Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)

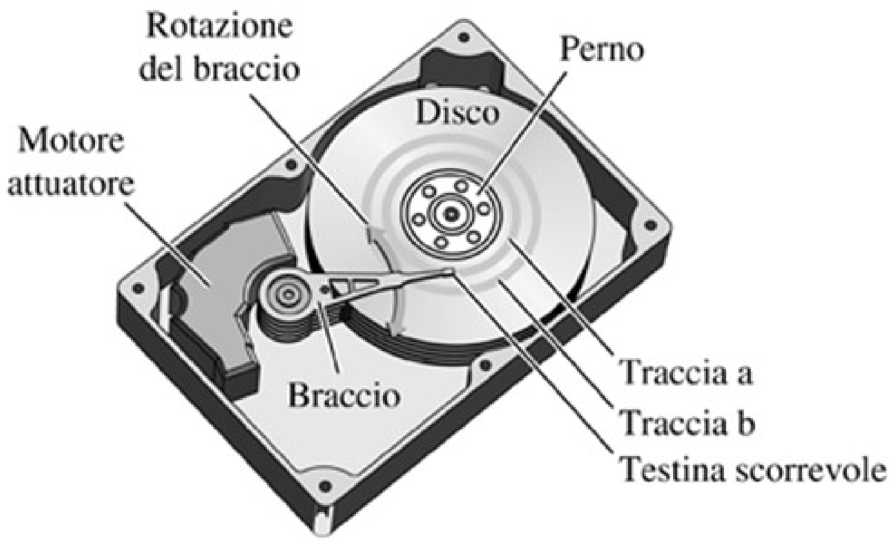
Prova MATLAB – 21 febbraio 2019

Istruzioni per lo svolgimento: lo studente deve consegnare al termine della prova **una cartella nominata Cognome_Nome**, contenente:

- Un Matlab script file (i.e. file di testo con estensione .m) riportante i comandi eseguiti (**NOTA**: per copiare i comandi dalla Command History, visualizzarla tramite menu “Layout → Command History → Docked”, selezionare in tale finestra le righe di interesse tramite *Ctrl+mouse left-click* e dal menu visualizzato tramite *mouse right-click* selezionare “create script”) e <u>la risposta alle eventuali richieste teoriche sotto forma di commento</u> (i.e. riga di testo preceduta dal simbolo %)
- Un file workspace.mat contenente le variabili definite nel corso dello svolgimento della prova (creato con il comando `save workspace`)
- Un file MS Word nel quale siano copiate le figure rilevanti per la dimostrazione dei risultati ottenuti (NOTA: per copiare una figura Matlab come bitmap, usare il menu “Edit → Copy Figure” dalla finestra della figura di interesse ed incollare con Ctrl+V nel file Word), <u>avendo cura che le figure siano copiate quando queste mostrano le caratteristiche di interesse per la verifica del progetto</u> (i.e. Settling Time, Stability Margins, ecc.).

INTRODUZIONE

Si consideri il meccanismo di posizionamento della testina di lettura di un hard-disk, la costruzione è mostrata nella seguente figura:



(fonte: "Controlli automatici" – R.C.Dorf, R.H. Bishop, Ed. Pearson)

Considerando solamente le equazioni dinamiche del motore (normalmente di tipo *Voice-Coil*) per la rotazione del braccio di supporto della testina e la meccanica flessibile dello stesso braccio, si ottiene un modello matematico semplificato descritto dalle seguenti equazioni differenziali:

$$L_a\dot{I}_a + R_a I_a + K_m\dot{\theta} = V_m$$

$$J_t\ddot{\theta} + B_t\dot{\theta} + K_t\theta = K_m I_a$$

Fissando le seguenti scelte per le variabili di stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = I_a;\ x_2 = \theta;\ x_3 = \dot{\theta};\ u = V_m;\ y = x_2;$$

Si ottiene un corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Con:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{K_m}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_m}{J_t} & -\frac{K_t}{J_t} & -\frac{B_t}{J_t} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 1.

a) Dato il modello ottenuto nell'introduzione, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

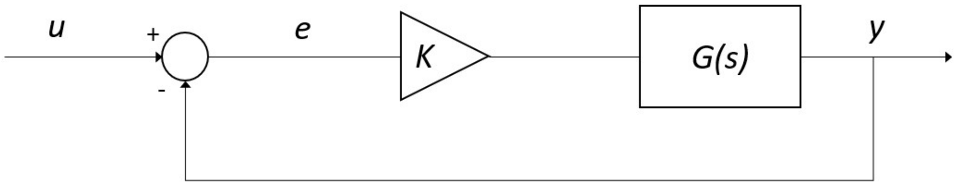
$$L_a = 0{,}1\ ; \quad R_a = 1; \quad K_m = 8; \quad K_t = 4; \quad B_t = 0{,}8\ ; \quad J_t = 0{,}2;$$

e si ricavi la funzione di trasferimento G(s) del sistema in esame.

b) Si determinino i poli della funzione di trasferimento e si verifichi se coincidono con gli autovalori di A. Descrivere il motivo di eventuali discrepanze tramite righe di commento (i.e. precedute dal simbolo %) sul file .m

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema in retroazione unitaria rappresentato in figura:



Con G(s) ricavata al punto a) dell'Esercizio 1.

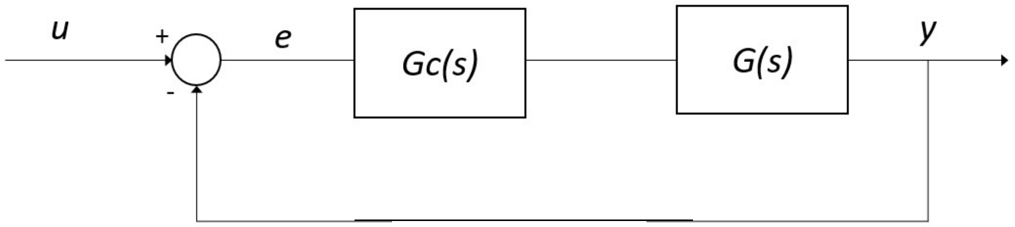
a) Si verifichi se il sistema ad anello chiuso, con guadagno $K = 1$, risulti o meno stabile tramite l'analisi della risposta $y(t)$ al gradino unitario.

b) Si determini, se esiste, il valore del guadagno K_{lim} per il quale il sistema risulta semplicemente stabile, utilizzando il grafico del luogo delle radici della funzione G(s).

c) Si ponga $K_1 = 0.8\, K_{lim}$, si visualizzi l'andamento della risposta al gradino $y(t)$ del sistema chiuso in retroazione con tale guadagno e si determini il tempo d'assestamento al 5%.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema rappresentato in figura



Con G(s) come al punto a) dell'Esercizio 2.

a) Si determinino come possibili funzioni di trasferimento alternative per il controllore $G_c(s)$ quelle di un regolatore di tipo PD e di uno di tipo PID, considerati entrambi nella formulazione classica e con i parametri K_p, T_i, T_d tarati secondo il metodo di Ziegler-Nichols basato sull'oscillazione critica ad anello chiuso (vedi tabella allegata).

a) Si verifichi tramite l'analisi della risposta al gradino del sistema compensato e chiuso in retroazione quale tra i regolatori proposti sia il più efficace in termini di errore a regime, massima sovraelongazione e tempo d'assestamento.

TIPO	K_p	T_i	T_d
PD	0.5 K_0	-	0.2 T_0
PID	0.6 K_0	0.5 T_0	0.125 T_0

NOTA:
K_0 = guadagno critico, di fatto corrispondente al guadagno determinato al punto b) dell'Esercizio 2, cioè tale per cui il sistema chiuso in retroazione risulti semplicemente stabile (i.e. con oscillazione persistente della risposta).
T_0 = periodo delle oscillazioni della risposta in condizione di stabilità semplice ad anello chiuso.

SOLUZIONE

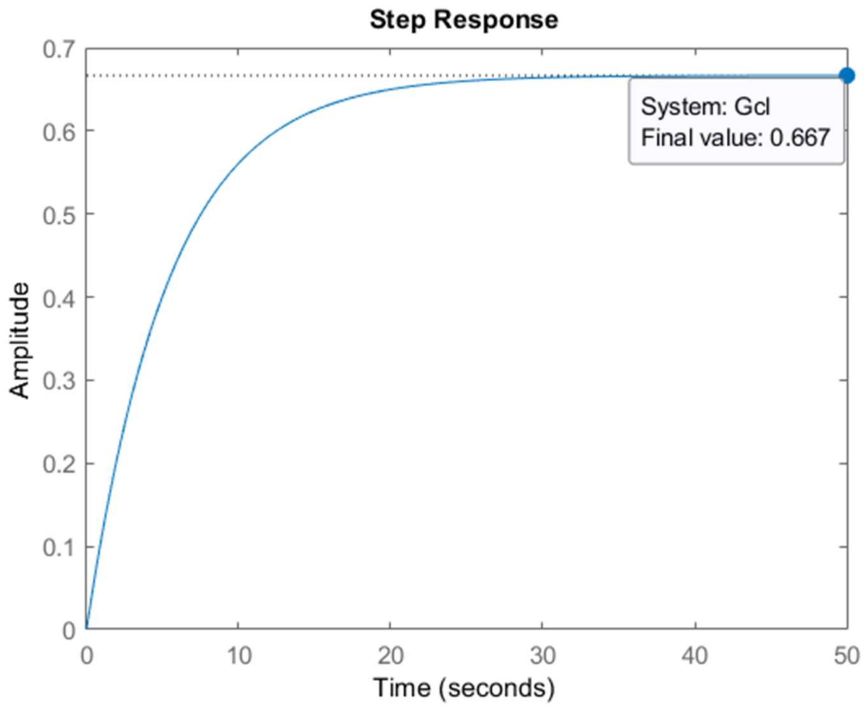
```
%% Matrici A,B,C,D

Ra = 1;
La = 0.1;
Km = 8;
Kt = 4;
Bt = 0.8;
Jt = 0.2;

A = [-Ra/La 0 -Km/La; 0 0 1; Km/Jt -Kt/Jt -Bt/Jt]

B = [1/La; 0; 0]

C = [0 1 0]

D = 0


A =

   -10     0   -80
     0     0     1
    40   -20    -4

B =

    10
     0
     0


C =

     0     1     0


D =

     0

%% Esercizio 1 - A funzione di trasferimento

G = tf(ss(A,B,C,D))


G =
```

```
             400
  ---------------------------
  s^3 + 14 s^2 + 3260 s + 200

Continuous-time transfer function.
```

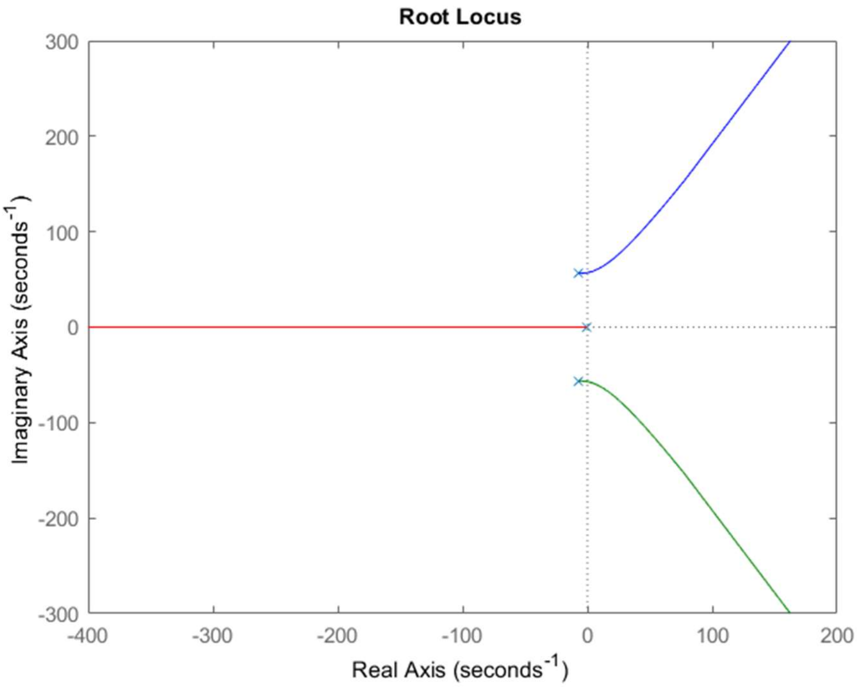
```
%% Esercizio 1 - B poli e autovalori
eg = eig(A)
p = pole(G)

r = rank((obsv(A,C))')

% poli e autovalori coincidono, infatti il sistema è
completamente
% osservabile (r = 3)
```

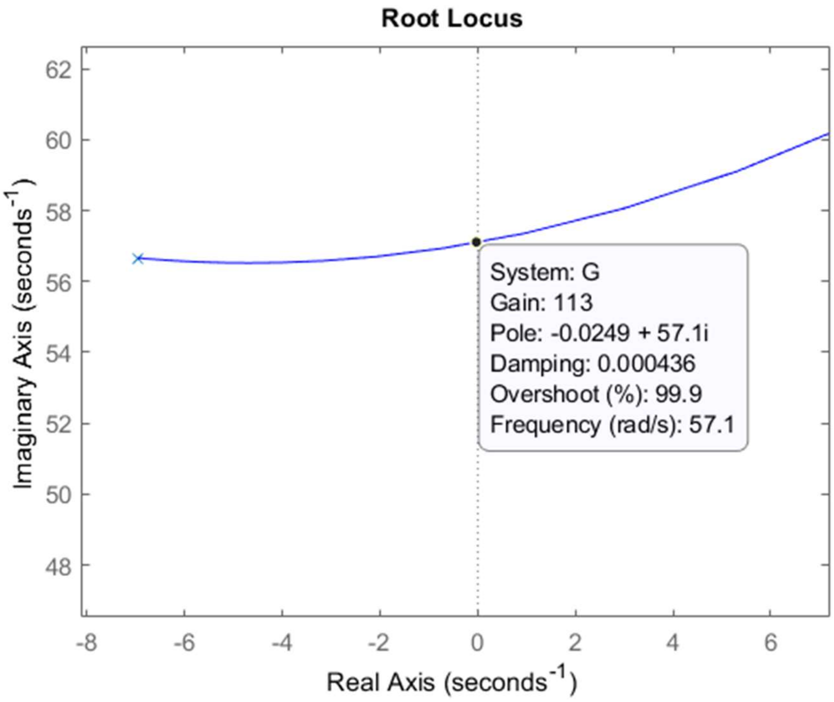
```
eg =

  -6.9693 +56.6619i
  -6.9693 -56.6619i
  -0.0614 + 0.0000i

p =

  -6.9693 +56.6619i
  -6.9693 -56.6619i
  -0.0614 + 0.0000i


r =

     3
```

```
%% Esercizio 2 - A risposta ad anello chiuso
K = 1;
s = tf('s');
Gcl = feedback(K*G,1);

figure,step(Gcl) % sistema stabile
```

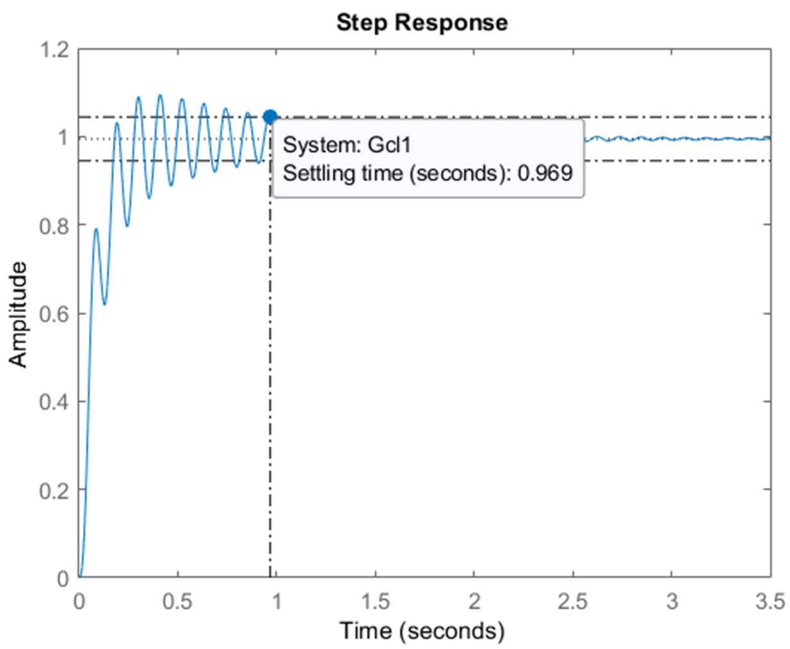



```
%% Esercizio 2 - B guadagno limite
figure,rlocus(G)
Klim = 113;
```

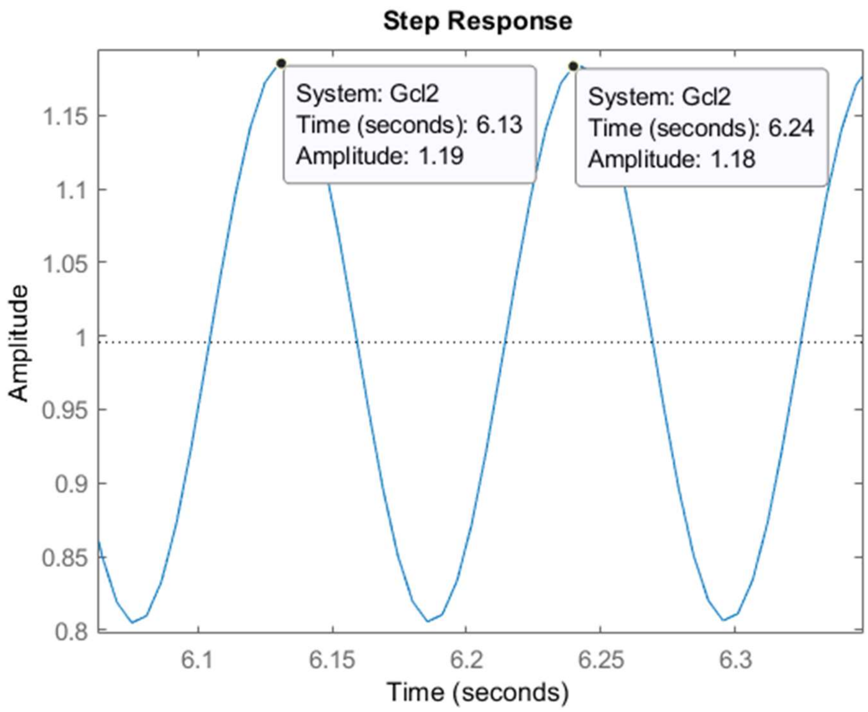




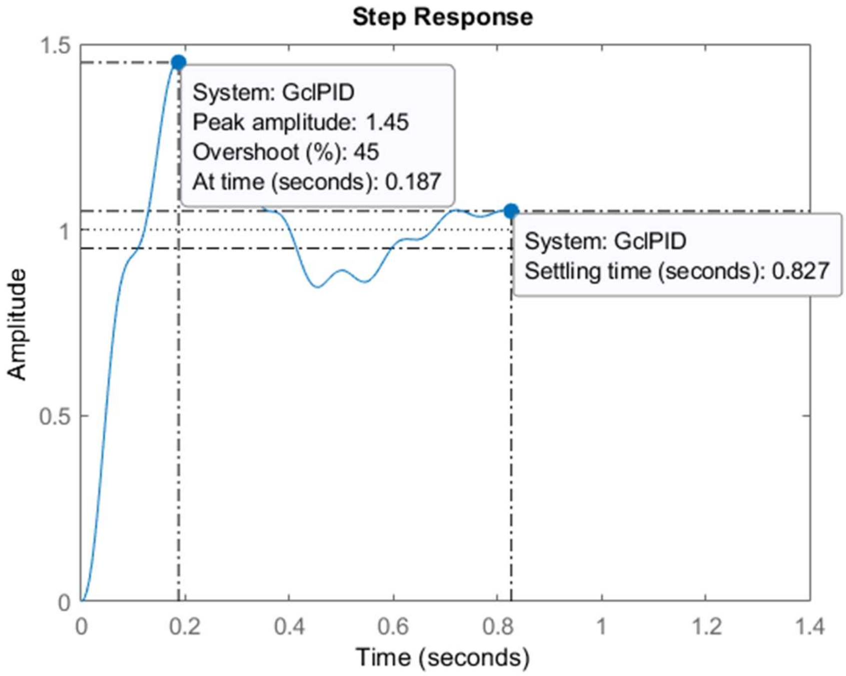

```
%% Esercizio 2 - C tempo di assestamento

Gcl1 = feedback(0.8*Klim*G,1);
popt = timeoptions;
popt.SettleTimeThreshold = 0.05;
figure,step(Gcl1,popt)
```

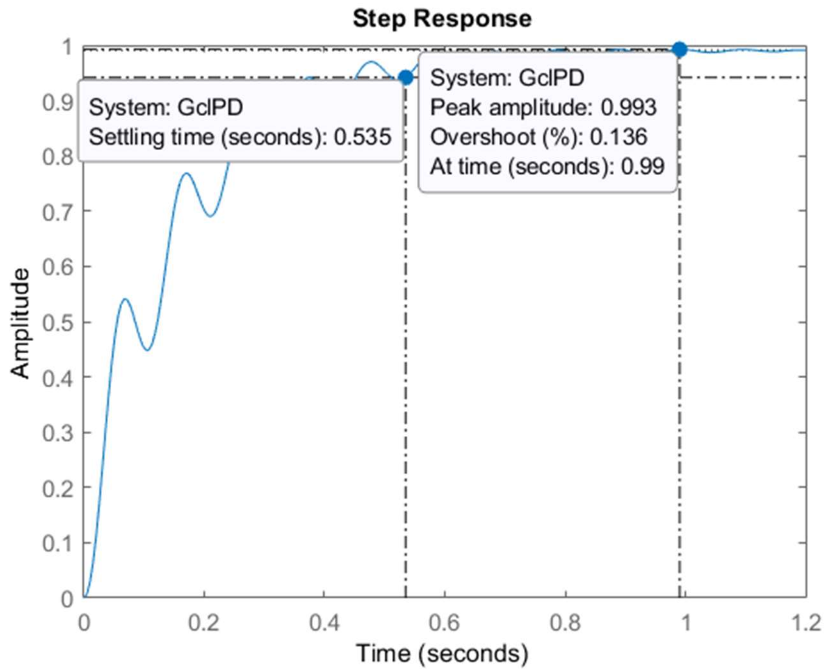


```
%% ESERCIZIO 3

Gcl_lim = feedback(Klim*G,H);
figure,step(Gcl_lim);
```




```
T0 = 6.24 - 6.13;

%% Regolatore PID
Kp = 0.6*Klim;
Ti = 0.5*T0;
Td = 0.125*T0;
GcPID = Kp*(1+Td*s+1/(Ti*s));
GclPID = feedback(GcPID*G,H);
figure,step(GclPID,popt);

%% Regolatore PD
Kp = 0.5*Klim;
Td = 0.2*T0;
GcPD = Kp*(1+Td*s);
GclPD = feedback(GcPD*G,H);
figure,step(GclPD,popt);
```





% il sistema compensato tramite regolatore PD risulta avere minore sovraelongazione e minore tempo di assestamento, mantenendo errore a regime nullo, pertanto è preferibile al PID sotto tutti i punti di vista. Si notino le oscillazioni transitorie in entrambi i casi, dovute ad un picco di risonanza correlato alla flessibilità meccanica del sistema considerato (problema ampiamente noto e studiato dagli ingegneri progettisti di Hard-Disk!!).