Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)

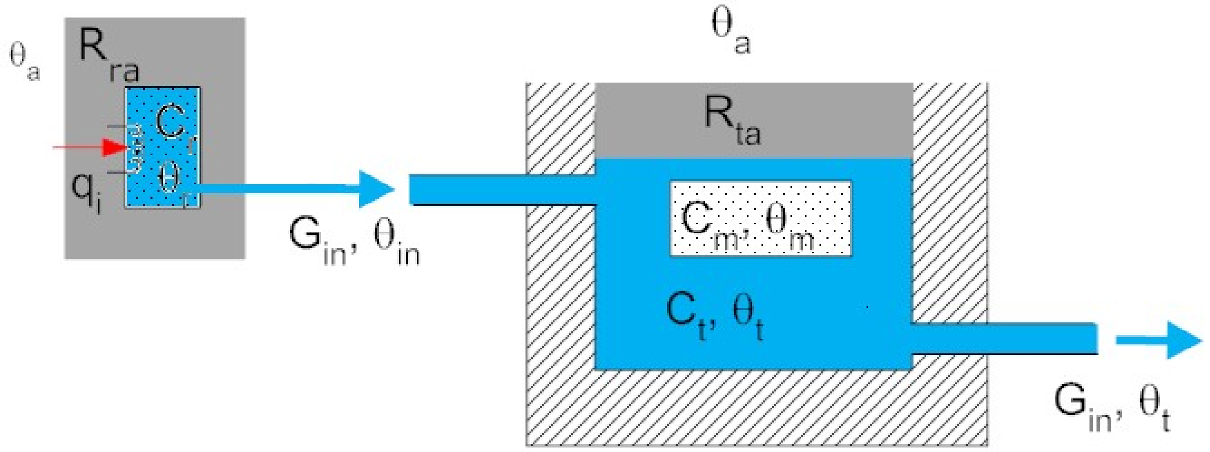
Prova MATLAB (1) – 24 luglio 2019

Istruzioni per lo svolgimento: lo studente deve consegnare al termine della prova **una cartella nominata Cognome_Nome**, contenente:

- Un Matlab script file (i.e. file di testo con estensione .m) riportante i comandi eseguiti (**NOTA**: per copiare i comandi dalla Command History, visualizzarla tramite menu “Layout → Command History → Docked”, selezionare in tale finestra le righe di interesse tramite *Ctrl+mouse left-click* e dal menu visualizzato tramite *mouse right-click* selezionare “create script”) e la risposta alle eventuali richieste teoriche sotto forma di commento (i.e. riga di testo preceduta dal simbolo %)
- Un file workspace.mat contenente le variabili definite nel corso dello svolgimento della prova (creato con il comando `save workspace`)
- Un file MS Word nel quale siano copiate le figure rilevanti per la dimostrazione dei risultati ottenuti (NOTA: per copiare una figura Matlab come bitmap, usare il menu “Edit → Copy Figure” dalla finestra della figura di interesse ed incollare con Ctrl+V nel file Word), avendo cura che le figure siano copiate quando queste mostrano le caratteristiche di interesse per la verifica del progetto (i.e. Settling Time, Stability Margins, ecc.).

INTRODUZIONE

Si consideri un sistema per il riscaldamento di parti metalliche, costituito da un contenitore principale nel quale vengono tenute in immersione le parti e nel quale viene fatto circolare un fluido mantenuto ad opportuna temperatura, grazie ad un altro contenitore ausiliario per il riscaldamento del fluido stesso. Il sistema è schematizzato alla figura seguente, che mostra il contenitore ausiliario di riscaldamento del fluido a sinistra e quello principale di riscaldamento delle parti metalliche a destra:



Indicando con Θ_m, Θ_t, Θ_{in} rispettivamente la temperatura del metallo, quella del contenitore principale e quella del fluido in ingresso a quest’ultimo, il modello matematico del sistema si può esprimere con le seguenti equazioni (nell’ipotesi che la temperatura ambiente sia nulla):

$$C_m\dot{\theta}_m + \frac{\theta_m - \theta_t}{R_{mt}} = 0$$

$$C_t\dot{\theta}_t + \frac{\theta_t}{R_{ta}} = \frac{\theta_m - \theta_t}{R_{mt}} + G_{in}c_p\left(\theta_{in} - \theta_t\right)$$

$$C_r\dot{\theta}_{in} + \frac{\theta_{in}}{R_{ra}} = q_i$$

nelle quali: R_{mt} è la resistenza termica tra il metallo e il fluido; R_{ta} è la resistenza termica tra il contenitore con le parti metalliche e l'ambiente; R_{ra} è la resistenza termica tra il contenitore di riscaldamento del fluido e l'ambiente, C_m è la capacità termica del metallo; C_t è la capacità termica del contenitore principale; C_r è la capacità termica del contenitore ausiliario; G_{in} è la portata di fluido entrante/uscente dal contenitore principale (che si suppone costante) e c_p è il calore specifico del fluido utilizzato.

Fissando le seguenti scelte per lo stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = \theta_m;\ x_2 = \theta_t;\ x_3 = \theta_{in};\ u = q_i;\ y = x_1;$$

Si ottiene un corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u(t);\ y(t) = \boldsymbol{C}x(t) + \boldsymbol{D}u(t)$$

Con:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_m R_{mt}} & \frac{1}{C_m R_{mt}} & 0 \\ \frac{1}{C_t R_{mt}} & -\frac{1}{C_t}\left(\frac{1}{R_{ta}} + \frac{1}{R_{mt}} + G_{in}c_p\right) & \frac{G_{in}c_p}{C_t} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_r R_{ra}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C_r} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 1.

a) Dato il modello ottenuto nell'introduzione, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$R_{mt} = 0.025; \quad R_{ta} = 0.1; \quad R_{ra} = 1; \quad C_m = 200; \quad C_t = 100;$$

$$C_r = 100 \quad G_{in} = 0.1; \quad c_p = 1000;$$

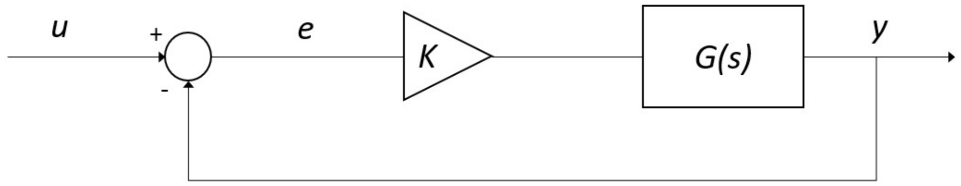
e si ricavi la funzione di trasferimento G(s) del sistema in esame.

NOTA: *i testi erano proposti allo studente in tre versioni: la presente (1) con* $C_r = 100$*, una versione (2) con* $C_r = 300$ *e una versione (3) con* $C_r = 10$*.*
La soluzione presentata in questo documento farà riferimento solo alla versione (1). Si lascia la verifica delle differenze numeriche nelle versioni (2) e (3) come esercizio per lo studente interessato.

b) Si determinino i poli della funzione di trasferimento e si verifichi se coincidono con gli autovalori di A. Descrivere il motivo di eventuali discrepanze tramite righe di commento (i.e. precedute dal simbolo %) sul file .m

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema in retroazione unitaria rappresentato in figura:



Con G(s) ricavata al punto a) dell'Esercizio 1.

a) Si verifichi se il sistema ad anello chiuso, con guadagno $K = 1$, risulti o meno stabile tramite l'analisi della risposta $y(t)$ al gradino unitario.

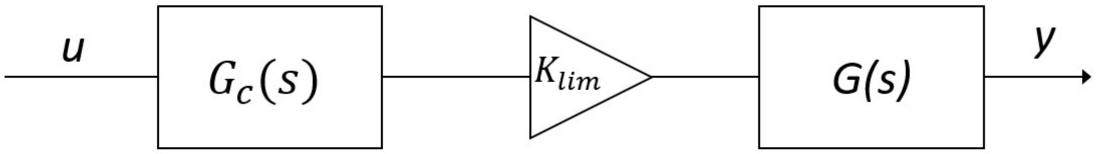
b) Si determini il valore a regime della risposta al gradino $y(t)$ e si motivi il risultato tramite righe di commento (i.e. precedute dal simbolo %) sul file .m

c) Si determini, se esiste, il valore del guadagno K_{lim} per il quale il sistema risulta semplicemente stabile, utilizzando il grafico del luogo delle radici della funzione G(s).

d) Si ponga $K_1 = 0.8\, K_{lim}$, si visualizzi l'andamento della risposta al gradino $y(t)$ del sistema chiuso in retroazione con tale guadagno e si determini il tempo d'assestamento al 5%.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema rappresentato in figura



Con $G_c(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s} = \frac{1+\alpha\tau}{1+\tau s}$ rete ritardatrice ($\tau_1 < \tau_2$ o $\alpha < 1$), $G(s)$ ricavata al punto a) dell'Esercizio 1 e K_{lim} ricavato al punto c) dell'Esercizio 2.
Si progetti la rete ritardatrice che garantisca un margine di fase $M_f = 45°$ utilizzando la procedura empirica riportata nella dispensa FdA-3.1-RetiCorrettrici o in alternativa il metodo delle formule di inversione (allegate in appendice).
In particolare:

a) Si determini opportunamente la pulsazione critica del sistema compensato (se si sceglie il metodo delle formule di inversione utilizzare i grafici ottenuti con la funzione matlab lagNetDesignBode, in modo che ω^* sia compresa all'interno della regione di realizzabilità della rete ritardatrice).
b) Si determinino i coefficienti τ_1 e τ_2 della rete ritardatrice e si verifichi che valga $\tau_2 < \tau_1$;
c) Si visualizzino in un'unica figura i diagrammi di Bode del sistema non compensato e del sistema compensato, evidenziando i relativi margini di fase;
d) Si verifichi la risposta al gradino del sistema compensato e chiuso in retroazione unitaria negativa e se ne determini la massima sovraelongazione percentuale e il tempo d'assestamento al 5%

APPENDICE (formule d'inversione)

$$\tau_1 = \frac{M^* - \cos\varphi^*}{\omega^* \sin\varphi^*}$$

$$\tau_2 = \frac{\cos\varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega^* \sin\varphi^*}$$

$\boldsymbol{\varphi^*}$ = – 180° + $\mathbf{M_F}$ – arg[G(jω*)]

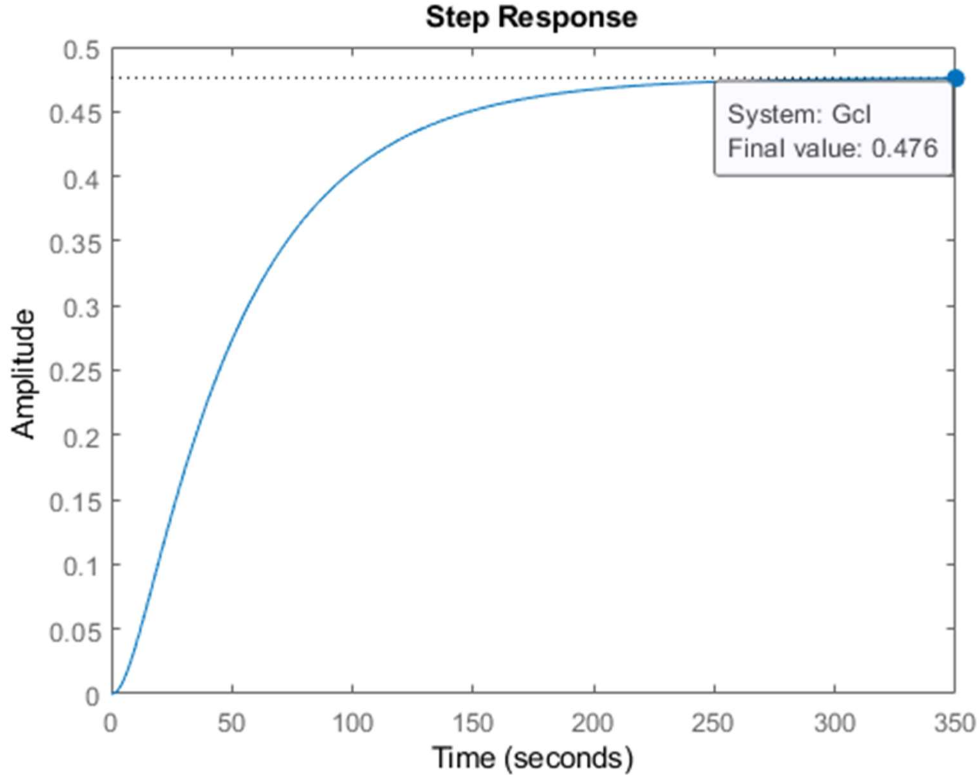
$\mathbf{M^*}$ = 1 / |G(jω*)|

NOTA BENE: si ricordi che in MATLAB le funzioni trigonometriche da utilizzare con argomento espresso in gradi sono `sind()`/`cosd()`.

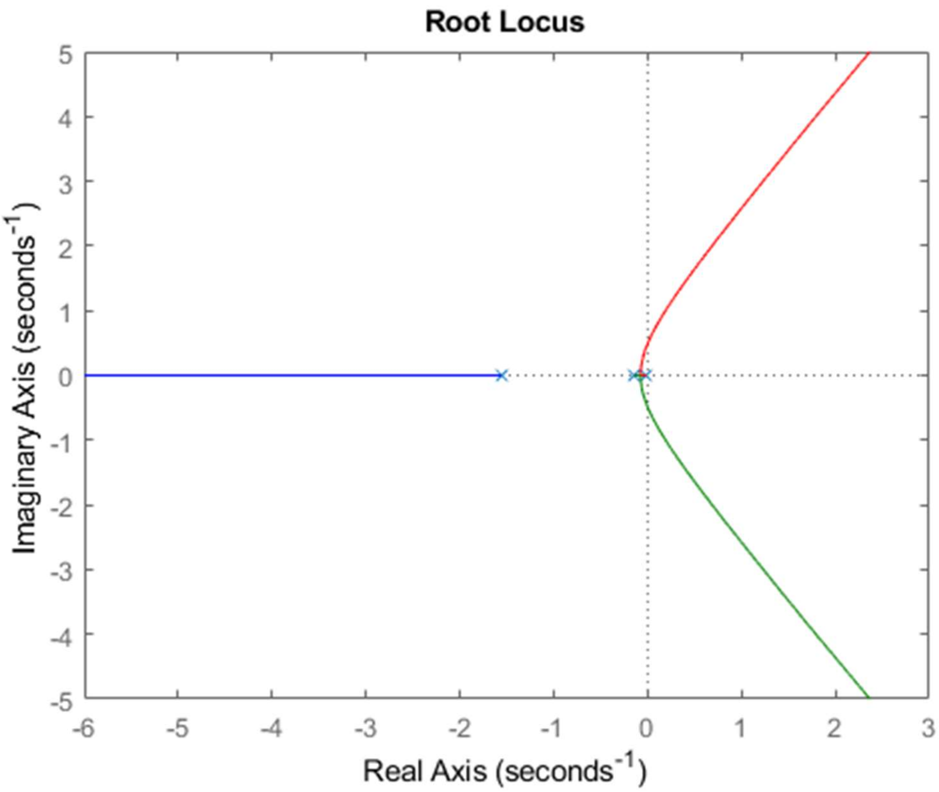
SOLUZIONE

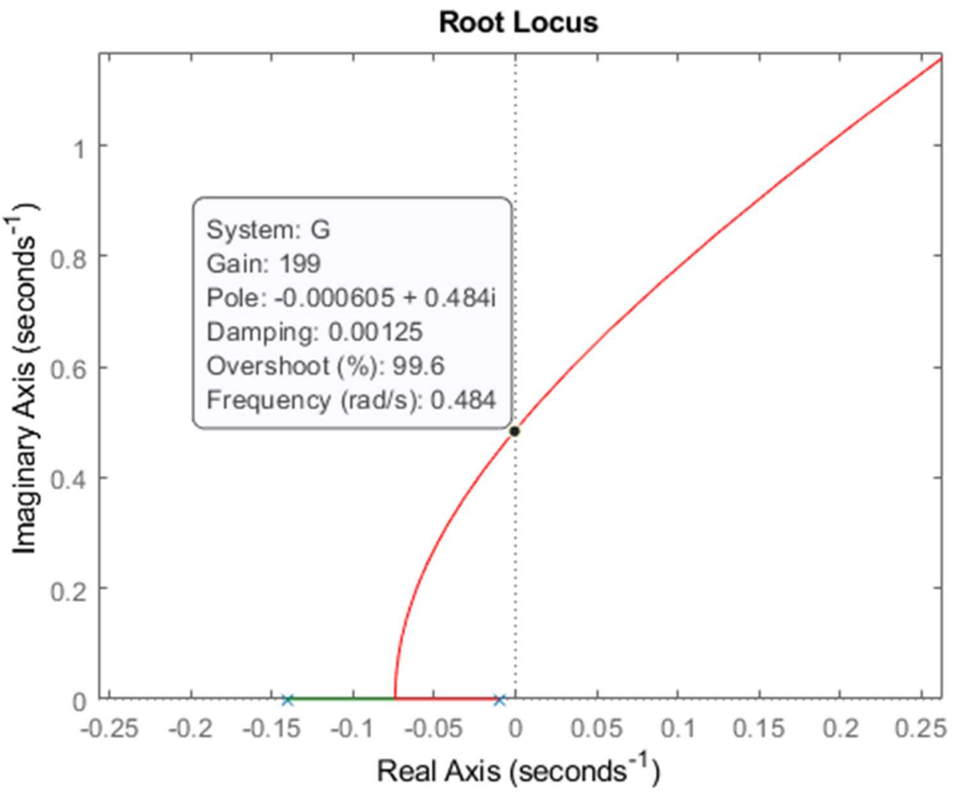
```
%% Parametri numerici
Rmt = 0.025;
Rta = 0.1;
Rra = 1;
Cm = 200;
Ct = 100;
Cr = 100;
Gin = 0.1;
cp = 1000;

%% Matrici A,B,C,D
A = [-1/(Cm*Rmt) 1/(Cm*Rmt) 0
    1/(Ct*Rmt) -1/Ct*(1/Rta+1/Rmt+Gin*cp) Gin*cp/Ct
    0 0 -1/(Cr*Rra)];

B=[0;0;1/Cr];

C=[1 0 0];

D=0;

%% Es 1-a funzione di trasferimento
G = tf(ss(A,B,C,D));

G =

              0.002
  --------------------------------
  s^3 + 1.71 s^2 + 0.237 s + 0.0022

Continuous-time transfer function.

%% Es 1-b poli e autovalori
p = pole(G);

p =

   -1.5589
   -0.1411
   -0.0100

ev = eig(A);
```

```
ev =

   -0.1411
   -1.5589
   -0.0100

r = rank(obsv(A,C)') % poli e autovalori coincidono,
infatti il sistema è completamente osservabile (r=3)

%% Es 2-a stabilità ad anello chiuso
K = 1;
Gcl = feedback(K*G,1);

Gcl =

                0.002
  ---------------------------------
  s^3 + 1.71 s^2 + 0.237 s + 0.0042

Continuous-time transfer function.

figure,step(Gcl) % sistema stabile
```

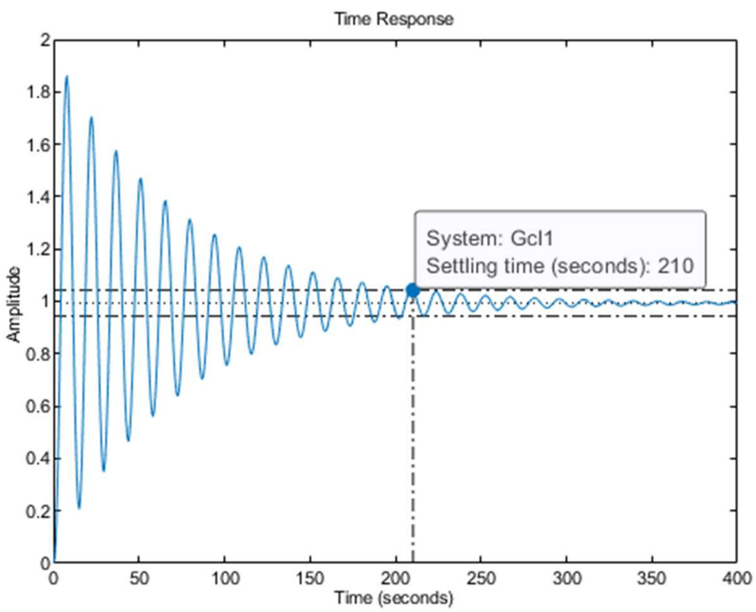


```
%% Es 2-b valore a regime della risposta al gradino
ep = 1/(1+dcgain(G));
% Essendo G un sistema di tipo 0 (nessun polo
% nell'origine) l'errore di posizione ha un valore finito
Yreg = 1 - ep % valore a regime della risposta al gradino

Yreg =

    0.4762

%% Es 2-c luogo delle radici e guadagno limite
figure,rlocus(G)
Klim = 199; % valore selezionato dal grafico
```

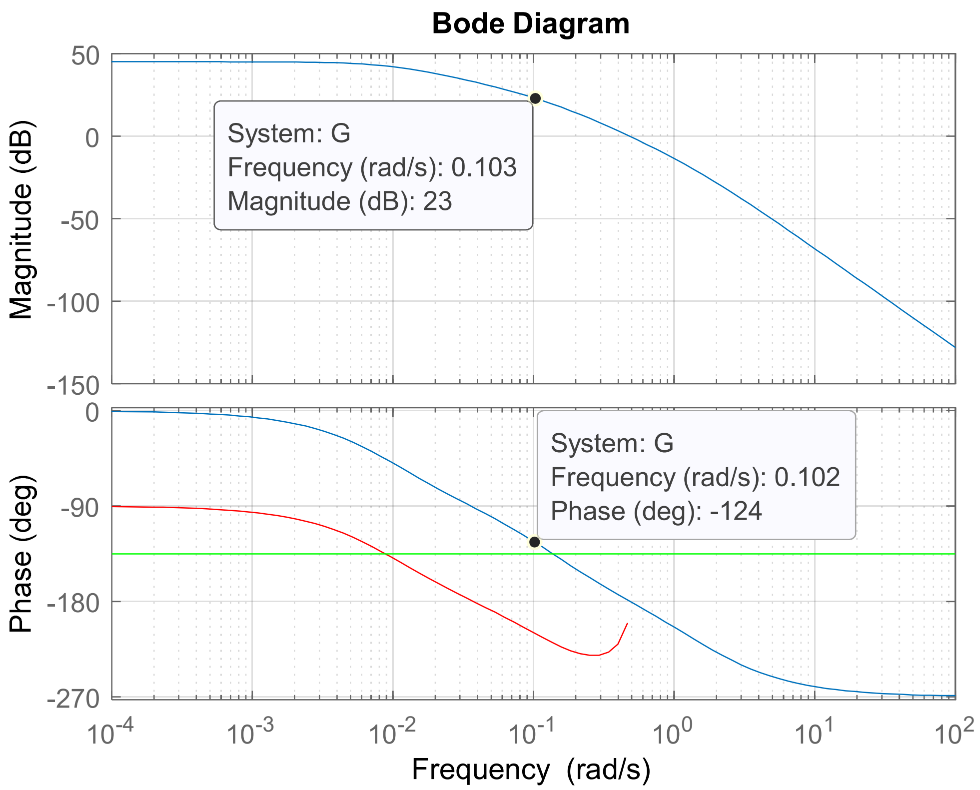





```
%% Es 2-d risposta al gradino, tempo di assestamento al
5%
Gcl1 = feedback(0.8*Klim*G,1);
popt = timeoptions;
popt.SettleTimeThreshold = 0.05;
figure,step(Gcl1,popt)
```

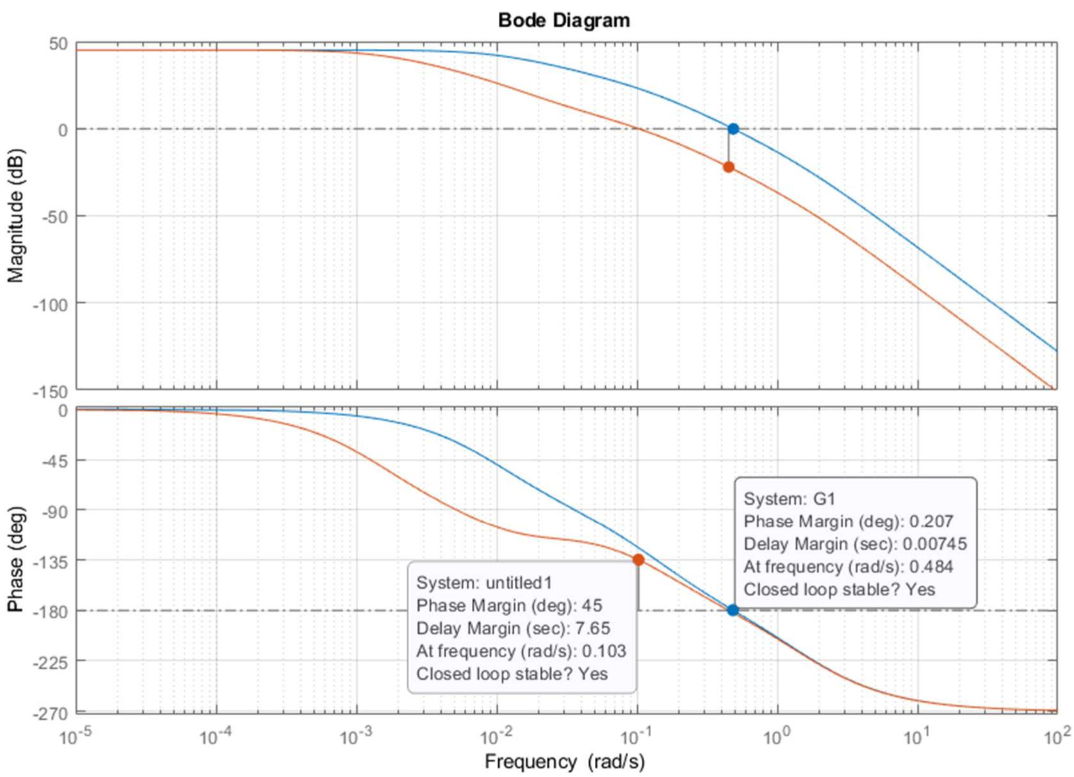


```
%% es 3-a scelta di omega

Mf = 45;
G1 = Klim*G;
lagNetDesignBode(G1,Mf)

omega = 0.1;
M = db2mag(-23);
phi = -180 + Mf + 124; % valori selezionati dal grafico

% NOTA BENE: condizioni di realizzabilità verificate
% nell'intervallo di pulsazioni tra l'intersezione del
% grafico ROSSO con quello VERDE  e l'intersezione del
% grafico BLU con quello VERDE
```




```
%% Es 2-b progetto rete anticipatrice
tau1 = (M - cosd(phi))/(omega*sind(phi));
tau2 = (cosd(phi) - 1/M)/(omega*sind(phi));
alpha = tau1/tau2; % alpha<1 rete ritardatrice

tau1 =
```

```
   47.7353

tau2 =

  688.8432


s = tf('s');
Gc = (1+tau1*s)/(1+tau2*s);

Gc =

  47.74 s + 1
  -----------
  688.8 s + 1

%% Es 2-c verifica margini di fase
figure,bode(G1)
hold on
grid on
bode(Gc*G1)
```



```
%% Es 3-c risposta sistema compensato
Gcl2 = feedback(Gc*G1,1);
figure,step(Gcl2,popt);
```