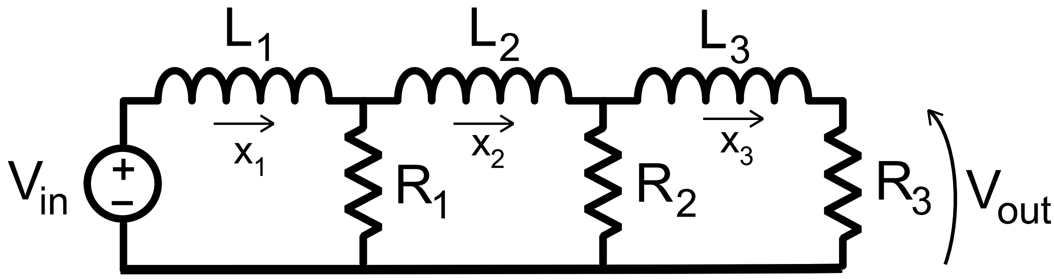
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)
(A.A. fino al 2017/2018)

Prova scritta – 21 gennaio 2020

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il circuito elettrico passivo mostrato dalla seguente figura:



Applicando le opportune leggi di Kirchhoff e di Ohm, il modello matematico del sistema può essere descritto tramite le seguenti equazioni differenziali:

$$L_1\dot{x}_1 = V_{in} - (x_1 - x_2)R_1$$

$$L_2\dot{x}_2 = (x_1 - x_2)R_1 - (x_2 - x_3)R_2$$

$$L_3\dot{x}_3 = (x_2 - x_3)R_2 - x_3R_3$$

Si noti che la tensione V_{out}, corrispondente all’uscita del sistema, risulta essere pari alla quantità $R_3\ x_3$.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, <u>di ordine 3</u> e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Fissando le ovvie scelte per le variabili di stato e le seguenti per quelle di ingresso e uscita:

$$u = V_{in};\ \ y = V_{out} = R_3x_3;$$

RISPOSTA:

Rielaborando le equazioni, si ottengono le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{R_1}{L_1}x_1 + \frac{R_1}{L_1}x_2 + \frac{1}{L_1}u \\
\dot{x}_2 &= \frac{R_1}{L_2}x_1 - \frac{R_1+R_2}{L_2}x_2 + \frac{R_2}{L_2}x_3 \\
\dot{x}_3 &= \frac{R_2}{L_3}x_2 - \frac{R_2+R_3}{L_3}x_3
\end{aligned}
$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$
A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1+R_2}{L_2} & \frac{R_2}{L_2} \\ 0 & \frac{R_2}{L_3} & -\frac{R_2+R_3}{L_3} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = R_3x_3$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che determina come uscita la terza variabile dal vettore di stato moltiplicata per R_3 è:

$$
C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}
$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$R_1 = 1; \quad R_2 = 3; \quad R_3 = 5; \quad L_1 = 0{,}1; \quad L_2 = 0{,}5; \quad L_3 = 0{,}2;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno <u>completamente osservabile</u>, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema, di interesse per l'analisi di osservabilità (i.e. B non è di interesse), diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 2 & -8 & 6 \\ 0 & 15 & -40 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

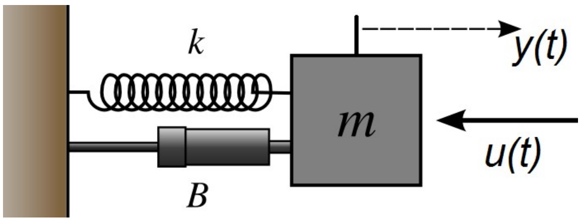
$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 150 \\ 0 & 75 & -3600 \\ 5 & -200 & 8450 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Si consideri il seguente sistema massa-molla-smorzatore (ingresso = forza applicata, uscita = spostamento della massa):



per il quale il modello matematico nello spazio degli stati risulta essere:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \ y(t) = Cx(t)$$ con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la corrispondente funzione di risposta impulsiva W(t).

RISPOSTA:

La risposta impulsiva del sistema è:

$$W(t) = C\mathrm{e}^{At}B$$

Poiché la matrice A risulta avere autovalori pari a $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_1 = -2$, la relativa matrice esponenziale è:

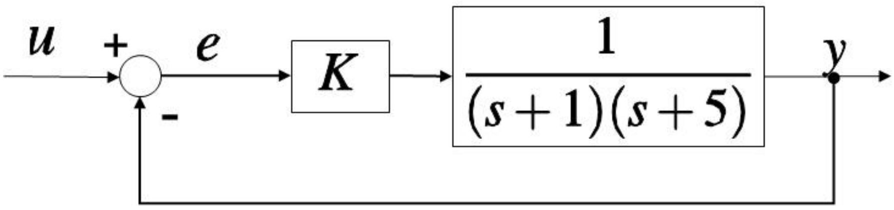
$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$W(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

ESERCIZIO 4.

Dato il seguente sistema in retroazione:



al quale viene applicato un ingresso a gradino unitario ($U(s) = 1/s$) si calcoli il valore di K tale per cui il sistema considerato risulti avere errore a regime $e(\infty) = 0{,}2$.
Una volta determinato il valore di K, si calcoli il coefficiente di smorzamento δ che il sistema chiuso in retroazione risulta avere per tale valore di progetto.

RISPOSTA:

Poiché il sistema ha retroazione unitaria negativa, l'errore a regime corrisponde al limite:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G(s)} \qquad \text{con} \qquad G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+5)}$$

Pertanto, risulta:

$$\frac{1}{1+\frac{K}{5}} = \frac{1}{5}$$

da cui si ottiene che:

$$K = 20$$

permette di ottenere l'errore a regime voluto. Con questo valore di ***K***, il denominatore ad anello chiuso risulta:

$$s^2 + 6s + 5 + K = s^2 + 6s + 25$$

Confrontando tale denominatore con quello tipico dei sistemi del secondo ordine:

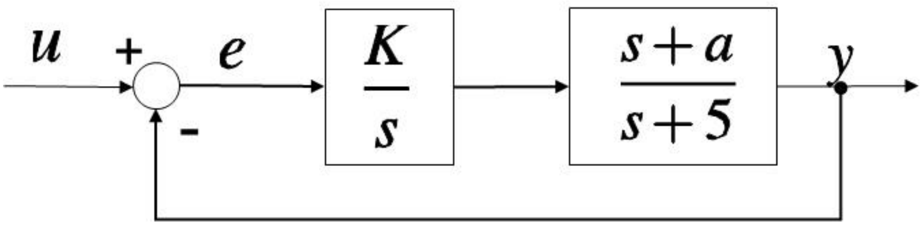
$$s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$$

si può osservare che $\omega_n = 5$ e, pertanto, il coefficiente di smorzamento è:

$$\delta = 0,6$$

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K e a tali che il sistema ad anello chiuso risulti avere una coppia di poli complessi e coniugati in $p_{1,2} = -3 \pm j\,2$

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta $= s^2 + (K + 5)\, s + K\, a$.

Imporre che il sistema ad anello chiuso abbia i poli $p_{1,2} = -3 \pm j\,2$ significa imporre che:

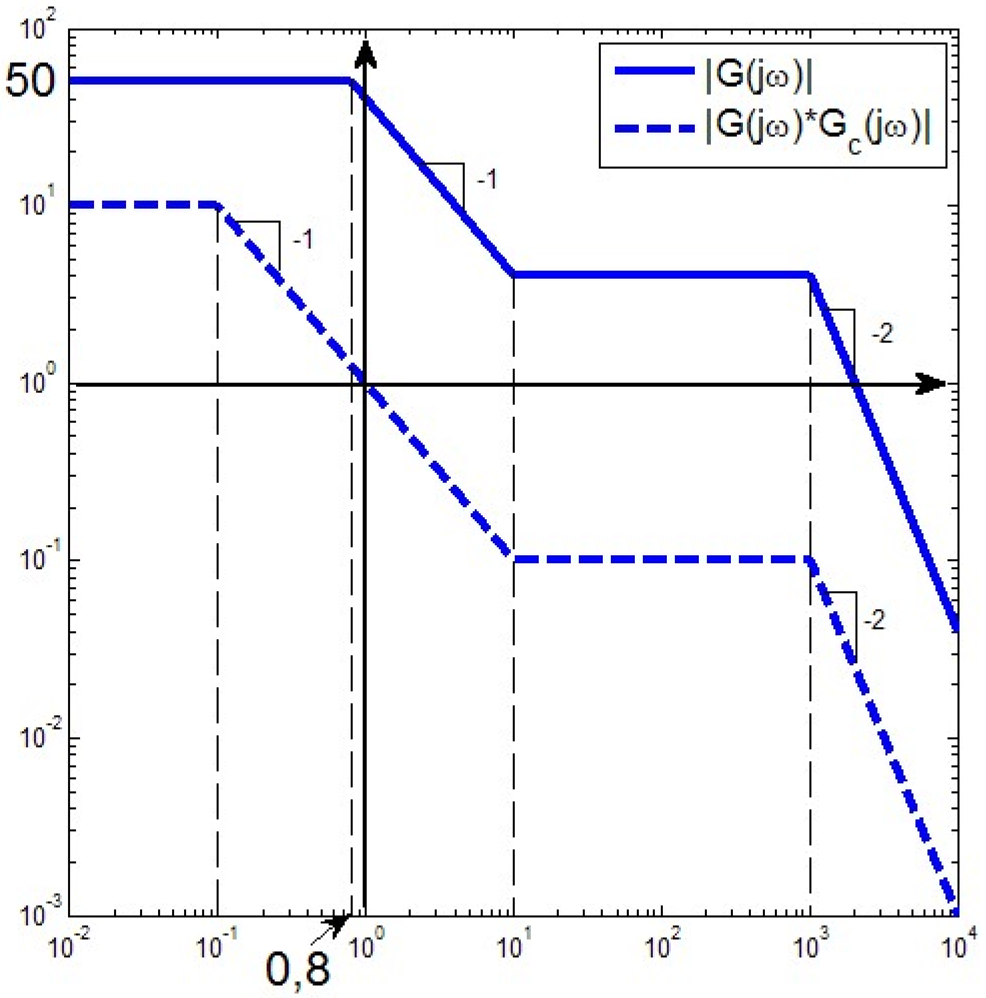
$$s^2 + (K + 5)\, s + K\, a = s^2 + 6\, s + 13$$

Risolvendo il sistema di due equazioni in due incognite (K e a) ottenuto uguagliando uguagliando due termini costanti e i due coefficienti dei termini di primo grado, si ottiene il risultato finale:

$$K = 1 \qquad\qquad a = 13$$

ESERCIZIO 6.

Dati i seguenti diagrammi di Bode delle ampiezze:



si determinino le funzioni di trasferimento $G(s)$ e $G_c(s)$, supposte entrambe a fase minima.

RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{50(1+\frac{s}{10})}{(1+\frac{s}{0,8})(1+\frac{s}{1000})^2}$$

$$G_c(s) = \frac{(1+\frac{s}{0,8})}{5(1+\frac{s}{10^{-1}})}$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.
Un sistema dinamico lineare e stazionario, completamente osservabile, è instabile. Gli osservatori identità progettati per tale sistema sono:

O instabili
X asintoticamente stabili
X sistemi lineari e stazionari
O sistemi lineari e non stazionari

NOTA: *qualsiasi osservatore identità deve essere progettato per garantire errore di stima tendente a zero, cioè per essere asintoticamente stabile (matrice **A+KC** con autovalori a parte reale negativa). Ciò è indipendente dalla eventuale instabilità del sistema sotto osservazione. Qualora un elemento dello stato di quest'ultimo tenda all'infinito, tenderà all'infinito anche il corrispondente elemento stato stimato, ma sempre con* $e = (\hat{x} - x) \rightarrow 0$

DOMANDA 2.
Il polinomio minimo di un sistema dinamico, lineare e stazionario, a tempo continuo, è dato da:

$$\alpha(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2$$

Tale sistema:
X ha almeno un modo asintoticamente stabile
X ha almeno un modo semplicemente stabile
X ha almeno un modo instabile
O è nel complesso semplicemente stabile

DOMANDA 3.
Gli elementi della matrice di risposta impulsiva sono funzioni che tendono a zero al tendere del tempo all'infinito nei sistemi dinamici, lineari e stazionari:

O semplicemente stabili
X asintoticamente stabili
O instabili
O completamente controllabili

DOMANDA 4.
Un sistema dinamico, lineare e stazionario, presenta uscita sinusoidale con ingresso nullo e stato iniziale NON nullo. Tale sistema può essere di ordine (numero di componenti del vettore di stato):

X 4
X 3
X 2
O 1

DOMANDA 5.

La risposta armonica di un sistema dinamico lineare e stazionario SISO, caratterizzato da una funzione di trasferimento $G(s)$ con tutti i poli a parte reale negativa:

X si può ottenere da $G(s)$ ponendo $s = j\omega$
O consente di calcolare la risposta libera del sistema
O consente di determinare la matrice di transizione dello stato del sistema
X consente di calcolare, a regime, il valore dell'uscita sinusoidale del sistema, quando all'ingresso è applicato un ingresso sinusoidale

DOMANDA 6.
Due sistemi di tipo 0, entrambi asintoticamente stabili, aventi la stessa costante di posizione K_p, se vengono posti in retroazione negativa unitaria:

O Generano sistemi stabili ad anello chiuso
O Presentano errore a regime nullo per ingresso a gradino
X Presentano lo stesso errore a regime per lo stesso ingresso a gradino
O Presentano errore a regime nullo per ingresso a rampa

DOMANDA 7.
Il luogo delle radici di una funzione di trasferimento di anello, con n poli ed m zeri ($n > m$), presenta almeno un asintoto reale:

X quando $K > 0$ (luogo diretto) e $n - m$ è dispari
O quando $K > 0$ (luogo diretto) e $n - m$ è pari
X quando $K < 0$ (luogo inverso) e $n - m$ è dispari
X quando $K < 0$ (luogo inverso) e $n - m$ è pari

DOMANDA 8.
Si vuole progettare un controllo in retroazione per il sistema avente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

in modo da ottenere errore a regime nullo per <u>ingressi a rampa</u>. Il controllore per tale sistema:

X può essere un regolatore PI
O può essere un regolatore PD
O deve avere almeno due poli nell'origine
X deve avere almeno un polo nell'origine