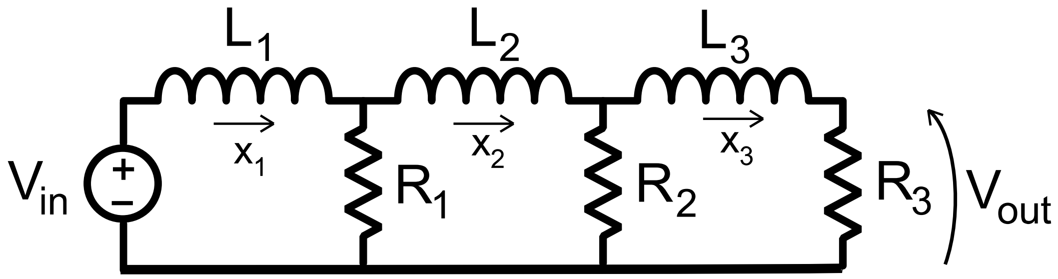
Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (6 crediti) / "CONTROLLI AUTOMATICI"

Prova scritta – 21 gennaio 2020

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il circuito elettrico passivo mostrato dalla seguente figura:



Applicando le opportune leggi di Kirchhoff e di Ohm, il modello matematico del sistema può essere descritto tramite le seguenti equazioni differenziali:

$$L_1\dot{x}_1 = V_{in} - (x_1 - x_2)R_1$$

$$L_2\dot{x}_2 = (x_1 - x_2)R_1 - (x_2 - x_3)R_2$$

$$L_3\dot{x}_3 = (x_2 - x_3)R_2 - x_3R_3$$

Si noti che la tensione V_{out}, corrispondente all'uscita del sistema, risulta essere pari alla quantità $R_3\, x_3$.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, <u>di ordine 3</u> e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Fissando le ovvie scelte per le variabili di stato e le seguenti per quelle di ingresso e uscita:

$$u = V_{in};\ \ y = V_{out} = R_3x_3;$$

RISPOSTA:

Rielaborando le equazioni, si ottengono le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{R_1}{L_1}x_1 + \frac{R_1}{L_1}x_2 + \frac{1}{L_1}u \\
\dot{x}_2 &= \frac{R_1}{L_2}x_1 - \frac{R_1+R_2}{L_2}x_2 + \frac{R_2}{L_2}x_3 \\
\dot{x}_3 &= \frac{R_2}{L_3}x_2 - \frac{R_2+R_3}{L_3}x_3
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1+R_2}{L_2} & \frac{R_2}{L_2} \\ 0 & \frac{R_2}{L_3} & -\frac{R_2+R_3}{L_3} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = R_3x_3$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso D = 0 (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che determina come uscita la terza variabile dal vettore di stato moltiplicata per R_3 è:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$R_1 = 1; \quad R_2 = 3; \quad R_3 = 5; \quad L_1 = 0{,}1; \quad L_2 = 0{,}5; \quad L_3 = 0{,}2;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno <u>completamente osservabile</u>, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema, di interesse per l'analisi di osservabilità (i.e. B non è di interesse), diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 2 & -8 & 6 \\ 0 & 15 & -40 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

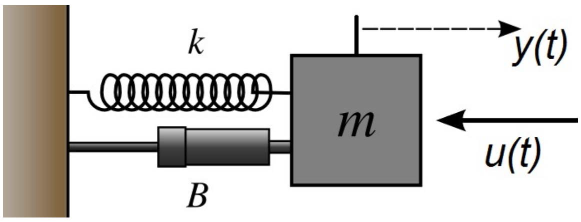
$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T \; A^T C^T \; (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 150 \\ 0 & 75 & -3600 \\ 5 & -200 & 8450 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Si consideri il seguente sistema massa-molla-smorzatore (ingresso = forza applicata, uscita = spostamento della massa):



per il quale il modello matematico nello spazio degli stati risulta essere:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \; y(t) = Cx(t) \quad \text{con}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la corrispondente funzione di risposta impulsiva W(t).

RISPOSTA:

La risposta impulsiva del sistema è:

$$W(t) = C\mathrm{e}^{At}B$$

Poiché la matrice A risulta avere autovalori pari a $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_1 = -2$, la relativa matrice esponenziale è:

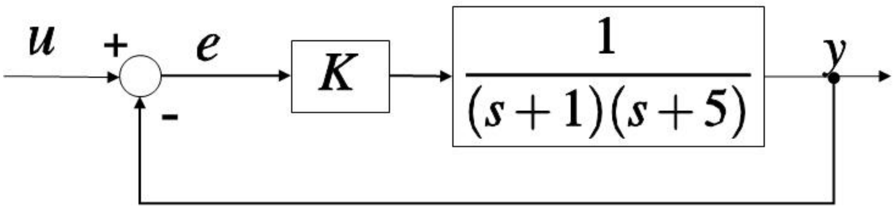
$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$W(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

ESERCIZIO 4.

Dato il seguente sistema in retroazione:



al quale viene applicato un ingresso a gradino unitario ($U(s) = 1/s$) si calcoli il valore di K tale per cui il sistema considerato risulti avere errore a regime $e(\infty) = 0{,}2$.
Una volta determinato il valore di K, si calcoli il coefficiente di smorzamento δ che il sistema chiuso in retroazione risulta avere per tale valore di progetto.

RISPOSTA:

Poiché il sistema ha retroazione unitaria negativa, l'errore a regime corrisponde al limite:

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + G(s)} \quad \text{con} \quad G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+5)}$$

Pertanto, risulta:

$$\frac{1}{1+\frac{K}{5}} = \frac{1}{5}$$

da cui si ottiene che:

$$K = 20$$

permette di ottenere l'errore a regime voluto. Con questo valore di ***K***, il denominatore ad anello chiuso risulta:

$$s^2 + 6s + 5 + K = s^2 + 6s + 25$$

Confrontando tale denominatore con quello tipico dei sistemi del secondo ordine:

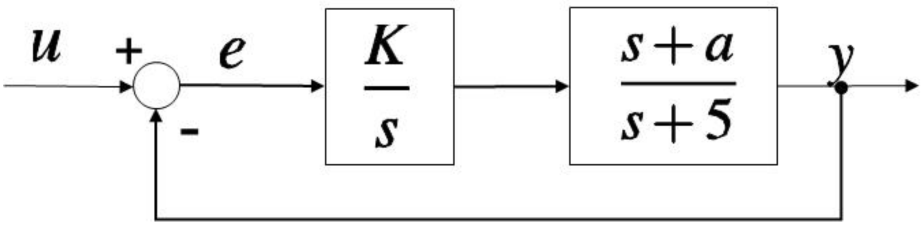
$$s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$$

si può osservare che $\omega_n = 5$ e, pertanto, il coefficiente di smorzamento è:

$$\delta = 0{,}6$$

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K e a tali che il sistema ad anello chiuso risulti avere una coppia di poli complessi e coniugati in $p_{1,2} = -3 \pm j\,2$

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta $= s^2 + (K + 5)\,s + K\,a$.

Imporre che il sistema ad anello chiuso abbia i poli $p_{1,2} = -3 \pm j\,2$ significa imporre che:

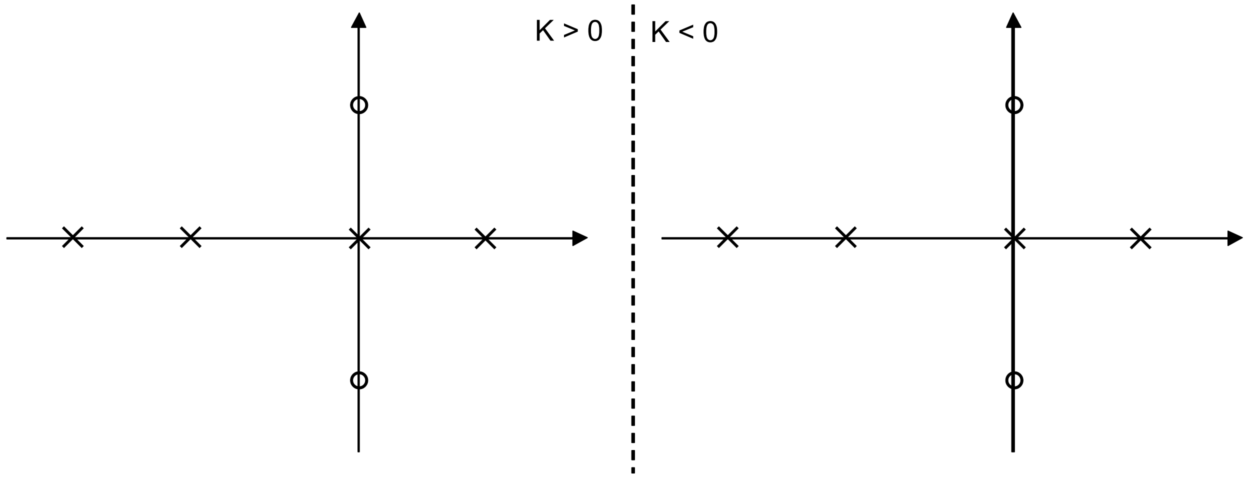
$$s^2 + (K + 5)\,s + K\,a = s^2 + 6\,s + 13$$

Risolvendo il sistema di due equazioni in due incognite (K e a) ottenuto uguagliando uguagliando due termini costanti e i due coefficienti dei termini di primo grado, si ottiene il risultato finale:

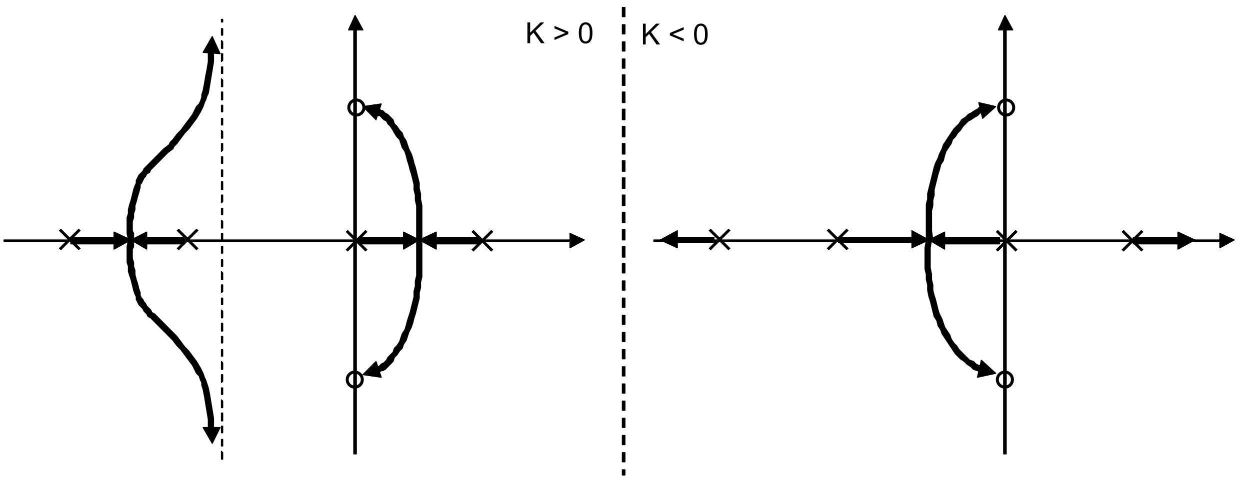
$$K = 1 \qquad\qquad a = 13$$

ESERCIZIO 6.

Si tracci l’andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema con poli (x) e zeri (o) della funzione di trasferimento d’anello come indicato in figura:

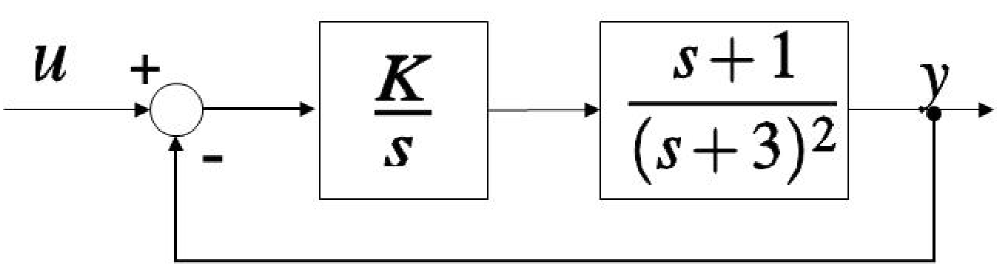


RISPOSTA:



ESERCIZIO 7.

Dato il sistema descritto dallo schema a blocchi mostrato nel seguito:



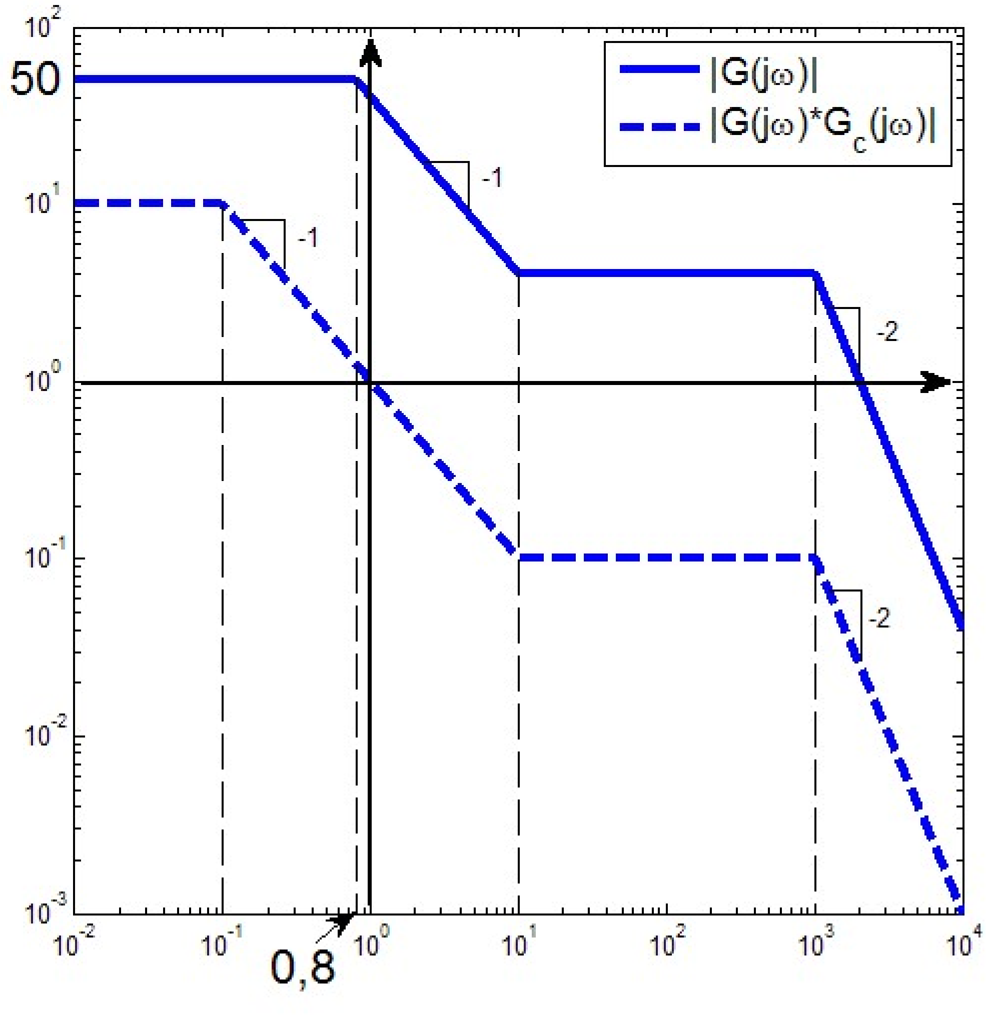
Si determinino i valori di K tali per cui il sistema chiuso in retroazione risulti asintoticamente stabile.

RISPOSTA:
Applicando il criterio di Routh al denominatore del sistema ad anello chiuso si ottiene:

$$K > 0$$

ESERCIZIO 8.

Dati i seguenti diagrammi di Bode delle ampiezze:



si determinino le funzioni di trasferimento **G(s)** e **G_c(s)**, supposte entrambe a fase minima.

RISPOSTA:

$$G(\mathsf{s}) = \frac{50(1+\frac{\mathsf{s}}{10})}{(1+\frac{\mathsf{s}}{0{,}8})(1+\frac{s}{1000})^2}$$

$$G_c(\mathsf{s}) = \frac{(1+\frac{\mathsf{s}}{0{,}8})}{5(1+\frac{\mathsf{s}}{10^{-1}})}$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.
La stabilità di un sistema lineare e stazionario:
O È funzione delle condizioni iniziali di un sistema
O È funzione del valore degli ingressi
O È funzione del valore dei disturbi
X È funzione degli autovalori del sistema

DOMANDA 2.
Gli elementi della matrice di risposta impulsiva sono funzioni che tendono a zero al tendere del tempo all'infinito nei sistemi dinamici, lineari e stazionari:

O semplicemente stabili
X asintoticamente stabili
O instabili
O completamente controllabili

DOMANDA 3.
Un sistema dinamico, lineare e stazionario, presenta uscita sinusoidale con ingresso nullo e stato iniziale NON nullo. Tale sistema può essere di ordine (numero di componenti del vettore di stato):

X 4
X 3
X 2
O 1

DOMANDA 4.
L'ingresso u(t) e l'uscita y(t) di un sistema sono legati dalla relazione $\dot{y}(t) = u(t)$
Tale sistema:
O ha una funzione di trasferimento pari a G(s) = Y(s) / U(s) = s
X ha una funzione di trasferimento pari a G(s) = Y(s) / U(s) = 1 / s
O ha una funzione di trasferimento pari a G(s) = Y(s) / U(s) = 1 / (s+1)
X è puramente dinamico

DOMANDA 5.
La risposta armonica di un sistema dinamico lineare e stazionario SISO, caratterizzato da una funzione di trasferimento G(s) con tutti i poli a parte reale negativa:

X si può ottenere da G(s) ponendo s = j ω
O consente di calcolare la risposta libera del sistema
O consente di determinare la matrice di transizione dello stato del sistema
X consente di calcolare, a regime, il valore dell'uscita sinusoidale del sistema, quando all'ingresso è applicato un ingresso sinusoidale