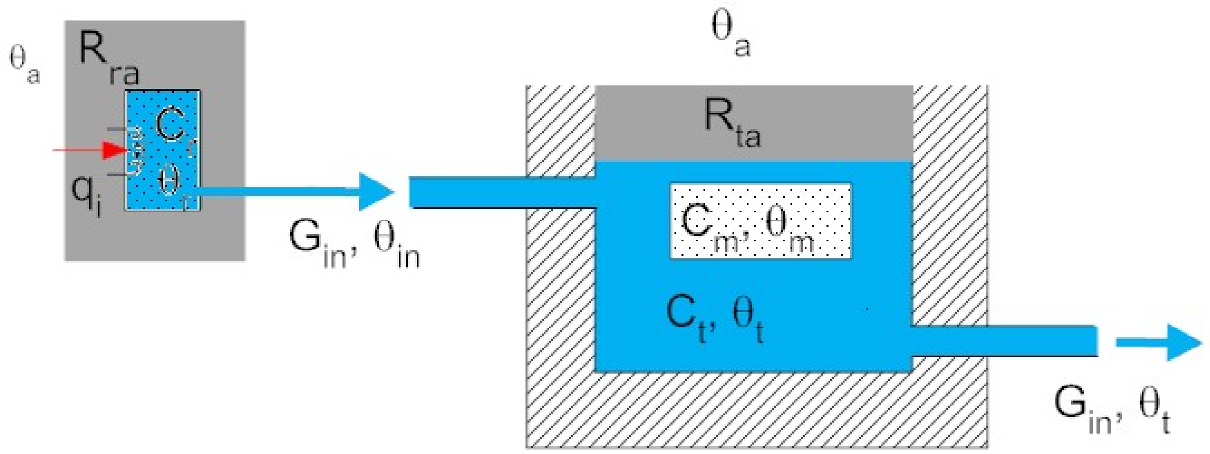
Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (6 crediti) / "CONTROLLI AUTOMATICI" (A.A. fino al 2017/2018)

Prova scritta – 24 luglio 2019

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri un sistema per il riscaldamento di parti metalliche, costituito da un contenitore principale nel quale vengono tenute in immersione le parti e nel quale viene fatto circolare un fluido mantenuto ad opportuna temperatura, grazie ad un altro contenitore ausiliario per il riscaldamento del fluido stesso. Il sistema è schematizzato alla figura seguente, che mostra il contenitore ausiliario di riscaldamento del fluido a sinistra e quello principale di riscaldamento delle parti metalliche a destra:



Indicando con Θ_m, Θ_t, Θ_{in} rispettivamente la temperatura del metallo, quella del contenitore principale e quella del fluido in ingresso a quest'ultimo, il modello matematico del sistema si può esprimere con le seguenti equazioni (<u>nell'ipotesi che la temperatura ambiente sia nulla</u>):

$$C_m\dot{\theta}_m + \frac{\theta_m - \theta_t}{R_{mt}} = 0$$

$$C_t\dot{\theta}_t + \frac{\theta_t}{R_{ta}} = \frac{\theta_m - \theta_t}{R_{mt}} + G_{in}c_p\left(\theta_{in} - \theta_t\right)$$

$$C_r\dot{\theta}_{in} + \frac{\theta_{in}}{R_{ra}} = q_i$$

nelle quali: R_{mt} è la resistenza termica tra il metallo e il fluido; R_{ta} è la resistenza termica tra il contenitore con le parti metalliche e l'ambiente; R_{ra} è la resistenza termica tra il contenitore di riscaldamento del fluido e l'ambiente, C_m è la capacità termica del metallo; C_t è la capacità termica del contenitore principale; C_r è la capacità termica del contenitore ausiliario; G_{in} è la portata di fluido entrante/uscente dal contenitore principale (che si suppone costante), c_p è il calore specifico del fluido utilizzato e q_i è il calore erogato al contenitore ausiliario.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, di ordine 3 e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = \theta_m;\ x_2 = \theta_t;\ x_3 = \theta_{in};\ u = q_i;\ y = x_1;$$

RISPOSTA:

Sostituendo la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita ed elaborando le equazioni, si ottiene le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\tfrac{1}{C_m R_{mt}} x_1 + \tfrac{1}{C_m R_{mt}} x_2 \\
\dot{x}_2 &= \tfrac{1}{C_t R_{mt}} x_1 - \tfrac{1}{C_t}\left(\tfrac{1}{R_{ta}} + \tfrac{1}{R_{mt}} + G_{in} c_p\right) x_2 + \tfrac{G_{in} c_p}{C_t} x_3 \\
\dot{x}_3 &= -\tfrac{1}{C_r R_{ra}} x_3 + \tfrac{1}{C_r} u
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_m R_{mt}} & \frac{1}{C_m R_{mt}} & 0 \\ \frac{1}{C_t R_{mt}} & -\frac{1}{C_t}\left(\frac{1}{R_{ta}} + \frac{1}{R_{mt}} + G_{in} c_p\right) & \frac{G_{in} c_p}{C_t} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_r R_{ra}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C_r} \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_1$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso D = 0 (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$R_{mt} = 2;\ R_{ta} = 1;\ R_{ra} = 0{,}5;\ C_m = 2;\ C_t = 5;\ C_r = 10;$$

$$G_{in} = 0{,}1; \quad c_p = 25;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente osservabile, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema, di interesse per l'analisi di osservabilità (i.e. B non è di interesse), diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0{,}0875 \\ 0 & 1/4 & -0{,}2625 \\ 0 & 0 & 0{,}125 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 2, si progetti un osservatore in catena chiusa dello stato (osservatore identità), cioè del tipo:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

i cui autovalori assegnabili risultino tutti uguali a -3.

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente osservabile (v. Esercizio 2) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori dell'osservatore in catena chiusa. Fissare tali autovalori uguali a -3 significa imporre il <u>polinomio caratteristico desiderato</u> per l'osservatore uguale a:

$$p_{des}(\lambda) = (\lambda+3)^3 = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27$$

La matrice K dell'osservatore deve essere di dimensione 3x1, cioè $K = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3]^T$, pertanto la matrice dell'osservatore con i coefficienti incogniti di K e il <u>polinomio caratteristico dell'osservatore</u> risultano:

$$A + KC = \begin{bmatrix} k_1 - \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ k_2 + \frac{1}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} \\ k_3 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A - KC) = \\ &= \lambda^3 + (5/4 - k_1)\lambda^2 + (77/200 - k_2/4 - k_1)\lambda - 4k_1/25 - k_2/20 - k_3/8 + 7/200 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico dell'osservatore si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di K:

$$\begin{aligned} 5/4 - k_1 &= 9 \\ 77/200 - k_2/4 - k_1 &= 27 \\ -4k_1/25 - k_2/20 - k_3/8 + 7/200 &= 27 \end{aligned}$$

dai quali si ottiene la soluzione finale:

$$K = [\;-7{,}75 \quad -75{,}46 \quad -175{,}616\;]^T$$

ESERCIZIO 4.

Si calcoli la funzione di trasferimento G(s) del sistema avente la seguente risposta impulsiva:

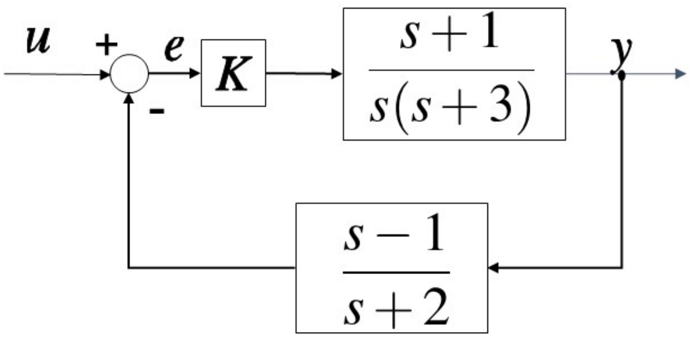
$$W(t) = 2e^{-4t} + 5e^{-2t}$$

RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{2}{s+4} + \frac{5}{s+2} = \frac{7s+24}{(s+4)(s+2)}$$

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determini l'intervallo di valori di K tali per cui il sistema ad anello chiuso risulti essere ASINTOTICAMENTE STABILE.

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta:

$$D_{cl}(s) = s^3 + (5 + K)s^2 + 6s - K$$

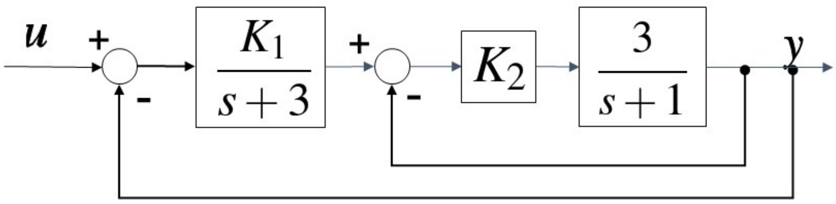
Applicando a questo polinomio il criterio di Routh, si ottiene l'intervallo di stabilità:

$$-30/7 < K < 0$$

NOTA: dalla tabella di Routh risulta anche il vincolo $K > -5$ che però è dominato dall'estremo sinistro riportato nella soluzione finale.

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K_1 e K_2 tali per cui il sistema chiuso in retroazione risulti avere coefficiente di smorzamento $\delta = 0{,}5$ e tempo di assestamento $T_a = 2$ secondi.

RISPOSTA:
Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta:

$$D_{cl}(s) = s^2 + (4 + 3K_2)s + 3 + 9K_2 + 3K_1K_2$$

Per i vincoli imposti dal testo, la pulsazione naturale desiderata deve essere pari a $\omega_n=3$, perciò confrontando il denominatore ad anello chiuso con quello del tipico sistema del secondo ordine si ottengono le seguenti condizioni sui parametri di progetto:

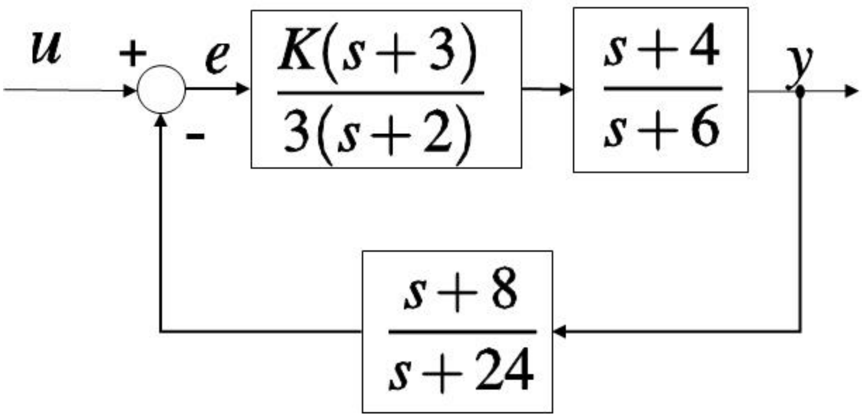
$$4 + 3K_2 = 2\delta\omega_n = 3$$
$$3 + 9K_2 + 3K_1K_2 = \omega_n^2 = 9$$

Risolvendo il sistema precedente si ottiene quindi la soluzione finale:

$$K_1 = -9 \qquad K_2 = -1/3$$

ESERCIZIO 7.

Dato il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



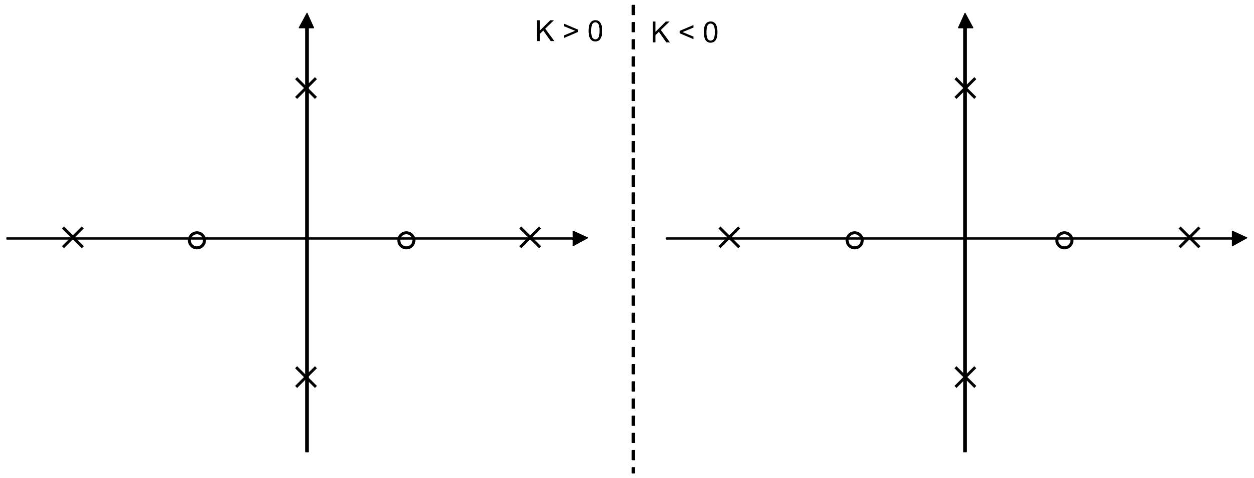
si progetti il valore di K affinchè risulti $e(\infty) = 0.1$ con u(s) = 1 / s

RISPOSTA:

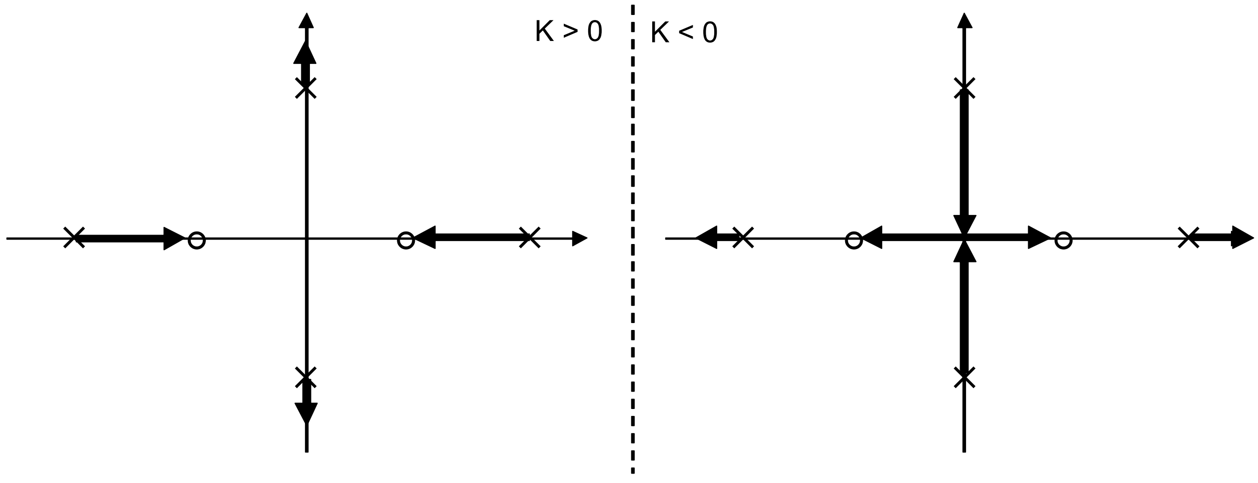
$$K = 81$$

ESERCIZIO 8.

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema con poli (x) e zeri (o) della funzione di trasferimento d'anello come indicato in figura:

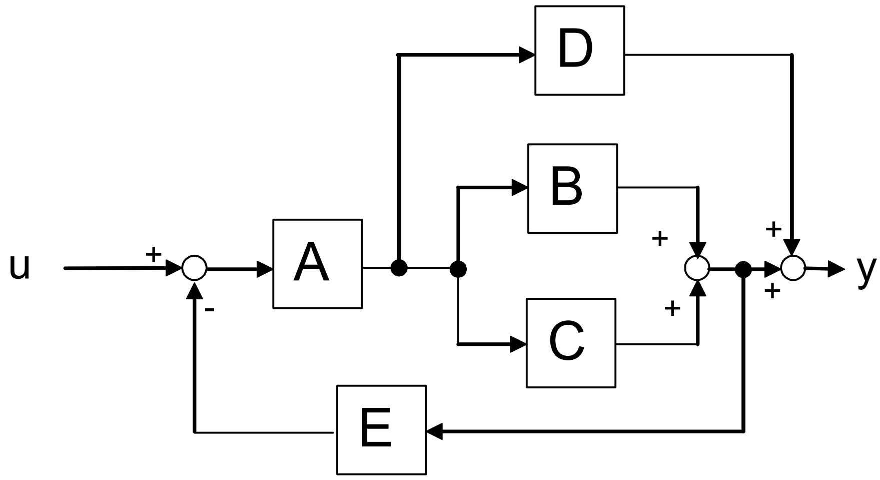


RISPOSTA:



ESERCIZIO 9.

Si determini la funzione di trasferimento del seguente diagramma a blocchi:



RISPOSTA:

Per risolvere il problema è opportuno spostare la diramazione entrante nel blocco D a monte della struttura con B e C in parallelo tra loro. Così facendo, si ottengono due strutture in serie, costituite rispettivamente dalla retroazione tra A*(B+C) ed E e dal parallelo tra D/(B+C) ed un ramo unitario, per cui:

$$Y / U = \left[A (B + C) / \ [1 + AE (B + C) \right] * \left[D / (B + C) + 1 \right]$$
$$= \left[A (B + C + D) / \ [1 + AE (B + C) \right] \text{ (semplificando)}$$

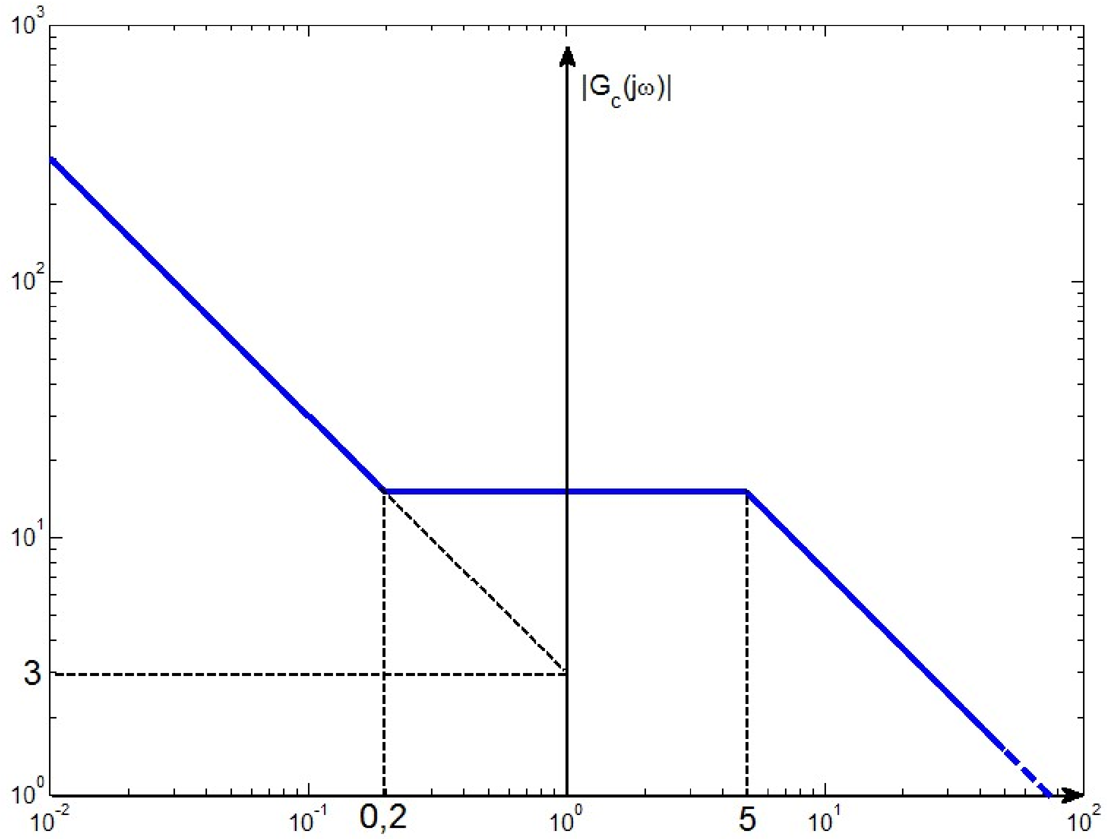
NOTA: Il risultato semplificato può essere ottenuto immediatamente spostando la diramazione entrante in E a valle del parallelo tra B e C. Il nuovo ramo di retroazione avrà funzione di trasferimento E*(B+C) e l'anello (avente ramo diretto con la sola A) sarà in serie con il parallelo tra B, C e D.

ESERCIZIO 10.

Un controllore è stato progettato con una costante di guadagno, un integratore puro ed una rete anticipatrice:

$$G_c(s) = \frac{K(1+\tau s)}{s(1+\alpha\tau s)}$$

Tale controllore, supposto a fase minima, ha il seguente diagramma di Bode:



Si determino dal diagramma i parametri del controllore:

RISPOSTA:

$K =$ 3 $\tau = 5$ $\alpha = 0{,}04$
