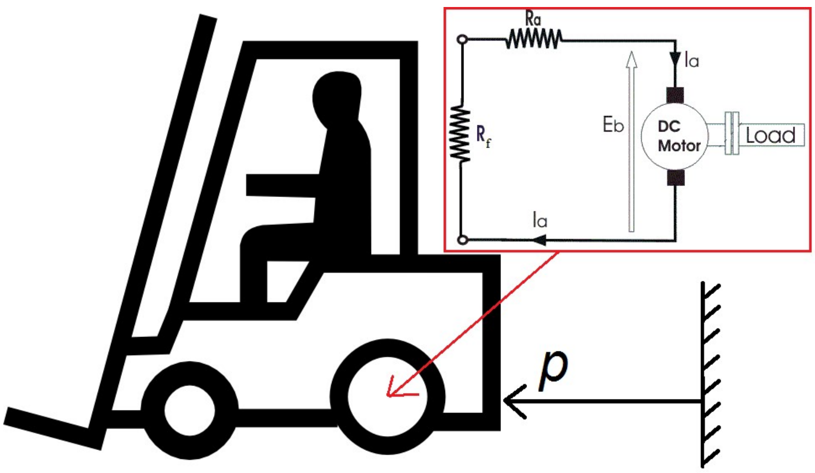
SOLUZIONE della Prova TIPO – D per:

- **Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (9 CFU):** 6 degli 8 esercizi numerici + 4 delle 5 domande a risposta multipla (v. ultime due pagine) **NOTA**: nell'effettiva prova d'esame i due esercizi e la domanda non richiesti verranno scartati a priori dal docente (lo studente riceverà un testo già adattato al numero di CFU)

- **Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (6 CFU) / "CONTROLLI AUTOMATICI":** tutti gli 8 esercizi numerici + 5 domande a risposta multipla (v. ultime 2 pagine)

ESERCIZIO 1.

Si consideri un carrello elevatore a trazione elettrica. Si vuole caratterizzare l'azione frenante del motore elettrico del carrello quando ai suoi terminali è collegata una resistenza di frenatura, anziché il generatore alimentato dalle batterie del mezzo.



Il modello dinamico di tale sistema corrisponde a quello di una massa smorzata, alla quale oltre all'attrito meccanico si somma quello equivalente determinato dalla corrente del motore elettrico (indotta dalla tensione contro-elettromotrice) che scorre sulle resistenze in serie R_a (intrinseca degli avvolgimenti del motore) ed R_f (inserita solo per la frenata). Considerando per semplicità che i parametri del motore includano già il rapporto di riduzione e di trasformazione del moto del motore DC da rotativo a lineare, il sistema risulta descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$m\ddot{p} + b\dot{p} + \frac{k_m^2}{R_a + R_f}\dot{p} = 0$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t);$$

fissando le seguenti scelte per le variabili di stato:

$$x_1 = p;\ x_2 = \dot{p};$$

RISPOSTA:

Occorre:

- sostituire la notazione delle variabili di stato
- notare che la derivata della prima variabile di stato corrisponde alla seconda variabile di stato: $\dot{x}_1 = x_2$.

Si ottengono così le seguenti due equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \left(-\frac{b}{m} - \frac{k_m^2}{m(R_a+R_f)}\right) x_2 \end{aligned}$$

Da cui risulta che:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{m} - \frac{k_m^2}{m(R_a+R_f)} \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

m = 1000; b = 100; R_a = 10; R_f = 90 ; k_m = 300;

e si determini lo spazio percorso e la velocità raggiunta in 12 secondi dal veicolo (i.e. x(t) con t=12) in tale modalità di frenata, considerando una velocità iniziale di 5 m/s, vale a dire:

$$x(0) = [0 \quad 5]^T$$

RISPOSTA:

Con i parametri fissati risulta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha autovalori in 0 e -1, pertanto la matrice esponenziale, calcolata con il metodo del polinomio interpolante, è:

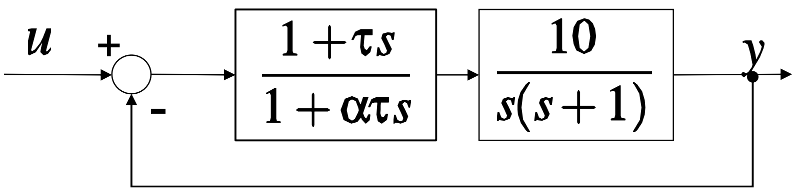
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{0t} & e^{0t} - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Il valore dello stato all'istante richiesto è:

$$x(12) = e^{A(12)}x(0) = \left[5 - 5e^{-12}; \quad 5e^{-12}\right]^T$$

ESERCIZIO 3.

Si consideri il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



e si progettino i parametri del controllore α e τ in modo tale che lo zero del controllore "cancelli" (i.e. si semplifichi con) uno dei poli del sistema controllato ed il sistema chiuso in retroazione risulti avere coefficiente di smorzamento δ = 0,5 = 1/2.

RISPOSTA:

Affinchè lo zero del controllore "cancelli" uno dei poli del sistema controllato è necessario fissare

$$\tau = 1$$

In tal modo, il termine (s+1) ed il termine (1+ τs) si semplificano tra loro. Con i termini rimanenti, il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso risulta:

$$D_{cl}(s) = \alpha s^2 + s + 10$$

Dividendo tutti i termini per α è possibile confrontarlo con il denominatore tipico di un generico sistema del secondo ordine:

$$s^2 + \frac{1}{\alpha}s + \frac{10}{\alpha} = s^2 + 2\delta\omega_n + \omega_n^2$$

Imponendo il vincolo sul coefficiente di smorzamento, si ottengono due condizioni sul valore di α, una dal termine di primo grado e una dal termine costante:

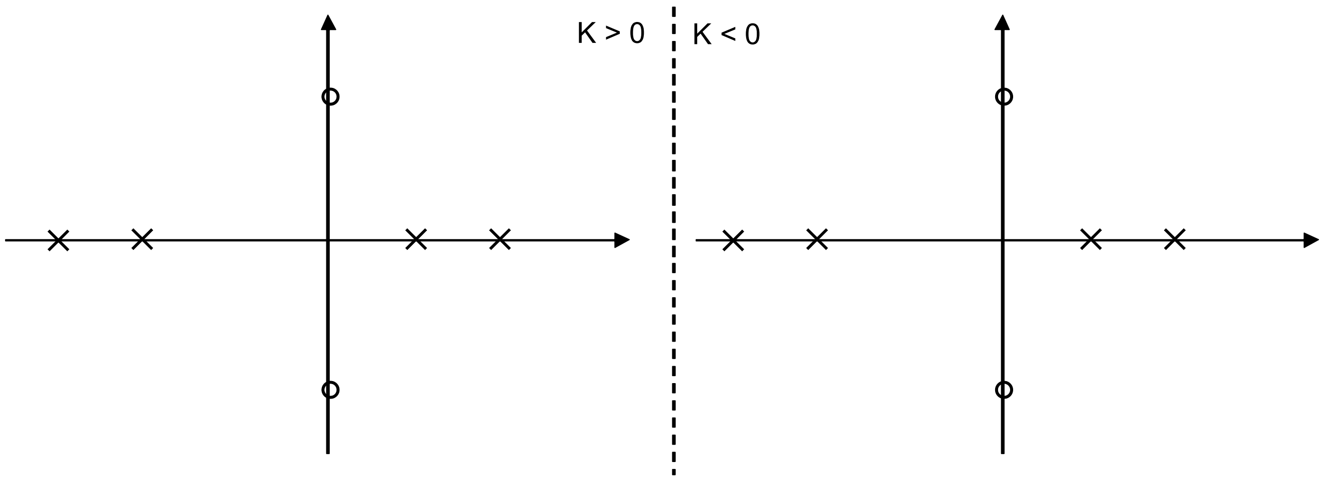
$$\frac{1}{\alpha} = \omega_n; \qquad \frac{10}{\alpha} = \omega_n^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

Affinchè siano entrambe verificate, è necessario che sia:

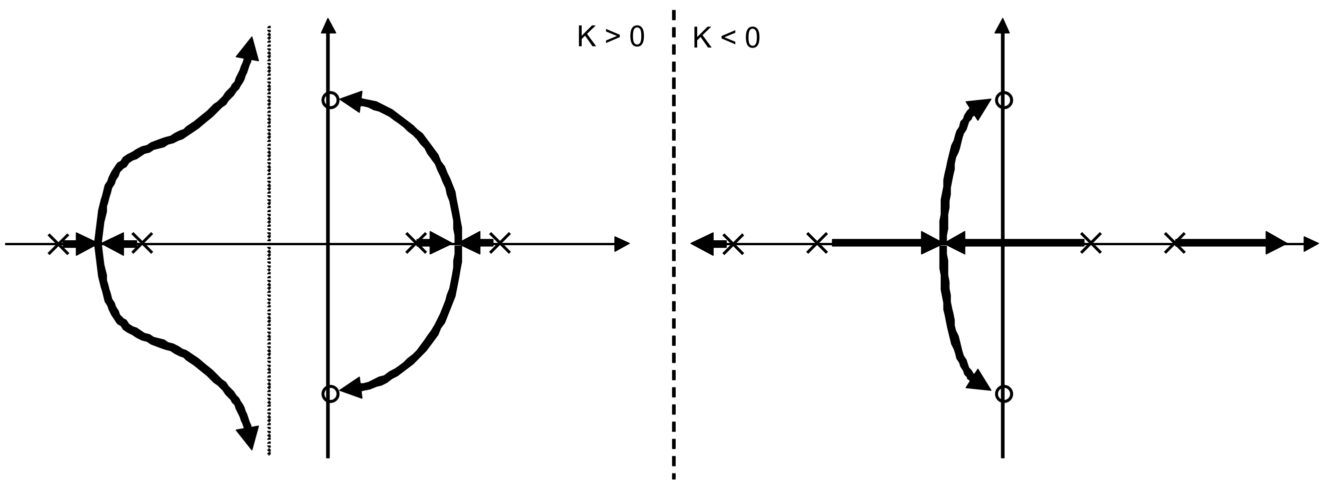
$$\alpha = 1/10$$

ESERCIZIO 4.

Si tracci l'andamento <u>qualitativo</u> del luogo delle radici per un sistema in retroazione la cui funzione di trasferimento d'anello abbia poli (x) e zeri (o) come indicato in figura:

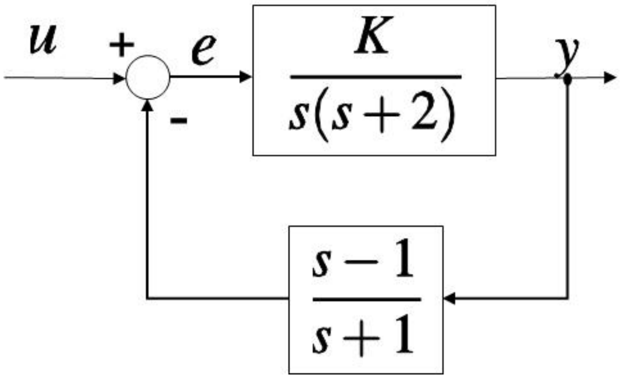


RISPOSTA:



ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determini l'intervallo di valori di K tali per cui il sistema ad anello chiuso risulti essere ASINTOTICAMENTE STABILE.

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta:

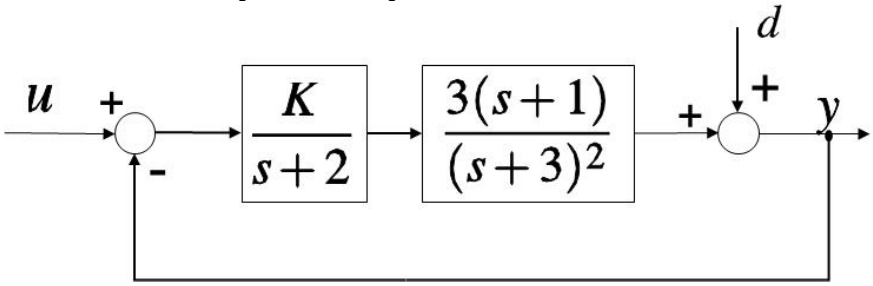
$$s^3 + 3s^2 + (K+2)s - K$$

Applicando a questo polinomio il criterio di Routh, si ottiene l'intervallo di stabilità:

$$-3/2 < K < 0$$

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



Si progetti il valore di K tale per cui risulti

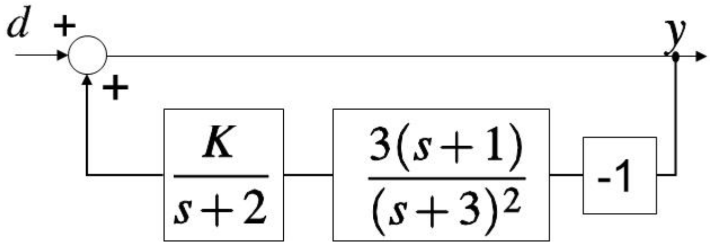
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0,1$$

quando ai segnali $u(t)$ e $d(t)$ sono applicati rispettivamente un segnale nullo ed un segnale a gradino unitario:

$$u(s) = 0; \quad d(s) = \frac{1}{s}$$

RISPOSTA:

Essendo u(s) = 0, si può eliminare il corrispondente nodo sommatore (considerando però il segno del ramo di retroazione) e riorganizzare lo schema a blocchi in modo da evidenziare d(s) come ingresso:



Si noti che questo schema ha retroazione positiva, ma è presente un blocco con funzione di trasferimento -1 (necessario per mantenere la coerenza con il segno della retroazione nello schema originario).

Poiché l'obiettivo di progetto è il valore a regime del segnale y(t), a questo punto è sufficiente calcolare la funzione di trasferimento ad anello chiuso ed applicare a quest'ultima, moltiplicata per d(s) = 1/s, il teorema del valore finale per le trasformate di Laplace, da cui si ottiene:

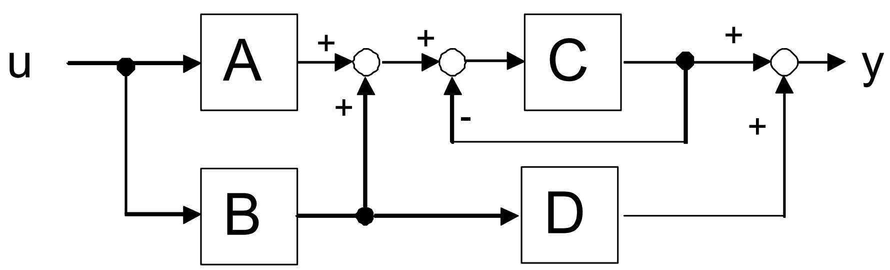
$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sG_{c.l.}(s)D(s) =$$
$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{3K(s+1)}{(s+2)(s+3)^2}}$$

che tende a 0,1 se:

K = 54

ESERCIZIO 7.

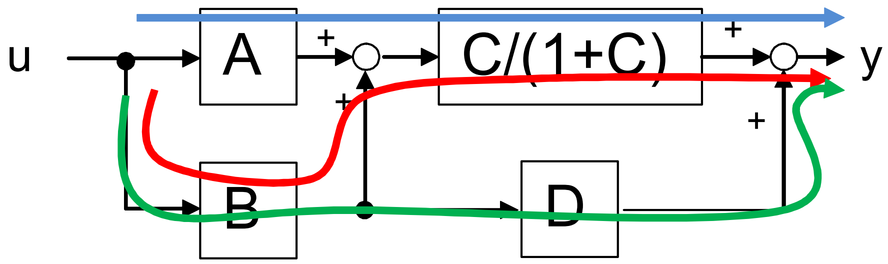
Si determini la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi:



RISPOSTA:

Il diagramma presenta tre percorsi in parallelo tra ingresso e uscita:

- Quello passante per A e per l'anello con C in retroazione unitaria (avente funzione di trasferimento C/(1+C))
- Quello passante per B e lo stesso anello con C in retroazione unitaria
- Quello passante per B e D



Pertanto, la soluzione finale è:

$$Y / U = [(A + B) C] / (1 + C) + B D$$

ESERCIZIO 8.

Data la seguente funzione di trasferimento, considerata come funzione di anello di un certo sistema in retroazione:

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)(1+3s)}$$

se ne calcoli in modo analitico il relativo margine di fase.

RISPOSTA:

Il procedimento per determinare il margine di fase di una funzione di trasferimento, in modo analitico, è il seguente:

1. Si determina anzitutto la cosiddetta *pulsazione di incrocio* (o *pulsazione critica*), cioè la pulsazione ω_C alla quale il modulo della funzione di risposta armonica (i.e. $G(j\omega)$) per la corrispondente funzione di trasferimento è pari a 1. Allo scopo si deve risolvere il seguente problema analitico:
   trovare ω_C tale che $|G(j\omega_C)| = 1$
2. Si calcola il valore della fase, cioè l'argomento della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$, in corrispondenza della pulsazione ω_C. Il margine di fase è l'angolo che occorre sottrarre al valore di fase ottenuto per arrivare a -180° (i.e. $-\pi$ radianti), cioè:
   $-180° = \arg[G(j\omega_C)] - M_f \rightarrow M_f = \arg[G(j\omega_C)] + 180°$

Nel caso considerato, il primo punto si risolve come segue:

$|G(j\omega_c)| = 1$ ➔

$$\frac{10}{|1+j\omega_c||1+j3\omega_c|} = 1$$

➔ $$|1 + j\omega_c||1 + j3\omega_c| = 10$$

➔ $$\sqrt{1 + \omega_c^2}\sqrt{1 + 9\omega_c^2} = 10$$

➔ $$(1 + \omega_c^2)(1 + 9\omega_c^2) = 100$$

➔ $$9\omega_c^4 + 10\omega_c^2 - 99 = 0$$

Quest'ultima equazione ha 4 possibili soluzioni. Ricordando però che <u>ω_C deve essere reale e positiva</u>, per le ipotesi di validità dell'analisi armonica con trasformate di Laplace, si può procedere come segue:

- si sostituisce $\omega_C^2 = p$ e si risolve l'equazione di secondo grado ottenuta rispetto a p
- se tra le due soluzioni ottenute p_1 e p_2 se ne ha una negativa, la si scarta (poiché determinerebbe due soluzioni immaginarie coniugate per ω_C) e si procede ricavando ω_C dalla radice quadrata (positiva) di p_1 o p_2

Nel caso considerato si ha:

$$9p^2 + 10\,p - 99 = 0$$

Che ha soluzioni $p_1 = 2{,}8073$ e $p_2 = -3{,}9184$

Scartando p_2, $\omega_C = 1{,}6775$ rad/s (radice quadrata positiva di p_1).

Sostituendo il valore di ω_C nella funzione di risposta armonica e calcolandone l'argomento:

$$\arg[G(j\omega_c)] = -\arg(1+j*1{,}6775) - \arg(1+j*3*1{,}6775) =$$

$$= -\arctan(1{,}6775) - \arctan(3*1{,}6775) = -138°$$

Pertanto:

$$M_f = 42°$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.
Un sistema dinamico, lineare e stazionario, presenta, con ingresso nullo e stato iniziale NON nullo, uscita sinusoidale. Il sistema considerato può essere di ordine (dimensione del vettore di stato):

O 1
X 2
X 3
X 4

NOTA: *L'uscita descritta può essere generata solo da una coppia di autovalori complessi e coniugati con parte reale nulla. Perché un sistema possa avere due autovalori complessi, la dimensione della propria matrice A (i.e. ordine del sistema) deve essere maggiore di 2.*

DOMANDA 2.
Il polinomio caratteristico di un sistema dinamico lineare, stazionario e tempo continuo, è:

$$\lambda^2(\lambda+1)^2$$

Il sistema:

X ha un modo semplicemente stabile
O ha due modi asintoticamente stabili
O ha un modo instabile
X potrebbe avere un modo instabile

NOTA: *Essendo indicato come polinomio caratteristico, gli autovalori ottenuti uguagliandolo a zero (i.e. 0 e -1) possono entrambi avere molteplicità unitaria o doppia nel polinomio minimo. Dalle informazioni date nel testo, non è possibile saperlo. Qualora l'autovalore nullo avesse molteplicità doppia nel polinomio minimo, tra i modi del sistema comparirebbe anche il termine $t*e^{0t}$, che è un modo instabile. Tale modo però potrebbe anche non essere presente, se la molteplicità dell'autovalore nullo fosse unitaria nel polinimio minimo. Quale che sia tale molteplicità, non può certo essere inferiore ad 1, per cui almeno il modo e^{0t}, semplicemente stabile, sarà presente. Per via di considerazioni analoghe, non è possibile affermare con certezza che il sistema ha due modi asintoticamente instabili, che sono quelli corrispondenti all'autovalore -1. Infatti, se quest'ultimo avesse molteplicità unitaria nel polinomio minimo, il sistema avrebbe un solo modo asintoticamente stabile.*

DOMANDA 3.
Un sistema meccanico costituito da sole masse e molle ideali interconnesse tra loro, senza smorzatori o altri effetti dissipativi per attrito, è un sistema:

O non completamente controllabile
O asintoticamente stabile
X semplicemente stabile
O instabile

NOTA: *un sistema meccanico nel quale non vi sia dissipazione di energia, legata alla presenza di smorzatori o altre sorgenti di attrito, non può essere né instabile nè* *asintoticamente stabile. Con le informazioni della domanda non si può affermare nulla sulla controllabilità del sistema.*

DOMANDA 4.

Per avere errore a regime nullo a fronte del segnale di ingresso a rampa:

$$U(s) = \frac{R_0}{s^2}$$

la funzione di trasferimento di anello del sistema retroazionato:

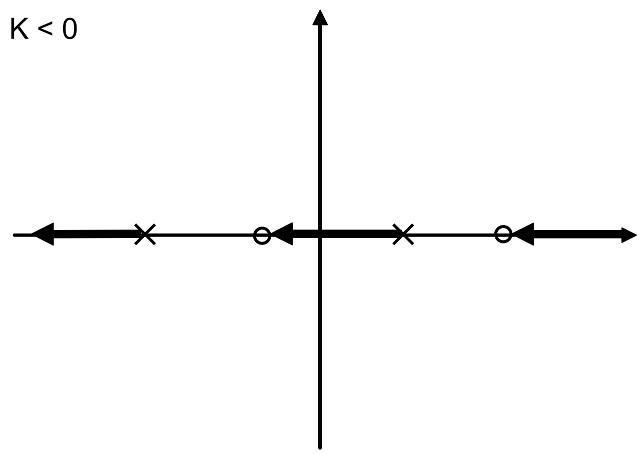
O deve avere almeno un polo nell'origine
X deve avere almeno due poli nell'origine
O deve avere una costante di velocità K_v finita
X deve avere una costante di velocità K_v infinita

DOMANDA 5.

Un sistema avente funzione di trasferimento G(s) con due poli e due zeri posizionati in modo alterno sull'asse reale (i.e. partendo da sinistra: un polo → uno zero → un polo → uno zero; oppure: uno zero → un polo → uno zero → un polo), presenta un luogo delle radici:

X che per K > 0 evolve tutto sull'asse reale
X che per K < 0 evolve tutto sull'asse reale
O che può evolvere anche al di fuori dell'asse reale
O che ha un asintoto

NOTA: *Con la configurazione di poli e zeri descritta il luogo delle radici non può presentare asintoti, pertanto tutti i rami partiranno da un polo ed arriveranno ad uno zero, passando sempre e solo per l'asse reale. Si noti che nel seguente caso:*



il ramo più a sinistra non tende ad un asintoto, ma si ricongiunge al ramo che arriva allo zero più a destra, passando da $-\infty$ *a* $+\infty$ *permanendo sull'asse reale.*