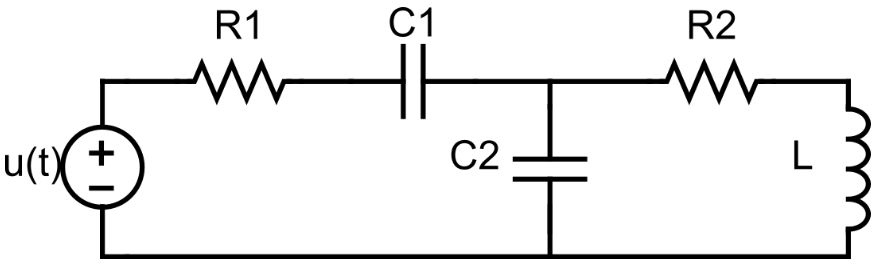
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 crediti) / “CONTROLLI AUTOMATICI”

Prova scritta – 19 settembre 2019

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il circuito elettrico passivo mostrato nella seguente figura:



Indicando con x_1, x_2, x_3 rispettivamente la tensione ai capi del condensatore C1, la tensione ai capi del condensatore C2 e la corrente nell’induttore L, il modello matematico del circuito si può ottenere applicando le leggi di Kirchhoff e le relazioni di base di elementi elettrici passivi, dalle quali derivano le seguenti equazioni differenziali:

$$C_1\dot{x}_1 = \frac{u-x_1-x_2}{R_1}$$

$$C_2\dot{x}_2 = \frac{u-x_1-x_2}{R_1} - x_3$$

$$L\dot{x}_3 = x_2 - R_2x_3$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, <u>di ordine 3</u> e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le ovvie (data la notazione usata nel circuito) scelte per le variabili di stato e ingresso e considerando come uscita $y = x_3$.

RISPOSTA:

Rielaborando le equazioni, si ottiene le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{1}{R_1C_1}x_1 - \frac{1}{R_1C_1}x_2 + \frac{1}{R_1C_1}u \\
\dot{x}_2 &= -\frac{1}{R_2C_2}x_1 - \frac{1}{R_2C_2}x_2 - \frac{1}{C_2}x_3 + \frac{1}{R_2C_2}u \\
\dot{x}_3 &= \frac{1}{L}x_2 - \frac{R_2}{L}x_3
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & -\frac{1}{R_1C_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_3$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la terza variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$R_1 = 5; \quad R_2 = 2; \quad C_1 = 0{,}1; \quad C_2 = 0{,}2; \quad L = 2;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente osservabile, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema, di interesse per l'analisi di osservabilità (i.e. B non è di interesse), diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2,5 & -2,5 & -5 \\ 0 & 0,5 & -2,5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

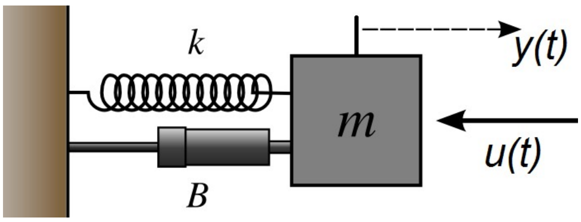
$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T \ A^TC^T \ (A^T)^2C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1,25 \\ 0 & 0,5 & -2,5 \\ 1 & -2,5 & 3,75 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Si consideri il seguente sistema massa-molla-smorzatore (ingresso = forza applicata, uscita = spostamento della massa):



per il quale il modello matematico nel dominio del tempo risulta essere:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 9y(t) = u(t)$$

Si determinino la corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$ con la trasformata di Laplace ed il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino.

RISPOSTA:

Il modello matematico fornito, applicando la regola della derivata per le trasformate di Laplace, diventa:

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 9Y(s) = U(s)$$

Dal quale si deduce la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+4s+9}$$

Per determinare il coefficiente di smorzamento si faccia riferimento alla formulazione standard del denominatore di un sistema del secondo ordine (**NOTA**: non si considera il numeratore poiché esso influenza solo il guadagno statico G(0) della funzione e non l'andamento nel tempo della risposta):

$$G(s) = \frac{\cdots}{s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2}$$

Per determinare il tempo di assestamento è sufficiente considerare il coefficiente del termine di primo grado:

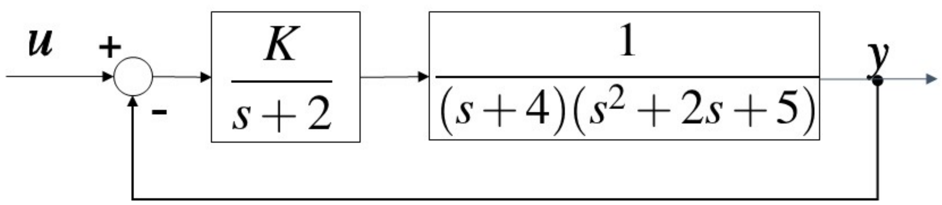
$2\delta\omega_n = 2 \Rightarrow \delta\omega_n = 2$

in quanto il tempo di assestamento è determinato dalla seguente formula (valida nell'ipotesi, effettivamente verificabile a posteriori, che δ sia inferiore a 0,7)

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ (secondi)}$$

ESERCIZIO 4.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

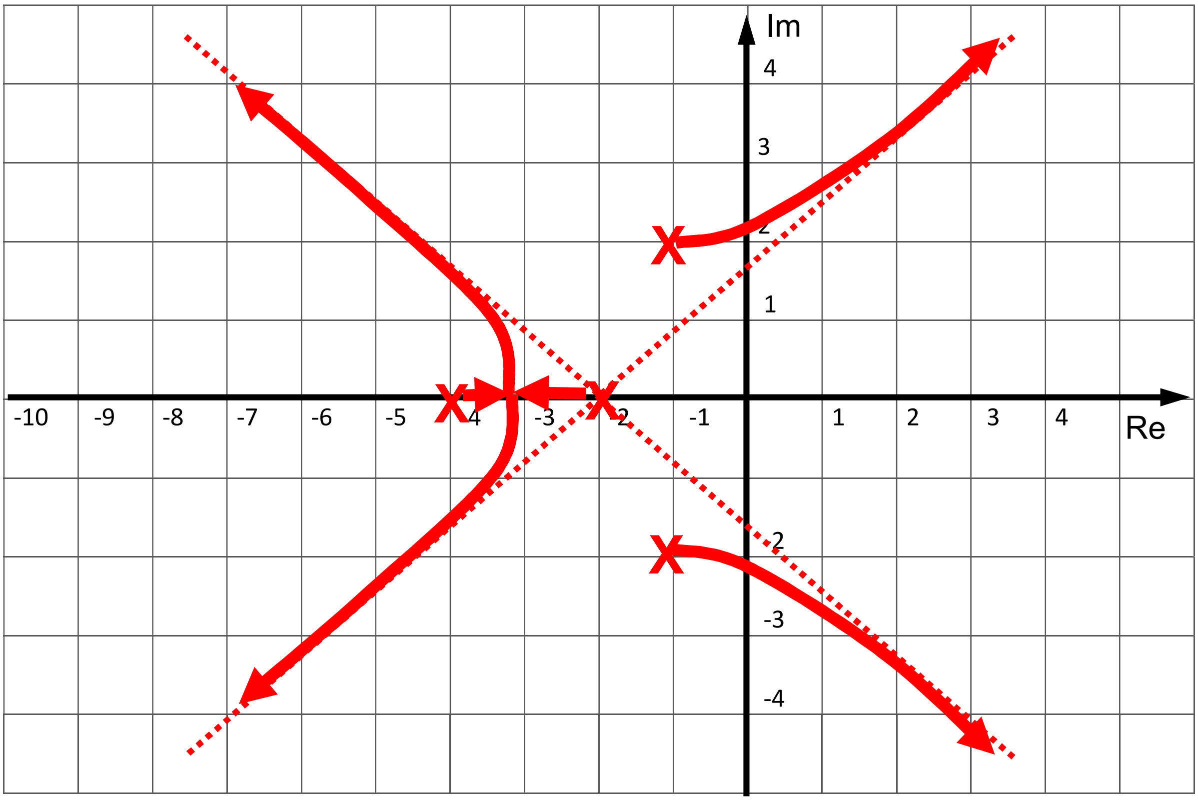


si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per $K > 0$ (luogo diretto) <u>e si determini il valore di K</u> (compatibile con il luogo diretto) per il quale il sistema risulti semplicemente stabile.

RISPOSTA:

NOTA: la funzione di trasferimento di anello non ha zeri ($n_z = 0$) e ha quattro poli ($n_p = 4$), dei quali una coppia di poli complessi coniugati in $-1\pm2j$ e due reali in -2 e -4. Pertanto il luogo ha quattro asintoti (numero asintoti = $n_p - n_z = 4$), disposti con angolo di $\pi/4$, 3/4 π, 5/4 π e 7/4 π (i.e. 45°, 135°, 225° e 315°) rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z}\left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i\right) = -2$$



Il luogo delle radici dimostra che superando un determinato valore di K il sistema in retroazione diventa instabile, con una coppia di poli complessi e coniugati. Si noti, infatti, che il luogo ha due rami tendenti a due asintoti diretti verso il semipiano destro (valori con parte reale positiva). Pertanto, i poli corrispondenti a questi due rami passano dall'essere complessi coniugati con parte reale negativa all'essere complessi coniugati con parte reale positiva, all'aumentare di K. Per uno specifico valore di K, corrispondente appunto alla condizione in cui il sistema è semplicemente stabile (o marginalmente stabile), i poli saranno complessi coniugati puramente immaginari. Applicando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

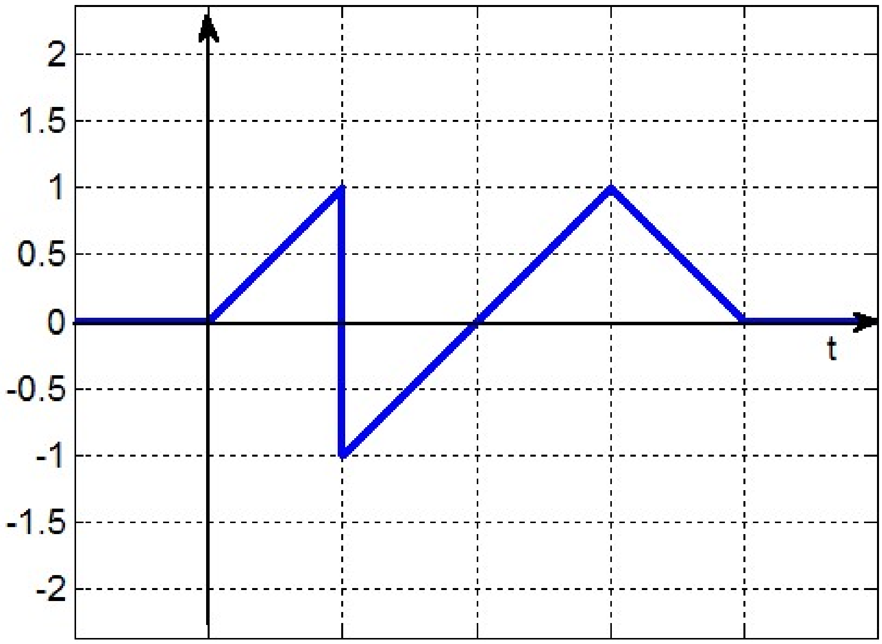
$$D_{cl}(s) = s^4 + 8s^3 + 25s^2 + 46s + 40 + K$$

si verifica che i due estremi dell'intervallo di valori di K per cui il sistema in retroazione risulta asintoticamente stabile sono -40 e 70,6875. Quest'ultimo valore, essendo il primo escluso dal vincolo su K richiesto dal testo (i.e. luogo diretto ➔ K > 0), determina il valore numerico richiesto dall'esercizio (i.e. tale per cui si hanno due poli complessi coniugati con parte reale nulla), cioè:

K = 70,6875

ESERCIZIO 5.

Si determini la trasformata di Laplace del seguente segnale nel dominio del tempo $f(t)$:

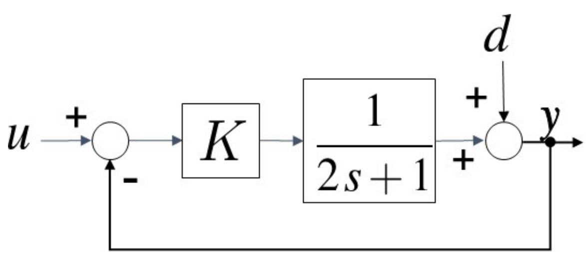


RISPOSTA:

$$F(s) = 1/s^2 - e^{-s}\,(\,2/s\,) - e^{-3s}\,(\,2/s^2\,) + e^{-4s}\,(\,1/s^2\,)$$

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino:

- il valore di K tale per cui il sistema chiuso in retroazione risulti avere tempo di assestamento pari a $T_a = 0{,}5$ secondi in risposta ad un gradino unitario applicato all'ingresso u (i.e. $U(s) = 1/s$) con segnale di disturbo $d = 0$.
  NOTA: il sistema considerato è del <u>primo ordine</u>.
- Il valore dell'uscita a regime (i.e. $\lim_{t\to\infty} y(t)$) ottenuto sostituendo il valore di K precedentemente ottenuto e considerando l'ingresso u nullo e il segnale di disturbo a gradino unitario (i.e. $D(s) = 1/s$).

RISPOSTA:
Il denominatore del sistema ad anello chiuso, eliminando la presenza del segnale di disturbo (e del relativo nodo sommatore) risulta:

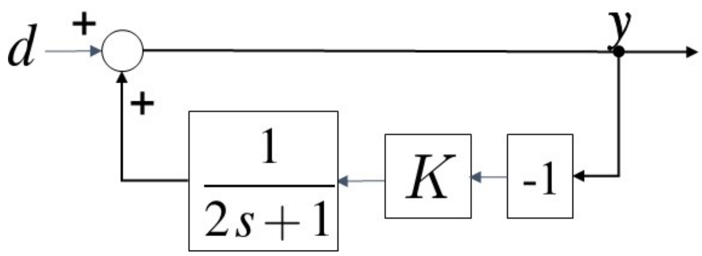
$$Den_{cl}(s) = 2\,s + 1 + K$$

Per determinarne il tempo di assestamento in risposta la gradino unitario (sistema del <u>primo ordine</u>) è necessario ricavare la costante di tempo considerando la struttura di riferimento del denominatore di un sistema del primo ordine: $(\tau\ s + 1)$. Ciò significa normalizzare il termine costante, per cui il sistema risulta avere costante di tempo:

$$\tau = \frac{2}{1+K}$$

Ricordando che per un sistema del primo ordine il tempo di assestamento (al 5%) è pari a $T_a = 3\ \tau$, imponendo a questo ultimo il vincolo imposto dal testo si ottiene $K = 11$.

Con tale valore di K, il valore dell'uscita a regime con ingresso nullo e disturbo a gradino corrisponde al guadagno statico della funzione di trasferimento del seguente schema in retroazione (ottenuto rielaborando lo schema di partenza eliminando il nodo sommatore nel quale entra l'ingresso e mantenendo il segno della retroazione entrante nel nodo):



La funzione di trasferimento tra uscita e disturbo risulta quindi essere:

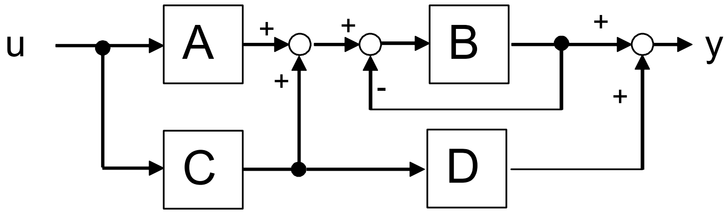
$$G_{cl,d}(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{2\,s+1}{2\,s+1+K}$$

il cui guadagno statico (i.e. $G_{cl,d}(0)$) corrisponde appunto al valore di regime di y(t) con disturbo a gradino, in questo caso pari a $1/12$.
La risposta finale è quindi:

$K = 11$ $\qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = 1/12$

ESERCIZIO 7.

Si determini la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi:

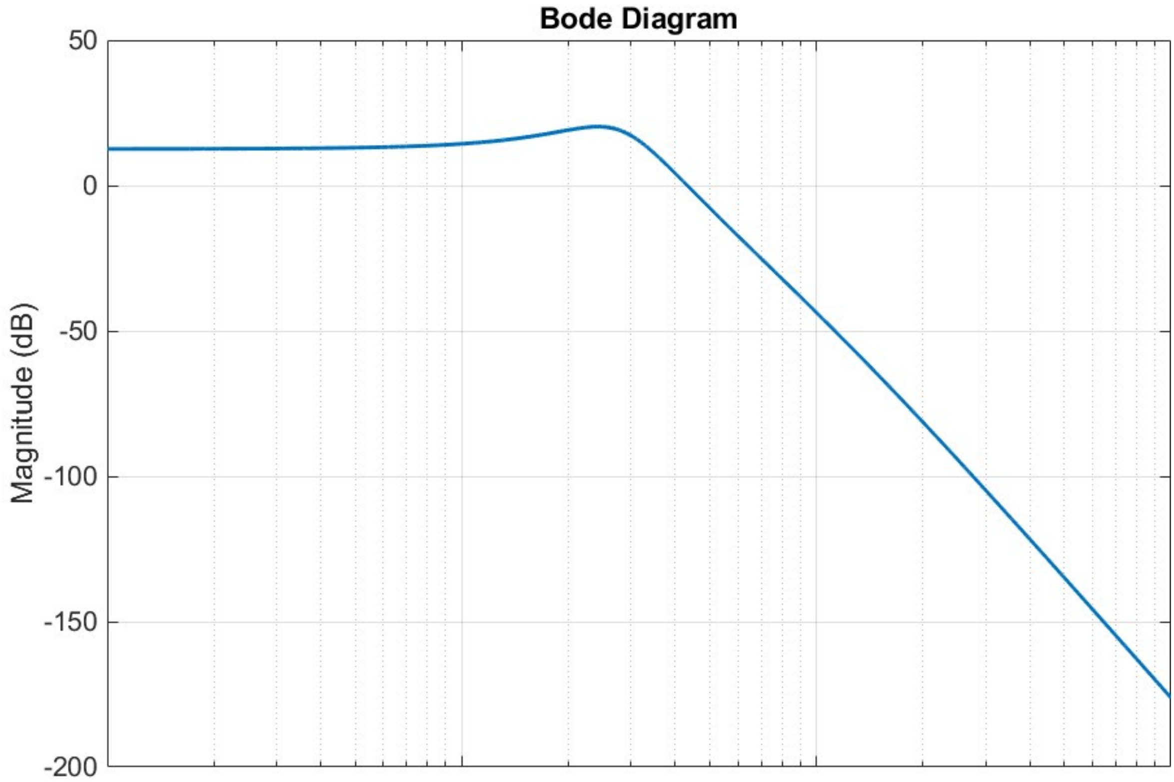


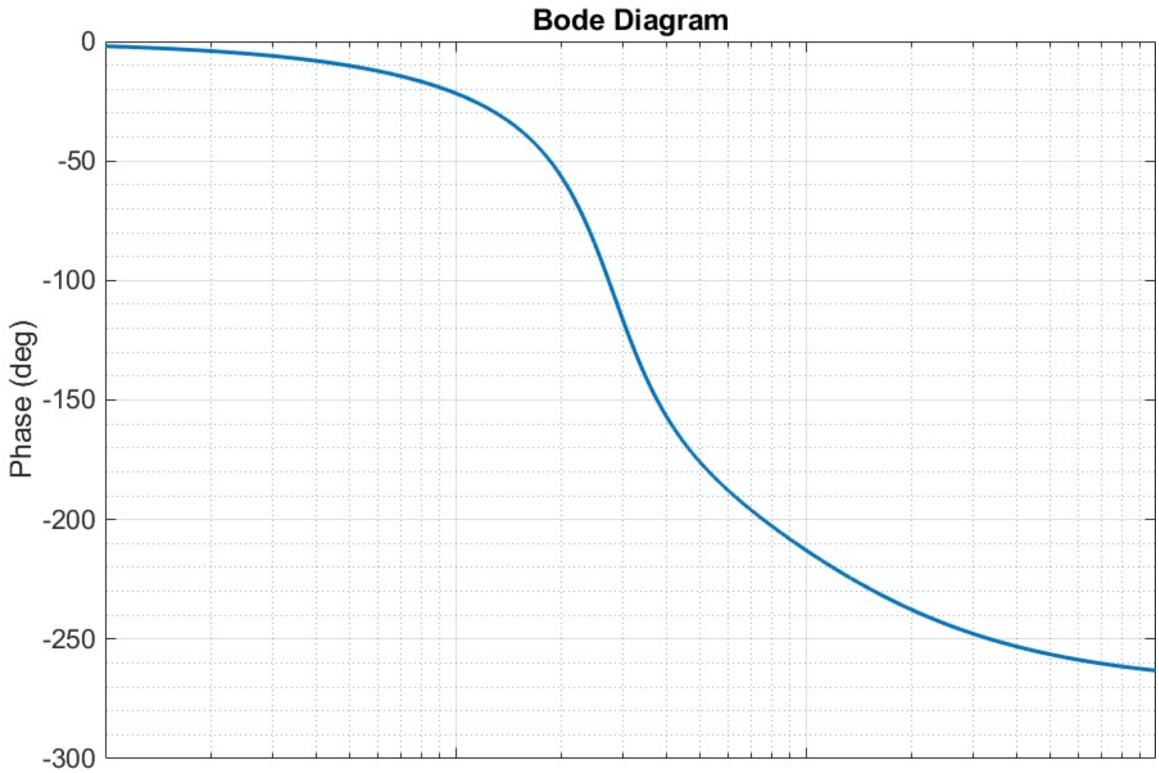
RISPOSTA:

y / u = [(A + C) B] / (1 + B) + C D

ESERCIZIO 8.

Dato il seguente diagramma di Bode completo (ampiezze in alto, fasi in basso), si determini per via grafica il margine di fase della funzione di trasferimento corrispondente (con arrotondamento al multiplo di 5° più vicino).





RISPOSTA:

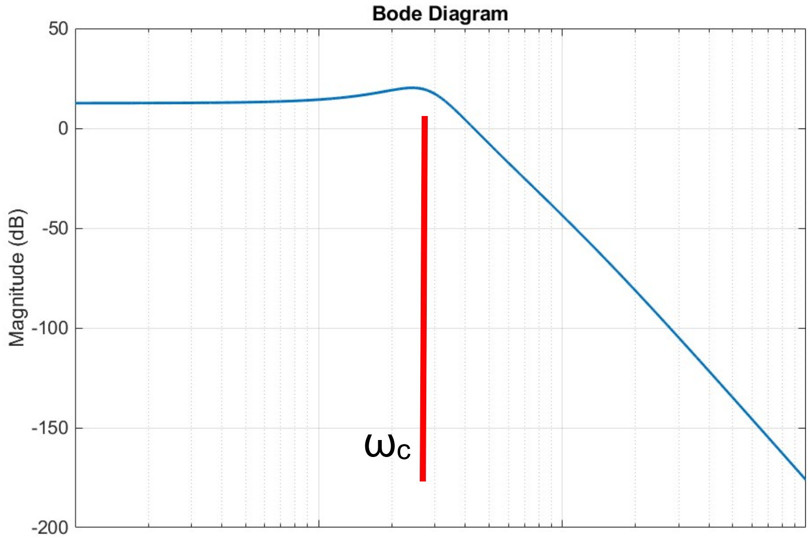
Il procedimento per determinare il margine di fase per via grafica dai diagrammi di Bode di una funzione di trasferimento è il seguente:

1. Si determina anzitutto la cosiddetta *pulsazione di incrocio* (o *pulsazione critica*), cioè la pulsazione ω_C alla quale il diagramma delle ampiezze è pari a 1, in valore assoluto.

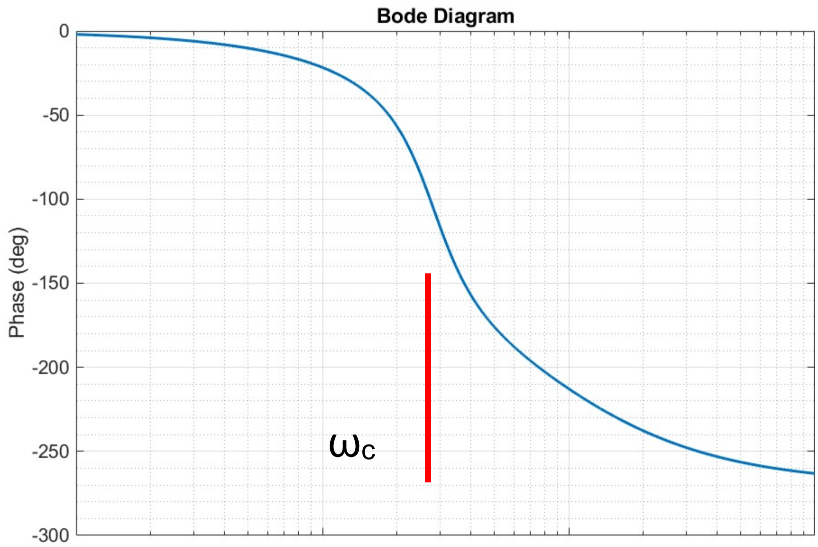
NOTA: il diagramma delle ampiezze fornito ha la scala delle ordinate in dB, pertanto il valore unitario del modulo corrisponde a 0 dB.

2. Si valuta il valore della fase in corrispondenza della pulsazione ω_C. Il margine di fase è l'angolo che occorre sottrarre al valore di fase ottenuto per arrivare a -180° (i.e. $-\pi$ radianti).

Dai diagrammi si può determinare la pulsazione di incrocio ω_C pari a circa 4,3 rad/s:



In corrispondenza di tale pulsazione, la fase corrisponde a (circa) -165°:



pertanto il margine di fase (i.e. $-180° = \arg[G(j\omega_c)] - M_f \Rightarrow M_f = \arg[G(j\omega_c)] + 180°$) è: $M_f = 15°$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.
La stabilità di un sistema lineare e stazionario:
O È funzione delle condizioni iniziali di un sistema
O È funzione del valore degli ingressi
O È funzione del valore dei disturbi
X È funzione degli autovalori del sistema

DOMANDA 2.
L'ingresso u(t) e l'uscita y(t) di un sistema sono legati dalla relazione $\dot{y}(t) = u(t)$
Tale sistema:
O ha una funzione di trasferimento pari a G(s) = Y(s) / U(s) = s
X ha una funzione di trasferimento pari a G(s) = Y(s) / U(s) = 1 / s
O ha una funzione di trasferimento pari a G(s) = Y(s) / U(s) = 1 / (s+1)
X è puramente dinamico

DOMANDA 3.
Due sistemi di tipo 0, entrambi asintoticamente stabili, aventi la stessa costante di posizione K_p, se vengono posti in retroazione negativa unitaria:
O Generano sistemi stabili ad anello chiuso
O Presentano errore a regime nullo per ingresso a gradino
X Presentano lo stesso errore a regime per lo stesso ingresso a gradino
O Presentano errore a regime nullo per ingresso a rampa

DOMANDA 4.
La funzione di trasferimento di un sistema dinamico a tempo continuo è:

$$G(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+3)^2}$$

Il sistema complessivo dal quale viene ricavata tale funzione:
O È puramente dinamico
O È instabile
X Può essere asintoticamente stabile
X È a fase minima

DOMANDA 5.
Posto 0 < *b* < *a*, il sistema avente la funzione di trasferimento:

$$G(\mathrm{s}) = \frac{(\mathrm{s}+a)}{(\mathrm{s}+b)}$$

risulta essere:
O una rete anticipatrice a guadagno statico unitario
O una rete anticipatrice a guadagno statico non unitario
O una rete ritardatrice a guadagno statico unitario

X una rete ritardatrice a guadagno statico non unitario