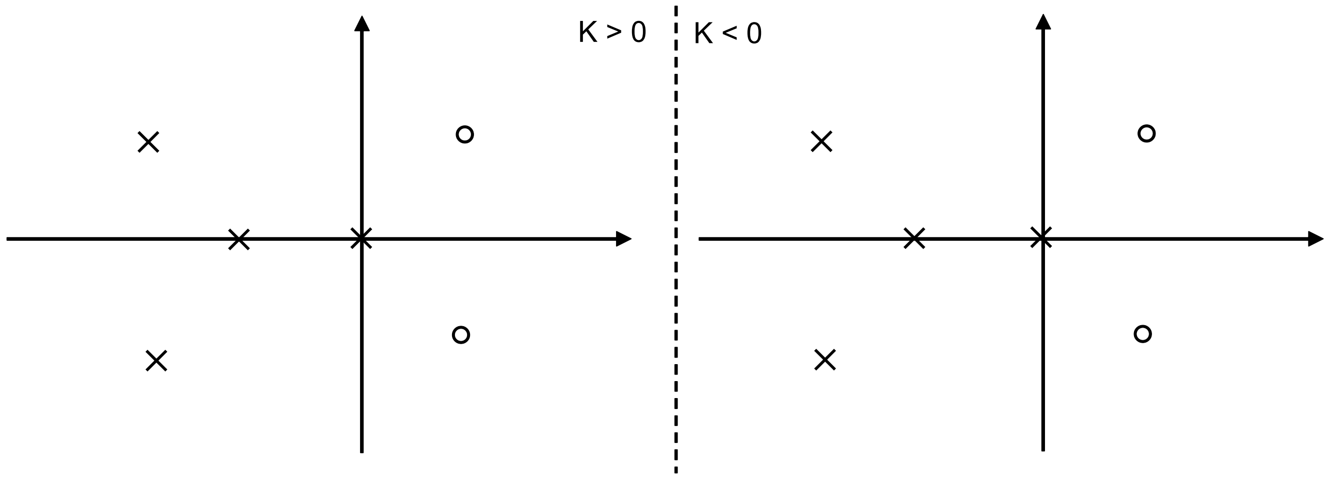
$$p = 3$$

Imposto poi il vincolo sul coefficiente di smorzamento, si ottiene $\omega_n = 6$. Il coefficiente costante è quindi $K + 3\,(3) = \omega_n^2 = 36$, quindi:

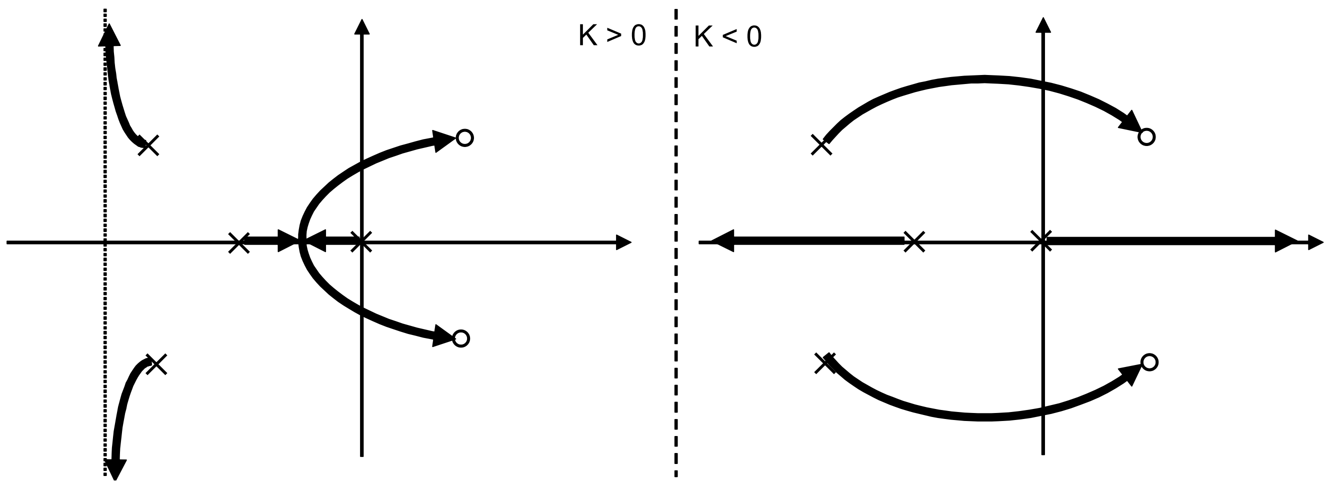
$$K = 27$$

ESERCIZIO 6.

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici per un sistema in retroazione la cui funzione di trasferimento d'anello abbia poli (x) e zeri (o) come indicato in figura:

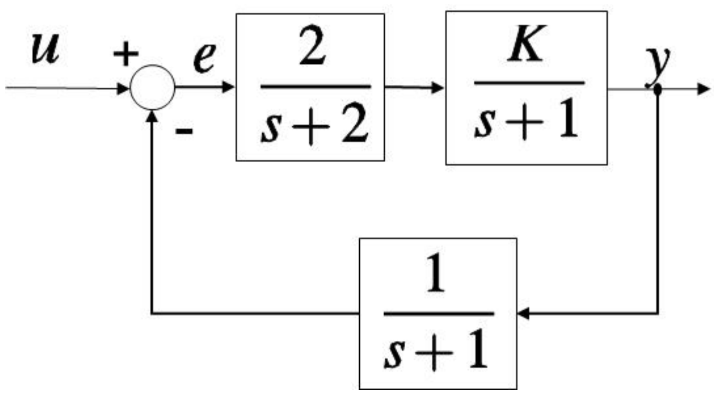


RISPOSTA:



ESERCIZIO 7.

Dato il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



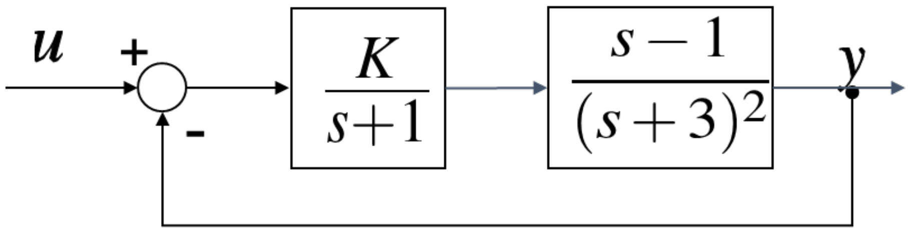
si progetti il valore di K affinchè risulti $e(\infty) = 0,2$ con ingresso a gradino unitario (i.e. $u(s) = 1/s$)

RISPOSTA:

$$K = 4$$

ESERCIZIO 8.

Dato il sistema descritto dallo schema a blocchi mostrato nel seguito:



Si determinino i valori di K tali per cui il sistema chiuso in retroazione risulti asintoticamente stabile.

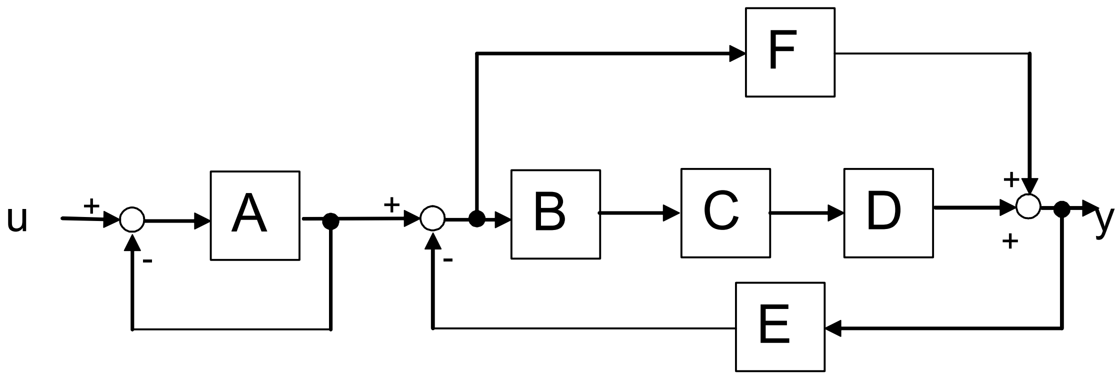
RISPOSTA:

Applicando il criterio di Routh al denominatore del sistema ad anello chiuso si ottiene:

$$-12 < K < 9$$

ESERCIZIO 9.

Si determini la funzione di trasferimento del seguente diagramma a blocchi:

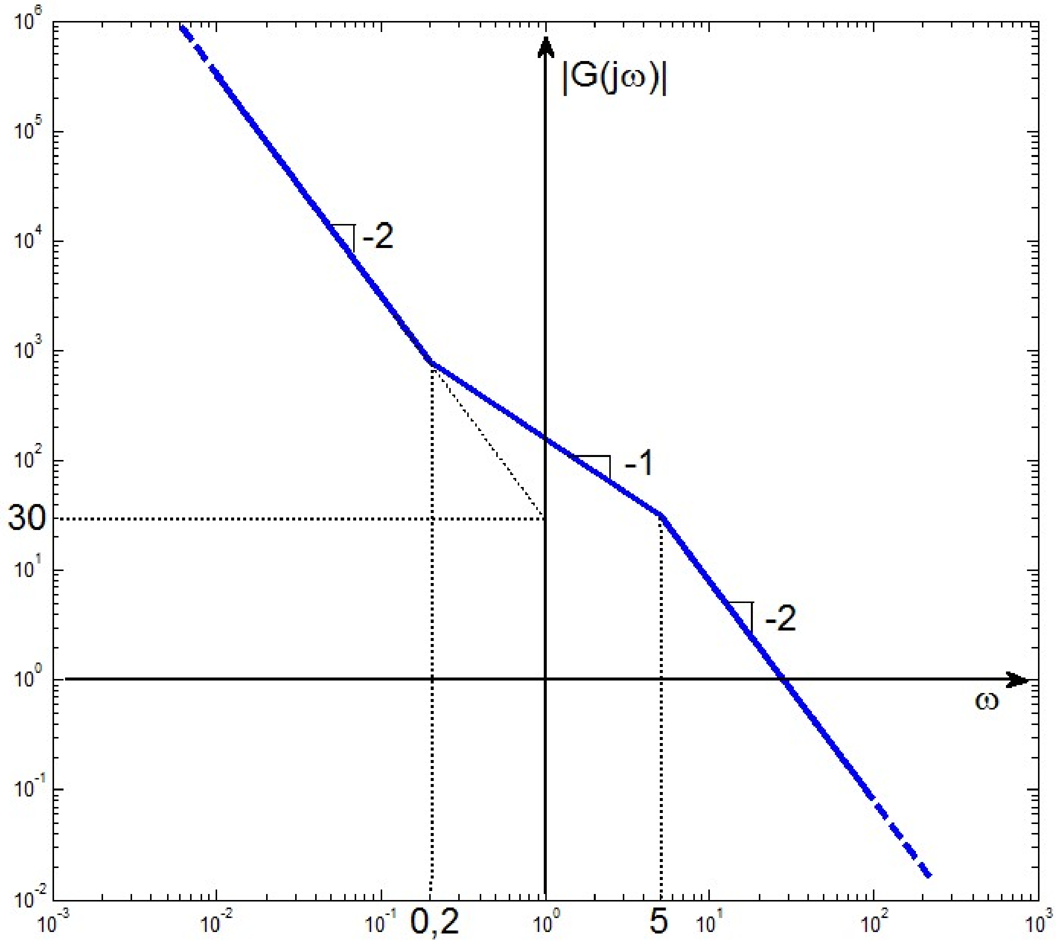


RISPOSTA:

Y / U = [A / (1 + A)] * [(BCD + F) / (1 + (BCD + F) E]

ESERCIZIO 10.

Dato il seguente diagramma di Bode delle ampiezze:



si determinino i parametri della funzione di trasferimento $G(s)$, supposta a fase minima ed espressa con la seguente fattorizzazione:

$$G(s) = \frac{K(1+\tau s)^z}{s^n(1+\alpha\tau s)^p}$$

RISPOSTA:

$K = 30$ $n = 2$ $z = 1$ $p = 1$

$\tau = 5$ $\alpha = 1/25$