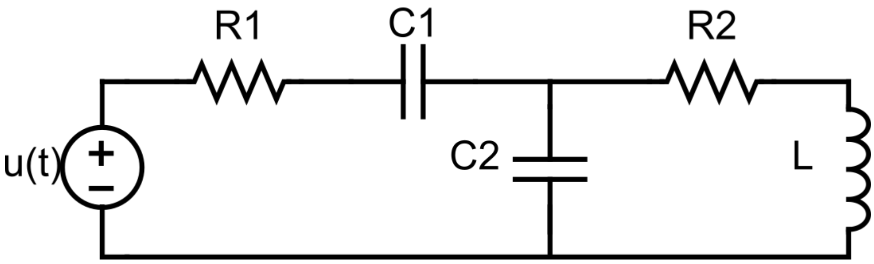
Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (6 crediti) / "CONTROLLI AUTOMATICI" (A.A. fino al 2017/2018)

Prova scritta – 19 settembre 2019

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il circuito elettrico passivo mostrato nella seguente figura:



Indicando con x_1, x_2, x_3 rispettivamente la tensione ai capi del condensatore C1, la tensione ai capi del condensatore C2 e la corrente nell'induttore L, il modello matematico del circuito si può ottenere applicando le leggi di Kirchhoff e le relazioni di base di elementi elettrici passivi, dalle quali derivano le seguenti equazioni differenziali:

$$C_1\dot{x}_1 = \frac{u-x_1-x_2}{R_1}$$

$$C_2\dot{x}_2 = \frac{u-x_1-x_2}{R_1} - x_3$$

$$L\dot{x}_3 = x_2 - R_2x_3$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, <u>di ordine 3</u> e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le ovvie (data la notazione usata nel circuito) scelte per le variabili di stato e ingresso e considerando come uscita $y = x_3$.

RISPOSTA:

Rielaborando le equazioni, si ottiene le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{1}{R_1C_1}x_1 - \frac{1}{R_1C_1}x_2 + \frac{1}{R_1C_1}u \\
\dot{x}_2 &= -\frac{1}{R_2C_2}x_1 - \frac{1}{R_2C_2}x_2 - \frac{1}{C_2}x_3 + \frac{1}{R_2C_2}u \\
\dot{x}_3 &= \frac{1}{L}x_2 - \frac{R_2}{L}x_3
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & -\frac{1}{R_1C_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_3$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso D = 0 (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la terza variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$R_1 = 5; \quad R_2 = 2; \quad C_1 = 0{,}1; \quad C_2 = 0{,}2; \quad L = 2;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno <u>completamente osservabile</u>, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema, di interesse per l'analisi di osservabilità (i.e. B non è di interesse), diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2,5 & -2,5 & -5 \\ 0 & 0,5 & -2,5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T \; A^T C^T \; (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1,25 \\ 0 & 0,5 & -2,5 \\ 1 & -2,5 & 3,75 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Si calcoli lo stato iniziale x(0) del sistema: $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x(t)$

Sapendo che $x(0.25) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

RISPOSTA:

Poichè

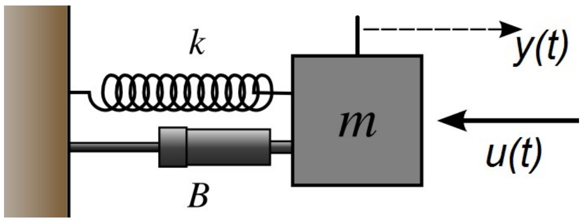
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 \\ e^{-3t} - e^{-4t} & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Allora:

$$x(0) = \begin{bmatrix} -e \\ e \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 4.

Si consideri il seguente sistema massa-molla-smorzatore (ingresso = forza applicata, uscita = spostamento della massa):



per il quale il modello matematico nel dominio del tempo risulta essere:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 9y(t) = u(t)$$

Si determinino la corrispondente funzione di trasferimento G(s) con la trasformata di Laplace ed il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino.

RISPOSTA:

Il modello matematico fornito, applicando la regola della derivata per le trasformate di Laplace, diventa:

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 9Y(s) = U(s)$$

Dal quale si deduce la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+4s+9}$$

Per determinare il coefficiente di smorzamento si faccia riferimento alla formulazione standard del denominatore di un sistema del secondo ordine (**NOTA**: non si considera il numeratore poiché esso influenza solo il guadagno statico G(0) della funzione e non l'andamento nel tempo della risposta):

$$G(s) = \frac{\cdots}{s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2}$$

Per determinare il tempo di assestamento è sufficiente considerare il coefficiente del termine di primo grado:

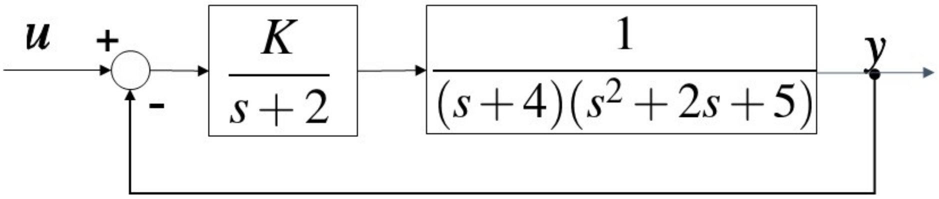
$2\delta\omega_n = 2 \Rightarrow \delta\omega_n = 2$

in quanto il tempo di assestamento è determinato dalla seguente formula (valida nell'ipotesi, effettivamente verificabile a posteriori, che δ sia inferiore a 0,7)

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$ (secondi)

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

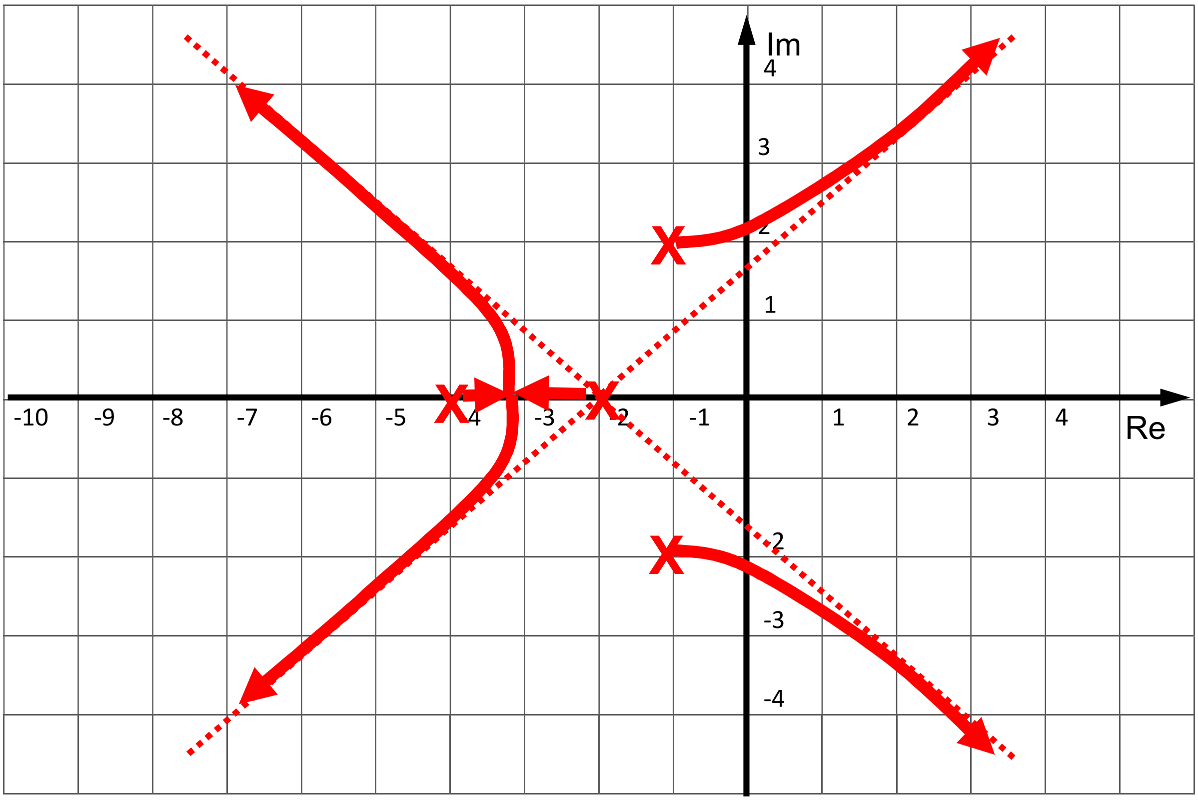


si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per $K > 0$ (luogo diretto) <u>e si determini il valore di K</u> (compatibile con il luogo diretto) per il quale il sistema risulti semplicemente stabile.

RISPOSTA:

NOTA: la funzione di trasferimento di anello non ha zeri ($n_z = 0$) e ha quattro poli ($n_p = 4$), dei quali una coppia di poli complessi coniugati in $-1\pm2j$ e due reali in -2 e -4. Pertanto il luogo ha quattro asintoti (numero asintoti = $n_p - n_z = 4$), disposti con angolo di $\pi/4$, $3/4\ \pi$, $5/4\ \pi$ e $7/4\ \pi$ (i.e. 45°, 135°, 225° e 315°) rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z}\left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i\right) = -2$$



Il luogo delle radici dimostra che superando un determinato valore di K il sistema in retroazione diventa instabile, con una coppia di poli complessi e coniugati. Si noti, infatti, che il luogo ha due rami tendenti a due asintoti diretti verso il semipiano destro (valori con parte reale positiva). Pertanto, i poli corrispondenti a questi due rami passano dall'essere complessi coniugati con parte reale negativa all'essere complessi coniugati con parte reale positiva, all'aumentare di K. Per uno specifico valore di K, corrispondente appunto alla condizione in cui il sistema è semplicemente stabile (o marginalmente stabile), i poli saranno complessi coniugati puramente immaginari. Applicando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

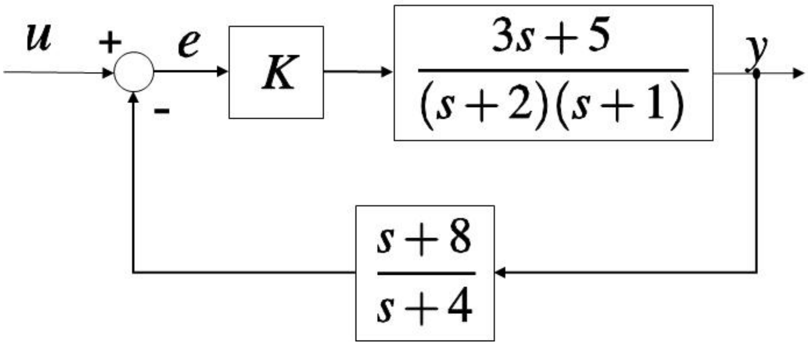
$$D_{cl}(s) = s^4 + 8s^3 + 25s^2 + 46s + 40 + K$$

si verifica che i due estremi dell'intervallo di valori di K per cui il sistema in retroazione risulta asintoticamente stabile sono -40 e 70,6875. Quest'ultimo valore, essendo il primo escluso dal vincolo su K richiesto dal testo (i.e. luogo diretto ➔ K > 0), determina il valore numerico richiesto dall'esercizio (i.e. tale per cui si hanno due poli complessi coniugati con parte reale nulla), cioè:

$$K = 70{,}6875$$

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema descritto dallo schema a blocchi indicato in figura:



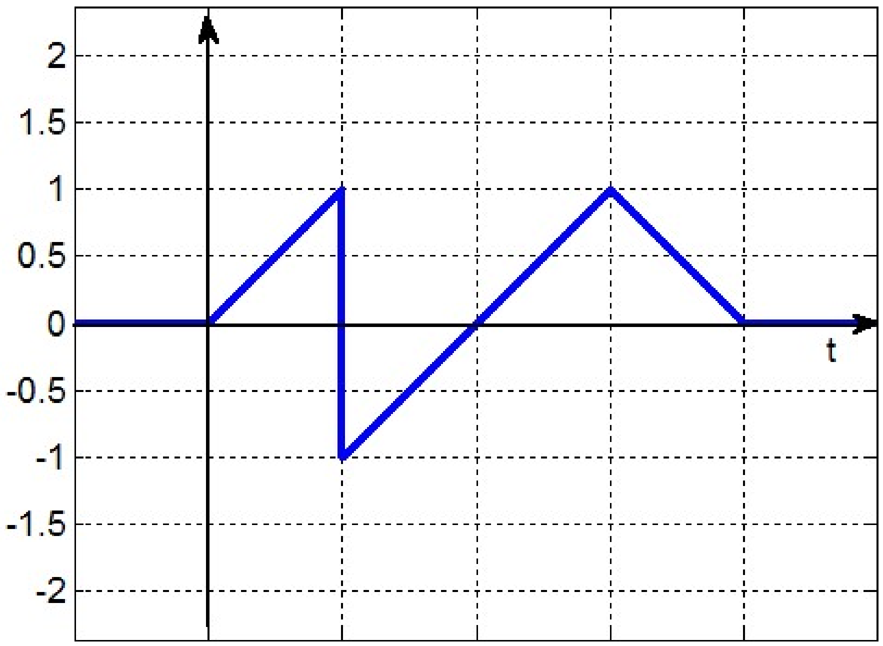
Si progetti il valore di K in modo che: $e(\infty) = 1/5 = 0,2$

RISPOSTA:

$$K = 4 / 5$$

ESERCIZIO 7.

Si determini la trasformata di Laplace del seguente segnale nel dominio del tempo $f(t)$:

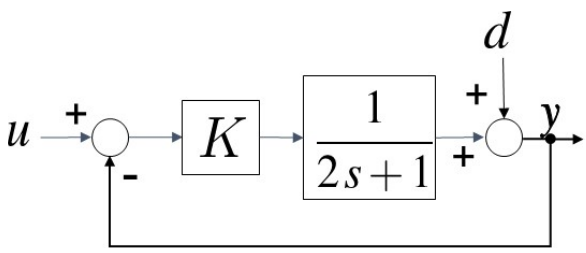


RISPOSTA:

$$F(s) = 1/s^2 - e^{-s} (2/s) - e^{-3s} (2/s^2) + e^{-4s} (1/s^2)$$

ESERCIZIO 8.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino:

- il valore di K tale per cui il sistema chiuso in retroazione risulti avere tempo di assestamento pari a $T_a = 0{,}5$ secondi in risposta ad un gradino unitario applicato all'ingresso u (i.e. $U(s) = 1/s$) con segnale di disturbo $d = 0$.
  NOTA: il sistema considerato è del primo ordine.
- Il valore dell'uscita a regime (i.e. $\lim_{t\to\infty} y(t)$) ottenuto sostituendo il valore di K precedentemente ottenuto e considerando l'ingresso u nullo e il segnale di disturbo a gradino unitario (i.e. $D(s) = 1/s$).

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso, eliminando la presenza del segnale di disturbo (e del relativo nodo sommatore) risulta:

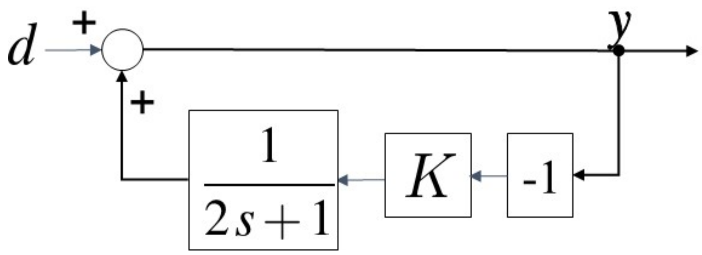
$$Den_{cl}(s) = 2\,s + 1 + K$$

Per determinarne il tempo di assestamento in risposta la gradino unitario (sistema del <u>primo ordine</u>) è necessario ricavare la costante di tempo considerando la struttura di riferimento del denominatore di un sistema del primo ordine: $(\tau\ s + 1)$. Ciò significa normalizzare il termine costante, per cui il sistema risulta avere costante di tempo:

$$\tau = \frac{2}{1+K}$$

Ricordando che per un sistema del primo ordine il tempo di assestamento (al 5%) è pari a $T_a = 3\ \tau$, imponendo a questo ultimo il vincolo imposto dal testo si ottiene $K = 11$.

Con tale valore di K, il valore dell'uscita a regime con ingresso nullo e disturbo a gradino corrisponde al guadagno statico della funzione di trasferimento del seguente schema in retroazione (ottenuto rielaborando lo schema di partenza eliminando il nodo sommatore nel quale entra l'ingresso e mantenendo il segno della retroazione entrante nel nodo):



La funzione di trasferimento tra uscita e disturbo risulta quindi essere:

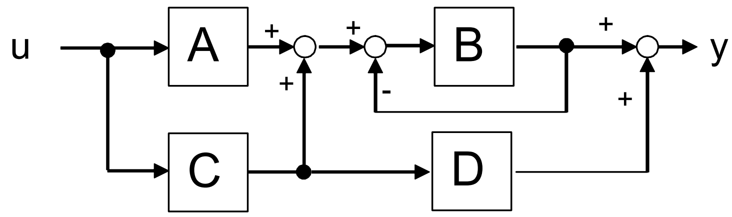
$$G_{cl,d}(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{2\,s+1}{2\,s+1+K}$$

il cui guadagno statico (i.e. $G_{cl,d}(0)$) corrisponde appunto al valore di regime di y(t) con disturbo a gradino, in questo caso pari a 1/12.
La risposta finale è quindi:

$$K = 11 \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = 1/12$$

ESERCIZIO 9.

Si determini la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi:

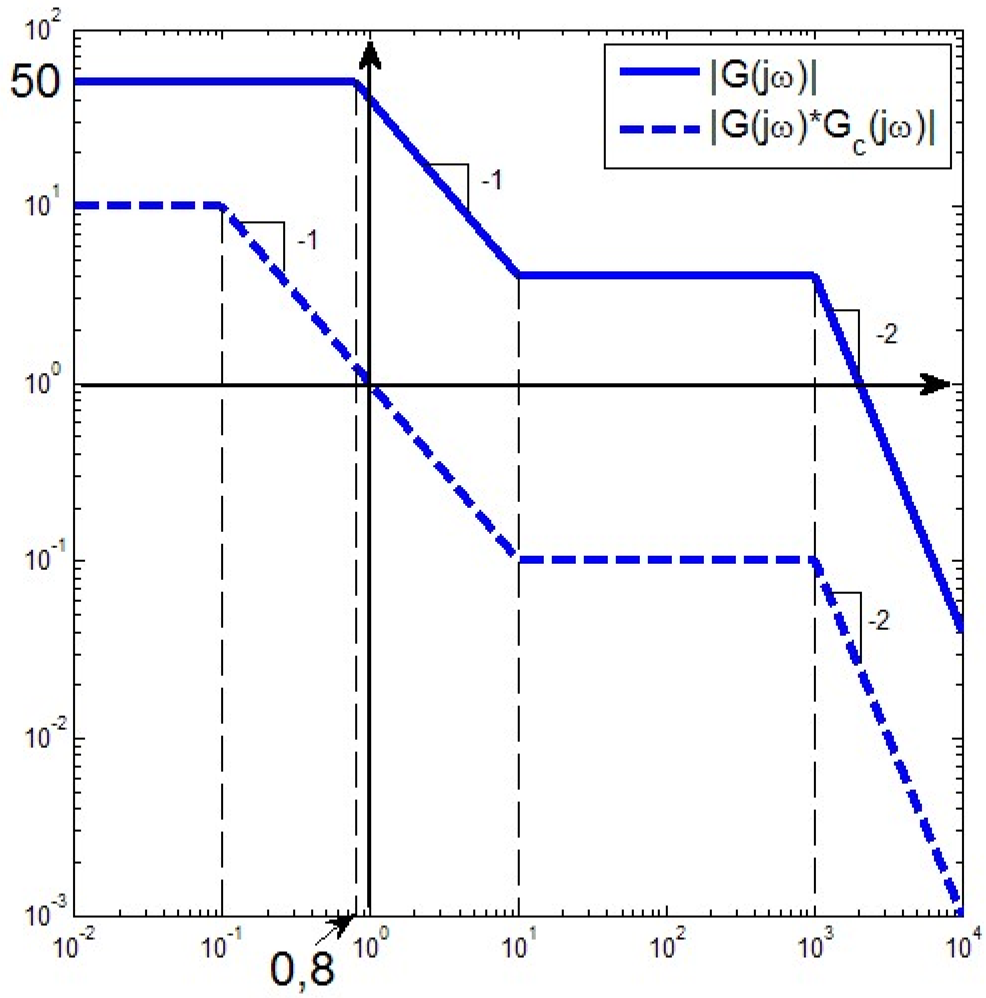


RISPOSTA:

y / u = [(A + C) B] / (1 + B) + C D

ESERCIZIO 10.

Dati i seguenti diagrammi di Bode delle ampiezze:



si determinino le funzioni di trasferimento **G(s)** e **G_c(s)**, supposte entrambe a fase minima.

RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{50\left(1+\frac{s}{10}\right)}{\left(1+\frac{s}{0{,}8}\right)\left(1+\frac{s}{1000}\right)^2}$$

$$G_c(s) = \frac{\left(1+\frac{s}{0{,}8}\right)}{5\left(1+\frac{s}{10^{-1}}\right)}$$