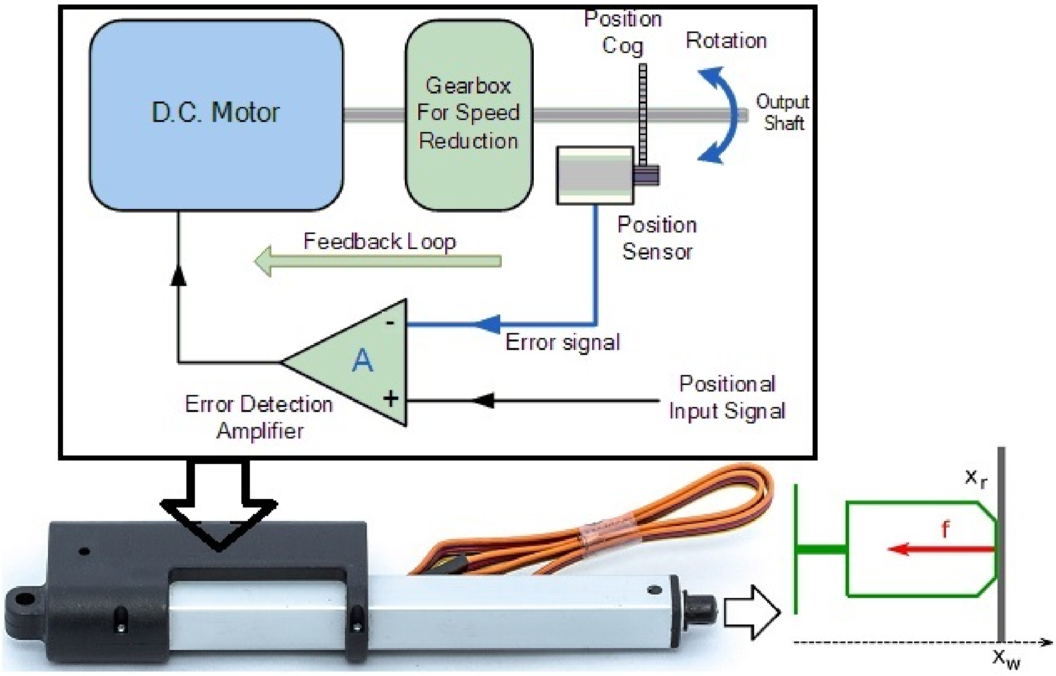
SOLUZIONE della Prova TIPO – C per:

- **Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (9 CFU):** 6 degli 8 esercizi numerici + 4 delle 5 domande a risposta multipla (v. ultime due pagine) **NOTA**: nell'effettiva prova d'esame i due esercizi e la domanda non richiesti verranno scartati a priori dal docente (lo studente riceverà un testo già adattato al numero di CFU)

- **Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (6 CFU) / "CONTROLLI AUTOMATICI":** tutti gli 8 esercizi numerici + 5 domande a risposta multipla (v. ultime 2 pagine)

ESERCIZIO 1.

Si vuole realizzare un sistema robotico, costituito da un attuatore lineare che integra il circuito elettronico di regolazione della posizione, al fine di mantenere una forza di spinta desiderata nel punto di contatto tra il robot ed una superficie dell'ambiente, come mostrato nella figura seguente:



Il modello dinamico di tale sistema si ottiene unendo il modello del circuito elettrico (di tipo RL) di un motore a corrente continua (DC motor), la cui tensione è generata dall'amplificatore di controllo in modo proporzionale alla differenza tra la posizione misurata e la posizione desiderata (ingresso del sistema), con il bilancio delle forze agenti sullo stelo dell'attuatore. In particolare, si ipotizza che la posizione della superficie di contatto X_W **sia fissata in 0** e che la forza di contatto, misurabile, sia proporzionale alla differenza tra la posizione dello stelo X_r e X_W. Per semplicità, si considera anche che i

parametri del motore includano già il rapporto di riduzione e di trasformazione del moto del motore DC da rotativo a lineare.
In tali condizioni, le equazioni che descrivono il modello dinamico del sistema sono le seguenti:

$$L_a \dot{I}_a + R_a I_a + k_m \dot{x}_r = A(x_i - x_r)$$

$$m\ddot{x}_r + b\dot{x}_r + f = k_m I_a$$

$$f = k_w(x_r - x_w) = k_w x_r$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = I_a;\ x_2 = x_r;\ x_3 = \dot{x}_r;\ u = x_i;\ y = f;$$

RISPOSTA:

Occorre:

- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che la derivata della seconda variabile di stato corrisponde alla terza variabile di stato: $\dot{x}_2 = x_3$

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{R_a}{L_a}x_1 - \frac{A}{L_a}x_2 - \frac{k_m}{L_a}x_3 + \frac{A}{L_a}u \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= \frac{k_m}{m}x_1 - \frac{k_w}{m}x_2 - \frac{b}{m}x_3
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{A}{L_a} & -\frac{k_m}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_m}{m} & -\frac{k_w}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{A}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y=f=k_w x_2$: poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & k_w & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$R_a = 0{,}2; \quad L_a = 0{,}2; \quad k_m = 0{,}2; \quad A = 2;$$

$$m = 0{,}2; \quad b = 0{,}2; \quad k_w = 2;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente controllabile, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -10 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -20 \end{bmatrix}$$

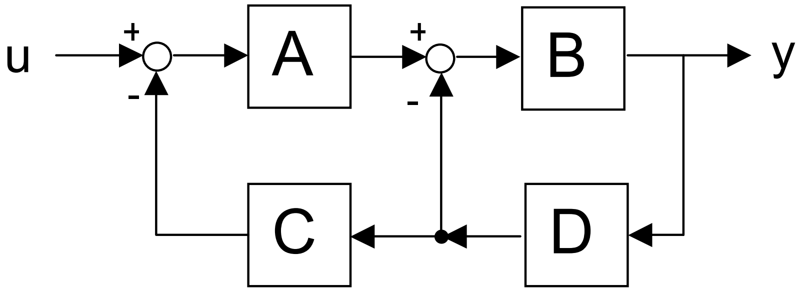
rango(*P*) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente controllabile

---

ESERCIZIO 3.

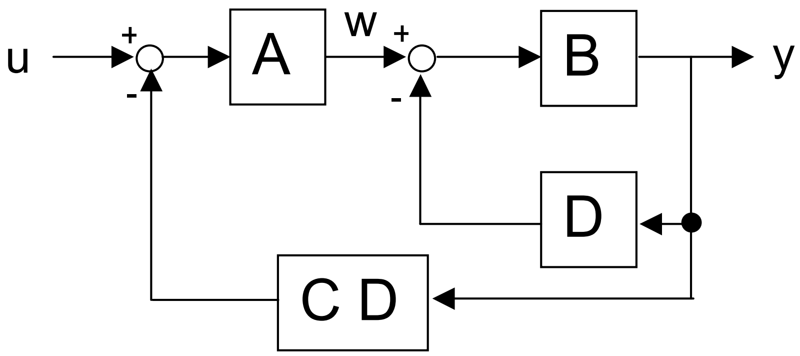
Si determini la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi:



RISPOSTA:

$$Y / U = (A B) / (1 + B D + A B C D)$$

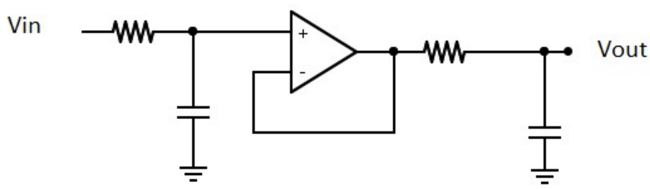
Infatti lo schema è equivalente al seguente, ottenuto dopo aver spostato la diramazione entrante in C a monte di D:



Lo schema è caratterizzato da due anelli annidati, che possono essere ridotti in successione, a partire da quello più interno (per il quale risulta $y / w = B / (1 + BD)$).

ESERCIZIO 4.

Un sistema costituito dal circuito elettronico del tipo mostrato a fianco risulta avere il seguente modello nello spazio degli stati:



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t)$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la risposta impulsiva del sistema considerato.

RISPOSTA:

La risposta impulsiva del sistema è calcolabile con la formula:

$$W(t) = C\, e^{At}\, B =$$

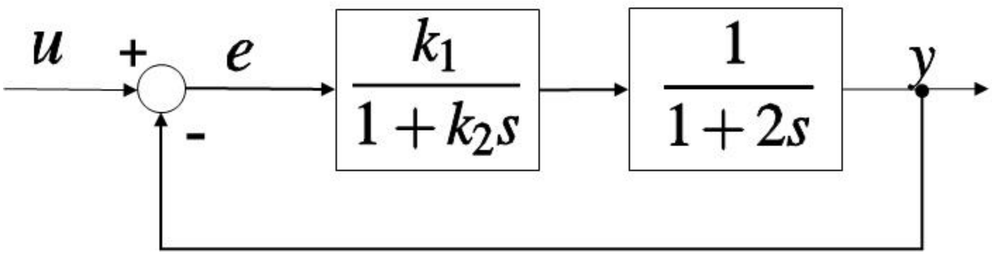
Notando che gli autovalori della matrice A sono -1 e -3 ed applicando il metodo del polinomio interpolante per il calcolo dell'esponenziale della matrice A, si ottiene:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right) & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$W(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right)$$

ESERCIZIO 5.

Dato il seguente sistema in retroazione:



si progettino i valori di k_1 e k_2 tali per cui il sistema ad anello chiuso risulti avere tempo di assestamento $T_a = 1$ secondo e pulsazione naturale $\omega_n = 5$ rad/s.

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta:

$$2k_2 s^2 + (k_2 + 2)s + k_1 + 1$$

Dividendo tutti i termini per $2k_2$, è possibile confrontarlo con il denominatore tipico di un generico sistema del secondo ordine:

$$s^2 + \frac{k_2+2}{2k_2}s + \frac{k_1+1}{2k_2} = s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$$

Ricordando che per i sistemi del secondo ordine, se $\underline{\delta < 0{,}7}$ il tempo di assestamento è:

$$T_a = \frac{3}{\delta \omega_n}$$

Tale ipotesi è compatibile con i vincoli richiesti dal testo, in quanto le specifiche su T_a e ω_n determinano $\delta = 0{,}6$ e, quindi, il coefficiente del termine di primo grado (i.e. $2\delta\omega_n$) deve essere $= 6$. Uguagliando tale valore al coefficiente del termine di primo grado nell'espressione dipendente da k_2 si ottiene:

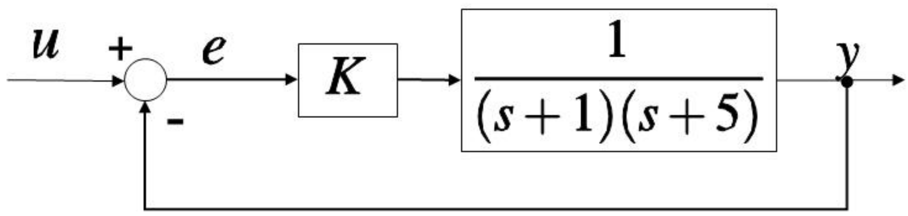
$$k_2 = 2/11$$

mentre il coefficiente costante deve essere $= 25$ (quadrato della pulsazione naturale), perciò:

$$k_1 = 89/11$$

ESERCIZIO 6.

Dato il seguente sistema in retroazione:



si calcoli il valore di K tale per cui risulti:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0,1$$

qualora ad u sia applicato un gradino unitario:

$$u(s) = \frac{1}{s}$$

Una volta determinato il valore di K, si calcoli il coefficiente di smorzamento δ che il sistema chiuso in retroazione risulta avere per tale valore di progetto.

RISPOSTA:

Poiché il sistema ha retroazione unitaria negativa, l'errore a regime corrisponde al limite:

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1+G(s)}$$ con $$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+5)}$$

Pertanto, risulta:

$$\frac{1}{1+\frac{K}{5}} = 0{,}1$$

da cui si ottiene che:

$$K = 45$$

permette di ottenere l'errore a regime voluto. Con questo valore di K, il denominatore ad anello chiuso risulta:

$$s^2 + 6s + 5 + K = s^2 + 6s + 50$$

Confrontando tale denominatore con quello tipico dei sistemi del secondo ordine:

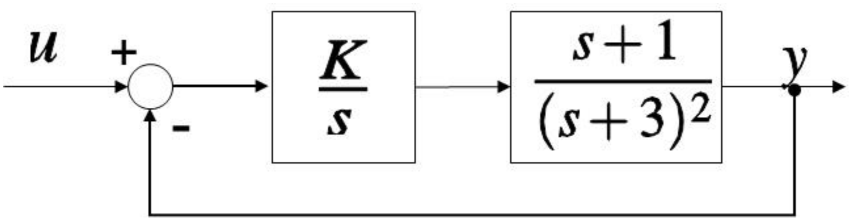
$$s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$$

si può osservare immediatamente che $\omega_n = 5\sqrt{2}$ e, pertanto, il coefficiente di smorzamento è:

$$\delta = \frac{3}{5\sqrt{2}}$$

ESERCIZIO 7.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determini l'intervallo di valori di K tali per cui il sistema ad anello chiuso risulti essere ASINTOTICAMENTE STABILE.

RISPOSTA:

Applicando il criterio di Routh al denominatore del sistema ad anello chiuso, che risulta:

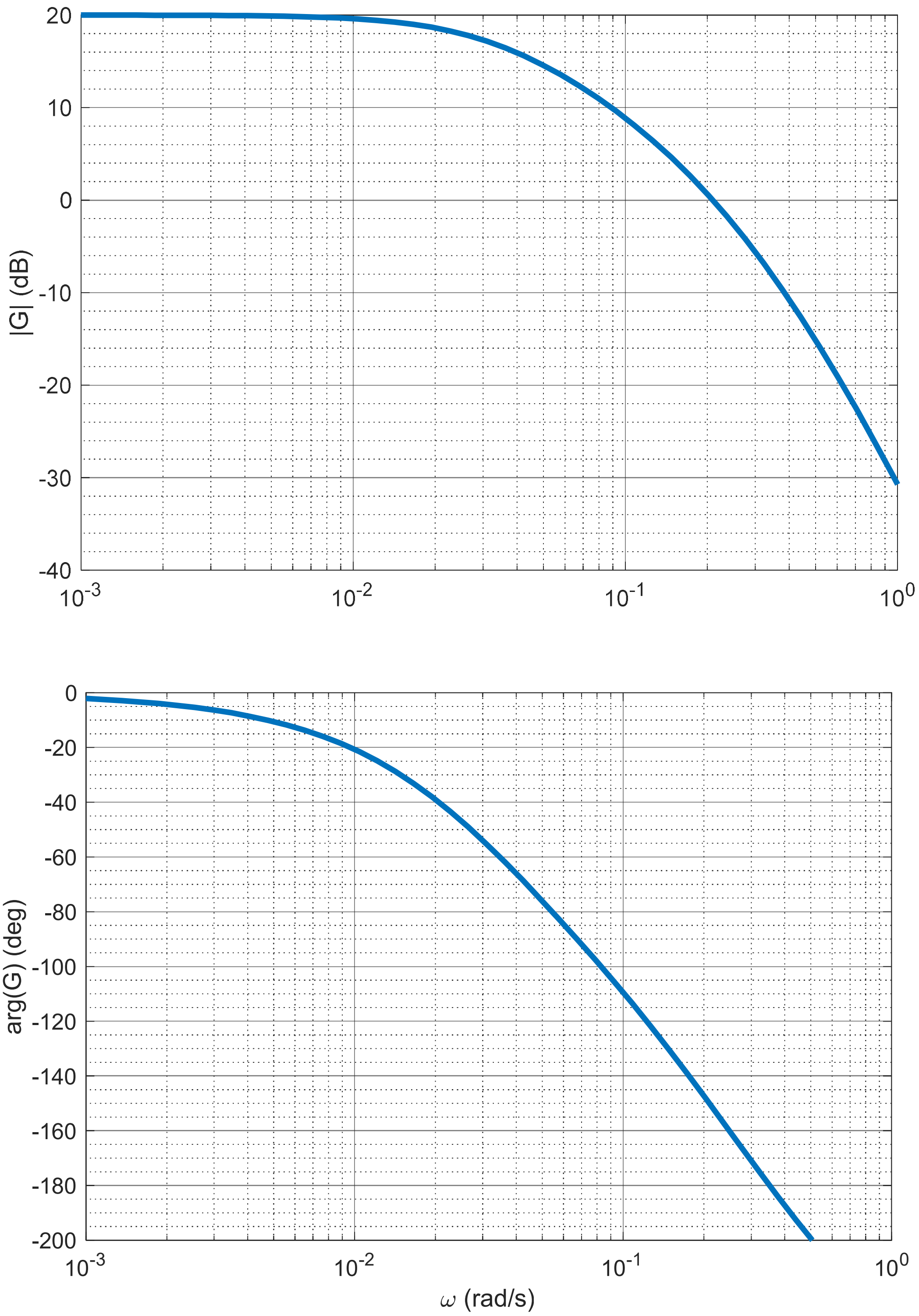
$$D_{cl}(s) = s^3 + 6s^2 + (K+9)s + K$$

si ottiene:

$K > 0$

ESERCIZIO 8.

Dato il seguente diagramma di Bode completo (ampiezze in alto, fasi in basso), si determini per via grafica il margine di fase della funzione di trasferimento corrispondente (con arrotondamento al multiplo di 5° più vicino).

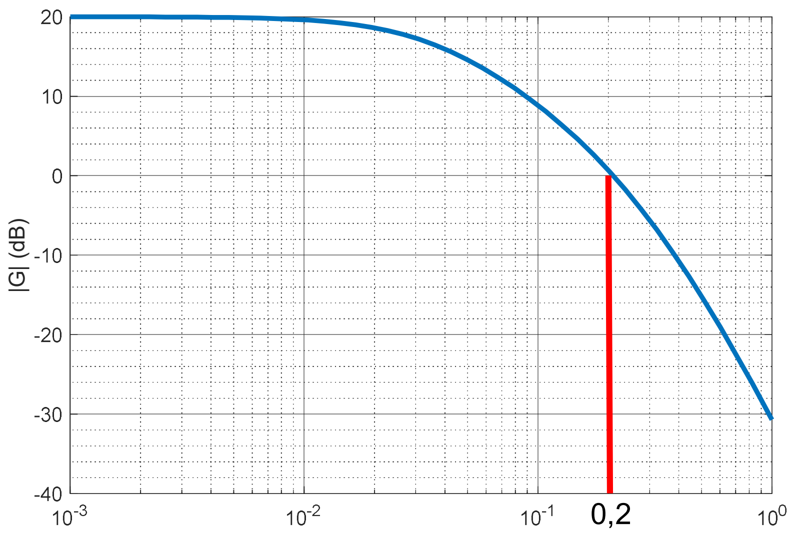


RISPOSTA:

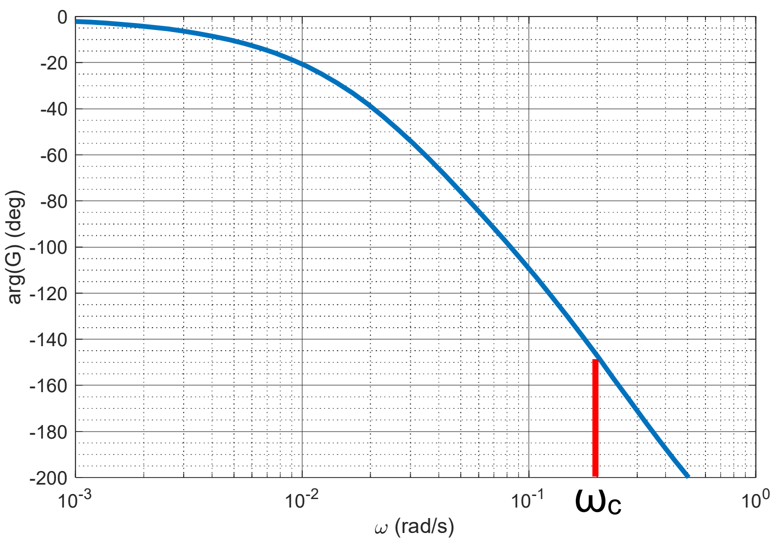
Il procedimento per determinare il margine di fase per via grafica dai diagrammi di Bode di una funzione di trasferimento è il seguente:

1. Si determina anzitutto la cosiddetta *pulsazione di incrocio* (o *pulsazione critica*), cioè la pulsazione ω_C alla quale il diagramma delle ampiezze è pari a 1, in valore assoluto. **NOTA**: il diagramma delle ampiezze fornito ha la scala delle ordinate in dB, pertanto il valore unitario del modulo corrisponde a 0 dB.
2. Si valuta il valore della fase in corrispondenza della pulsazione ω_C. Il margine di fase è l'angolo che occorre sottrarre al valore di fase ottenuto per arrivare a -180° (i.e. $-\pi$ radianti).

Dai diagrammi proposti dal testo si può determinare la pulsazione di incrocio ω_C pari a circa 0,2 rad/s:



In corrispondenza di tale pulsazione, la fase corrisponde a (circa) -150°:



pertanto il margine di fase (i.e. $-180° = \arg[G(j\omega_c)] - M_f \Rightarrow M_f = \arg[G(j\omega_c)] + 180°$) è:

$$M_f = 30°$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.
Due sistemi dinamici, lineari e stazionari, asintoticamente stabili, collegati in cascata (i.e. in serie tra loro) danno luogo ad un sistema:

X asintoticamente stabile
O semplicemente stabile
O completamente controllabile
O completamente osservabile

DOMANDA 2.
Una rete elettrica costituita da soli elementi reattivi (induttori e condensatori) ideali, è un sistema:

O non completamente controllabile
O asintoticamente stabile
X semplicemente stabile
O instabile

NOTA: *una rete elettrica nella quale non vi sia dissipazione di energia, legata alla presenza di resistenze elettriche, non può essere asintoticamente stabile. Inoltre, in presenza di soli elementi passivi (i.e. che non amplificano i segnali elettrici) la rete non può neppure essere instabile. Con le informazioni della domanda non si può affermare nulla sulla controllabilità della rete.*

DOMANDA 3.
Il polinomio caratteristico di un sistema dinamico lineare, stazionario e tempo continuo, è:

$$\lambda^3(\lambda + 2)$$

Il sistema:

X ha un modo semplicemente stabile
X ha un modo asintoticamente stabile
O ha dei modi instabili
X potrebbe avere dei modi instabili

DOMANDA 4.
In base al principio del modello interno, per neutralizzare con errore a regime nullo un segnale in ingresso corrispondente al modo di un polo doppio nell'origine (i.e. un segnale a rampa, cioè con trasformata di Laplace = $1/s^2$), occorre che nella funzione di trasferimento di anello del sistema retroazionato:

O sia presente almeno un polo nell'origine
O siano presenti almeno tre poli nell'origine
X siano presenti almeno due poli nell'origine
O il guadagno statico sia finito

DOMANDA 5.

Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di una funzione $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma delle fasi:

O solo se il diagramma di Bode delle ampiezze ha sempre pendenza negativa o nulla

X solo la corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$ ha tutti poli e tutti gli zeri a parte reale negativa

O solo la corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$ ha tutti poli a parte reale negativa

O solo la corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$ ha tutti gli zeri a parte reale negativa