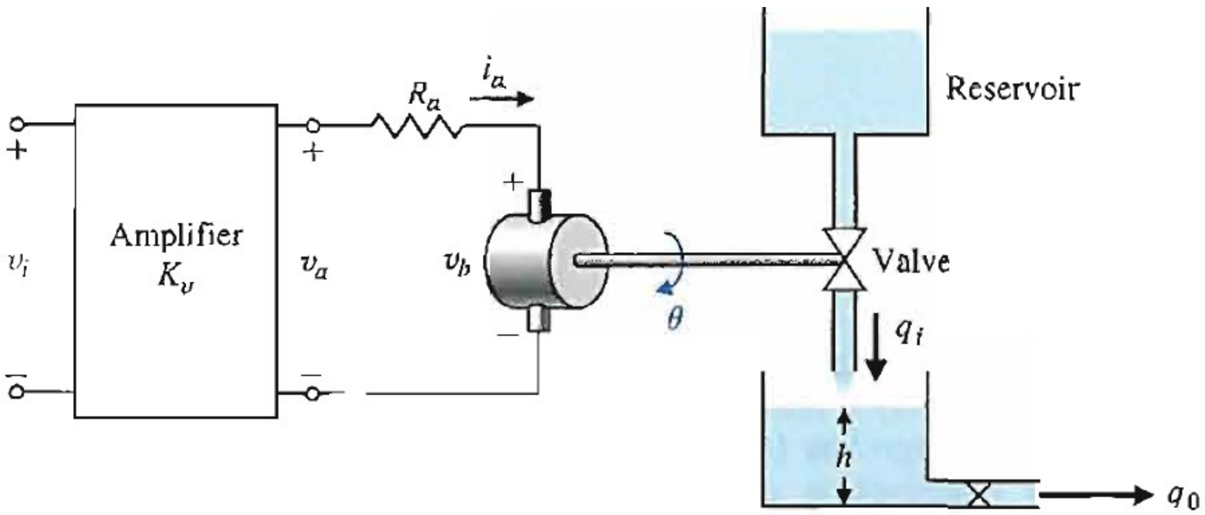
SOLUZIONE della Prova TIPO – E per:

- **Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (9 CFU):** 6 degli 8 esercizi numerici + 4 delle 5 domande a risposta multipla (v. ultime due pagine) **NOTA**: nell'effettiva prova d'esame i due esercizi e la domanda non richiesti verranno scartati a priori dal docente (lo studente riceverà un testo già adattato al numero di CFU)

- **Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (6 CFU) / "CONTROLLI AUTOMATICI":** tutti gli 8 esercizi numerici + 5 domande a risposta multipla (v. ultime 2 pagine)

ESERCIZIO 1.

Si consideri un sistema per il riempimento automatizzato di un serbatoio, caratterizzato da una valvola proporzionale azionata da un motore elettrico a corrente continua, secondo lo schema mostrato in figura:



(Figura adattata da "Modern Control Systems" di R. Dorf – R. Bishop, Pearson International Ed.)

Considerando trascurabili l'induttanza nel motore e l'attrito meccanico all'albero del gruppo motore/valvola, il modello matematico del sistema è costituito dalle seguenti equazioni:

$$R_a I_a + K_m \dot{\theta} = K_v v_i$$

$$J\ddot{\theta} = K_m I_a$$

$$P\dot{h} = K_i \theta - K_o h$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = h;\ x_2 = \theta;\ x_3 = \dot{\theta};\ u = v_i;\ y = h = x_1;$$

RISPOSTA:

Occorre:
- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- ricavare dalla prima equazione l'espressione di I_a e sostituirla nella seconda equazione
- notare che la derivata della seconda variabile di stato corrisponde alla terza variabile di stato: $\dot{x}_2 = x_3$

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{K_o}{P}x_1 + \frac{K_i}{P}x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= -\frac{K_m^2}{JR_a}x_3 + \frac{K_m K_v}{JR_a}u
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{K_o}{P} & \frac{K_i}{P} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{K_m^2}{JR_a} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_m K_v}{JR_a} \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y=h=x_1$: poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell’Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$P = 0{,}5; \quad K_i = 1; \quad K_o = 0{,}5;$$

$$J = 0{,}25; \quad R_a = 8; \quad K_m = 2; \quad K_v = 20;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente controllabile, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

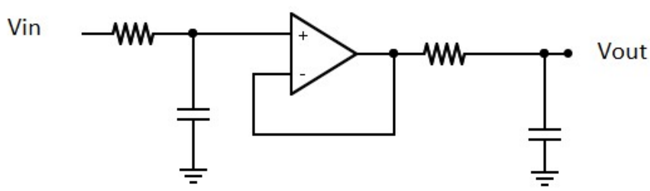
$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 0 & 20 & -40 \\ 20 & -40 & 80 \end{bmatrix}$$

rango(P) = 3

Perciò il sistema **E’** ~~/ NON E’~~ completamente controllabile.

ESERCIZIO 3.

Un sistema costituito dal circuito elettronico del tipo mostrato a fianco risulta avere il seguente modello nello spazio degli stati:



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \; y(t) = Cx(t)$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la funzione di trasferimento del sistema considerato.

RISPOSTA:

Ricordando che la funzione di trasferimento è legata alle matrici del sistema dalla formula:

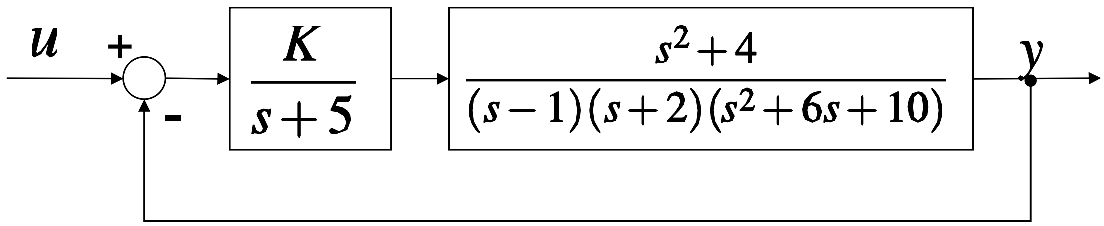
$$G(s) = C\ (sI - A)^{-1}\ B$$

risulta:

$$G(s) = \frac{4}{(s+2)(s+3)} = \frac{4}{s^2+5s+6}$$

ESERCIZIO 4.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

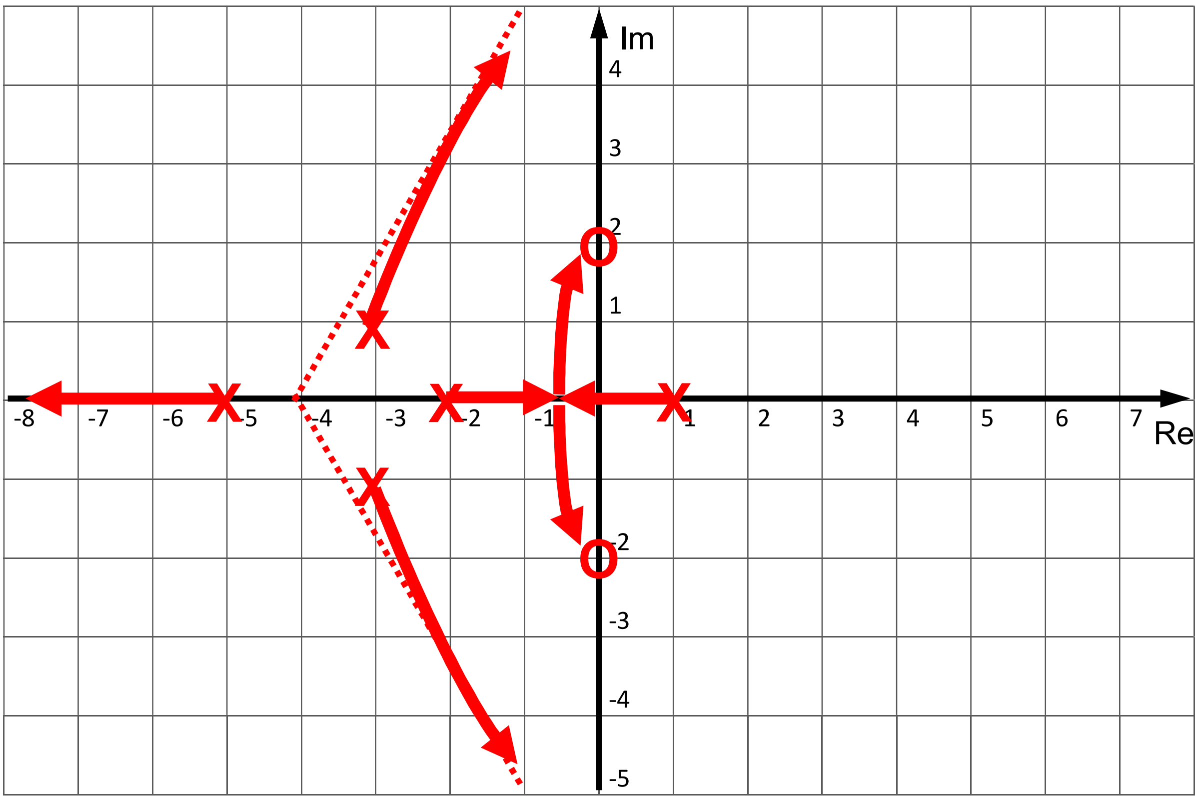


si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per $K > 0$ (luogo diretto).

RISPOSTA:

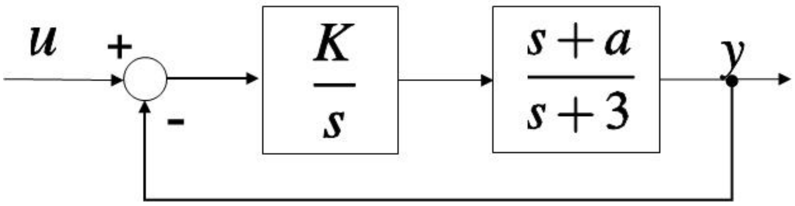
NOTA: la funzione di trasferimento di anello ha due zeri (n_z = 2) in $\pm j2$ e cinque poli (n_p = 5) rispettivamente in +1, -2, -5 e $-3\pm j$, pertanto il luogo ha tre asintoti (numero asintoti = $n_p - n_z$ = 2), disposti con angolo di $\pi/3$, π e $5/3\ \pi$ rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z}\left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i\right) = -4$$



ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K e a tali che il sistema ad anello chiuso risulti avere una coppia di poli complessi e coniugati in $p_{1,2} = -1 \pm j\,2$

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta:

$$s^2 + (K + 3)\,s + K\,a.$$

Imporre che il sistema ad anello chiuso abbia i poli $p_{1,2} = -1 \pm j\,2$ significa imporre che:

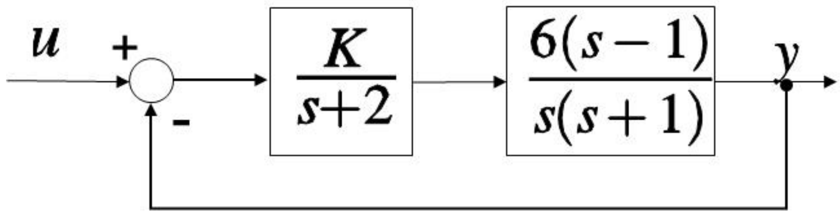
$$s^2 + (K + 3)\,s + K\,a = s^2 + 2\,s + 5$$

Risolvendo il sistema di due equazioni in due incognite (K e a) ottenuto uguagliando uguagliando due termini costanti e i due coefficienti dei termini di primo grado, si ottiene il risultato finale:

$$K = -1 \qquad\qquad a = -5$$

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determini l'intervallo di valori di K tali per cui il sistema ad anello chiuso risulti essere ASINTOTICAMENTE STABILE.

RISPOSTA:

Una volta ridotto l'anello di retroazione, il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso risulta:

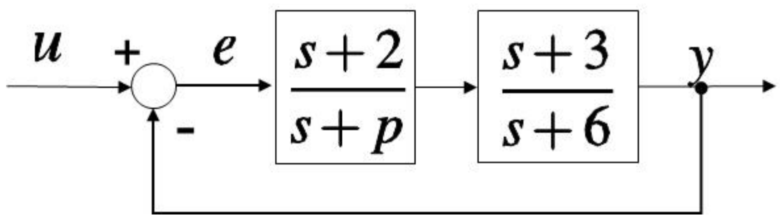
$$D_{cl}(s) = s^3 + 3s^2 + (2 + 6K)s - 6K$$

Applicando il criterio di Routh a tale polinomio, risulta che per avere poli a parte reale negativa (asintotica stabilità) è necessario che sia:

$$-1/4 \;<\; K \;<\; 0$$

ESERCIZIO 7.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si calcoli il valore di p tale per cui risulti

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$$

quando all'ingresso $u(t)$ è applicato un gradino unitario, cioè: $u(s) = \frac{1}{s}$

RISPOSTA:

Il testo richiede di fatto di determinare la condizione necessaria per avere errore a regime nullo con ingresso a gradino unitario. Tale condizione corrisponde alla presenza di un polo nell'origine nella funzione di trasferimento d'anello (sistema di "tipo 1"), che può essere ottenuta solamente fissando:

$$p = 0$$

NOTA: il risultato si può comunque ottenere anche applicando direttamente il teorema del valore finale alla funzione corrispondente alla trasformata di Laplace del segnale $e(t)$, cioè:

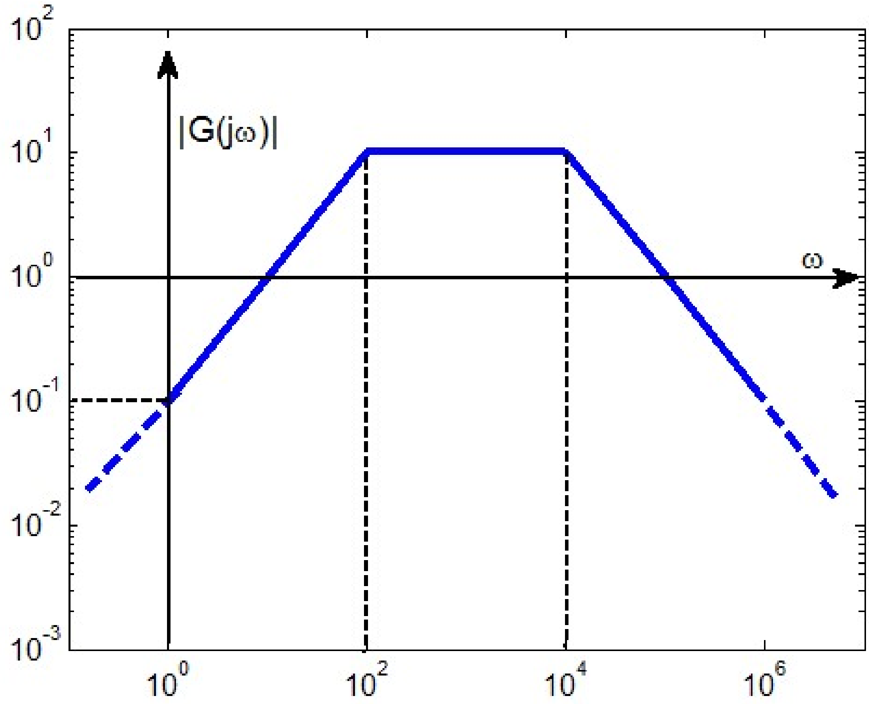
$$\lim_{s\to 0} s\,E(s) = 1 - \lim_{s\to 0} \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

Con:

$$G(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{(s+p)(s+6)}$$

ESERCIZIO 8.

Dato il seguente diagramma di Bode delle ampiezze:



si determinino i coefficienti della corrispondente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K(s+p)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$$

supponendo che sia a fase minima:

RISPOSTA:

$K = 10^{-1}$ $\quad p = 0$ $\quad \tau 1 = 10^{-2}$ $\quad \tau 2 = 10^{-4}$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.
Un sistema singolo ingresso / singola uscita, descritto dal modello matematico

$$\dot{x}(t) = u(t); \quad y(t) = x(t)$$

X è semplicemente stabile
X ha una funzione di trasferimento con un polo nullo
O ha una funzione di trasferimento con un polo a modulo unitario
X è puramente dinamico
NOTA: *Riconducendo il modello indicato a quello di un generico modello nello spazio degli stati, si può notare come le "matrici" (di dimensione 1x1) del sistema siano* $A=0$, $B=1$, $C=1$ *e* $D=0$. *Pertanto, il sistema è puramente dinamico, ha un unico autovalore il cui valore è nullo, perciò è semplicemente stabile. La corrispondente funzione di trasferimento è* $G(s) = C(sI-A)^{-1}B = 1/s$, *che ha appunto un polo nullo.*

DOMANDA 2.
Il sistema lineare e stazionario la cui funzione di trasferimento G(s) ha tutti i poli posizionati sull'asse immaginario, ciascuno avente molteplicità unitaria:
O è instabile
O è asintoticamente stabile
X è semplicemente stabile
O dipende dal posizionamento degli zeri

DOMANDA 3.
La funzione di trasferimento G(s) di un sistema asintoticamente stabile:
O può avere poli a parte reale positiva
X può avere zeri a parte reale positiva
O è certamente a fase minima
O può avere poli puramente immaginari

DOMANDA 4.
La risposta impulsiva del sistema avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+3)}$$

O è limitata, ma non tende a zero per $t \to \infty$
O è limitata e tende a zero per $t \to \infty$
X tende a ∞ per $t \to \infty$
O può tendere a ∞ in un intervallo di tempo limitato

NOTA: *Avendo due poli nell'origine la funzione di trasferimento è instabile, pertanto la sua risposta impulsiva tende ad infinito per il tempo che tende all'infinito.*

DOMANDA 5.
L’errore a regime del sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+2)}$$

chiuso in retroazione unitaria negativa, quando in ingresso è presente una rampa unitaria:

$$u(s) = \frac{1}{s^2}$$

è pari a:

o $e(\infty) = 10$

o $e(\infty) = 1$

o $e(\infty) = 0,1$

x $e(\infty) = 0$

NOTA: *Il sistema considerato ha due poli nell’origine, si può quindi definire sistema di tipo 2. Tale tipo di sistema, se posto in retroazione unitaria negativa, annulla l’errore a regime per ingressi di tipo gradino e rampa, essendo di quest’ultima tipologia il segnale indicato dal testo.*