# Fondamenti di Automatica

## Analisi dei sistemi dinamici

Prof. Marcello Bonfè
Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara
Tel. +39 0532 974839
E-mail: marcello.bonfe@unife.it

Department of Engineering Ferrara

Università degli Studi di Ferrara

## Analisi dei sistemi dinamici
## DEFINIZIONI

## Ulteriori definizioni importanti

- **EVENTO**: coppia tempo-stato $(t, x(t)) \in T \times X$
- **MOVIMENTO** (o **MOTO**): insieme degli eventi definiti dalla funzione di transizione nell'intervallo $[t_0,t_1]$

$$\{(t, x(t)) | x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)), \quad t \in [t_0, t_1]\}$$

- **TRAIETTORIA**: immagine in ***X*** della funzione di transizione nell'intervallo $[t_0,t_1]$

$$\{x(t) | x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)) \quad t \in [t_0, t_1]\}$$

**N.B.:** il movimento è definito in ***T*** x ***X***, la traiettoria in **X**



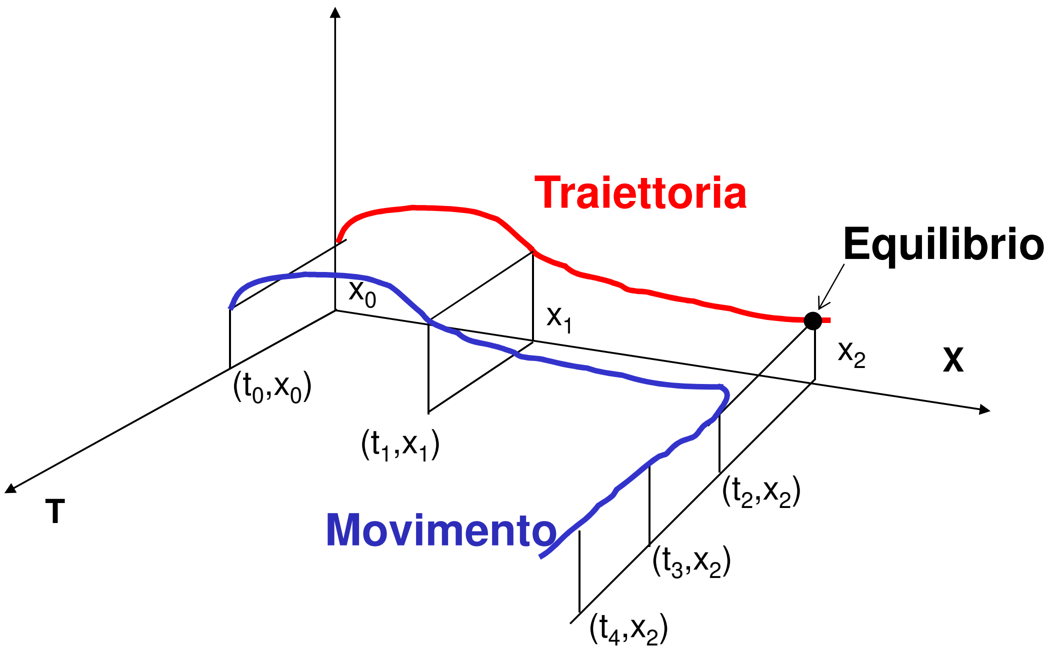
## Ulteriori definizioni importanti - 1

- **STATO DI EQUILIBRIO TEMPORANEO** in $[t_0,t_1]$: è uno stato $x \in$ ***X*** per il quale esiste una funzione $u(.) \in U_f$ che per ogni ogni t $\in [t_0,t_1]$ soddisfa la:

$$x = \phi(t, t_0, x, u(\cdot))$$

- **STATO DI EQUILIBRIO**: è uno stato di equilibrio temporaneo in $[t_0,t_1]$ per ogni $t_0,t_1 \in$ ***T*** con $t_0 < t_1$

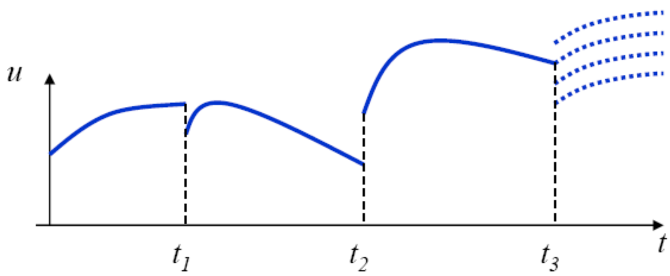
## Movimento, traiettoria ed equilibrio

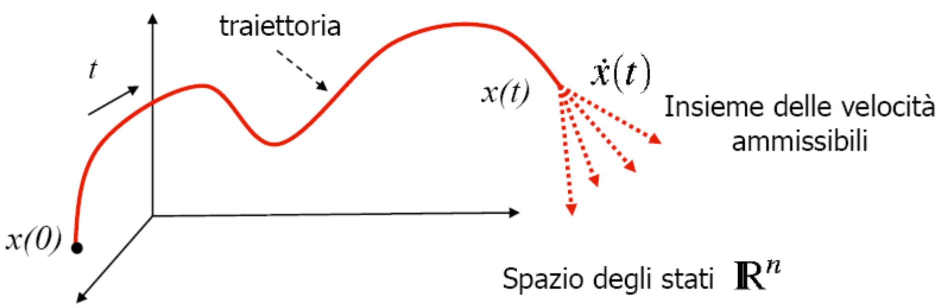





## Movimento / traiettoria e funzione di ingresso

- Tramite la funzione di ingresso si influenza il moto (e quindi la traiettoria) agendo direttamente sulla velocità $\dot{x}(t)$



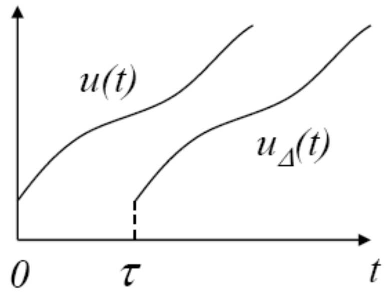



# Stazionarietà e linearità: proprietà

- Nei **sistemi stazionari**, vale la proprietà di traslazione nel tempo di cause ed effetti
- Cioè, data la funzione di transizione (idem per la funzione di uscita): $x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$

  risulta: $x(t+\tau) = \phi(t+\tau, t_0+\tau, x_0, u_\Delta(\cdot)) = x(t)$

  con $u_\Delta(t) = u(t+\tau)$




$u_\Delta(t) = u(t-\tau)$ funzione di ingresso traslata

Si suppone che sia:

$$u_\Delta(\cdot) \in \mathcal{U}_f, \quad \forall\ u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$$



# Stazionarietà e linearità: proprietà - 1

- Nei **sistemi lineari** vale il principio di **sovrapposizione degli effetti**, che deriva dalla proprietà di linearità delle funzioni di velocità dello stato *f*(..) e di uscita *g*(..):

$$x(t) = \phi(t, t_0, \alpha x_{0_1} + \beta x_{0_2}, \alpha u_1(\cdot) + \beta u_2(\cdot))$$
$$= \alpha\phi(t, t_0, x_{0_1}, u_1(\cdot)) + \beta\phi(t, t_0, x_{0_2}, u_2(\cdot))$$

- Posto $\alpha = \beta = 1; \quad x_{0_1} = x_0;\ x_{0_2} = 0; \quad u_1(\cdot) = 0;\ u_2(\cdot) = u(\cdot)$

$$x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \underbrace{\phi(t, t_0, x_0, 0)}_{\text{moto libero}} + \underbrace{\phi(t, t_0, 0, u(\cdot))}_{\text{moto forzato}}$$

## Stazionarietà e linearità: proprietà - 2

- Analogamente, per la funzione di risposta di un **sistema lineare**:

$$y(t) = \gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \underbrace{\gamma(t, t_0, x_0, 0)}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\gamma(t, t_0, 0, u(\cdot))}_{\text{risposta forzata}}$$

- Quindi per un **sistema lineare** il moto e la relativa risposta si possono scomporre in due contributi:
  - uno dipendente **SOLO** dalle condizioni iniziali (**moto libero** e **risposta libera**)
  - uno dipendente **SOLO** dall'ingresso (**moto forzato** e **risposta forzata**)



## Stazionarietà e linearità: conseguenze

- Nei **sistemi stazionari**:
  - L'istante iniziale si può sempre assumere $t_0 = 0$
  - Le funzioni $\phi$ e $\gamma$ dipendono dalla differenza $t - t_0$ e non da $t$ e $t_0$ separatamente

## Analisi dei sistemi dinamici
## STABILITA'



## Stabilità

- Con tale termine si intende la capacità di un sistema di reagire con variazioni limitate del moto ***x(.)*** a perturbazioni limitate dello stato iniziale ***x(t₀)*** o dell'ingresso ***u(.)***
- Ipotesi: ***U, U_f, X, Y*** sono spazi vettoriali normati
- $x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ : moto di riferimento
- $x_1(t) = \phi(t, t_0, x(t_0) + \delta x_1(t_0), u(\cdot))$ : moto perturbato, con perturbazione *sullo stato iniziale* $\delta x_1(t_0)$
- $x_2(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot) + \delta u(\cdot))$ : moto perturbato, con perturbazione *sull'ingresso* $\delta u(\cdot)$

## Stabilità rispetto a perturbazioni dello stato iniziale

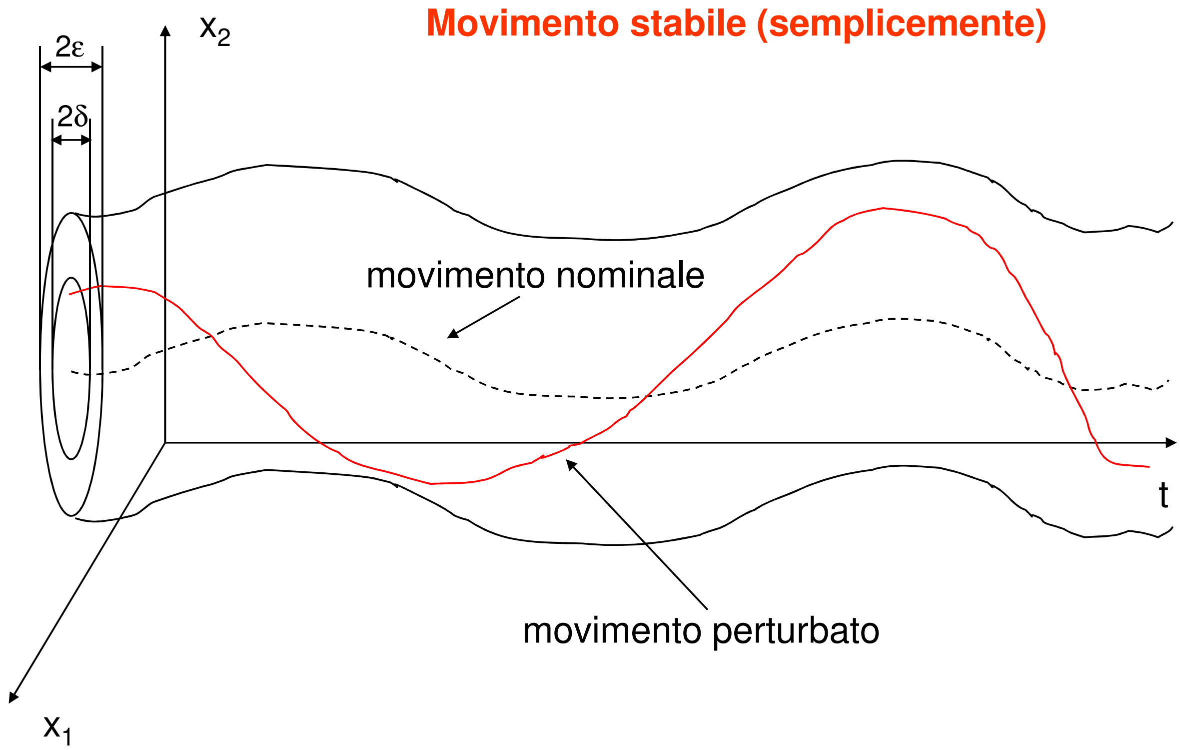
- Dato $\delta x_1(t) = x_1(t) - x(t)$ si dice che **il moto di riferimento è (semplicemente) stabile** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che quando $\|\delta x_1(t_0)\| < \delta$ risulta $\|\delta x_1(t)\| < \varepsilon; \quad \forall t \geq t_0$

- Si dice che **il moto di riferimento è asintoticamente stabile** se, oltre ad essere semplicemente stabile, soddisfa la relazione

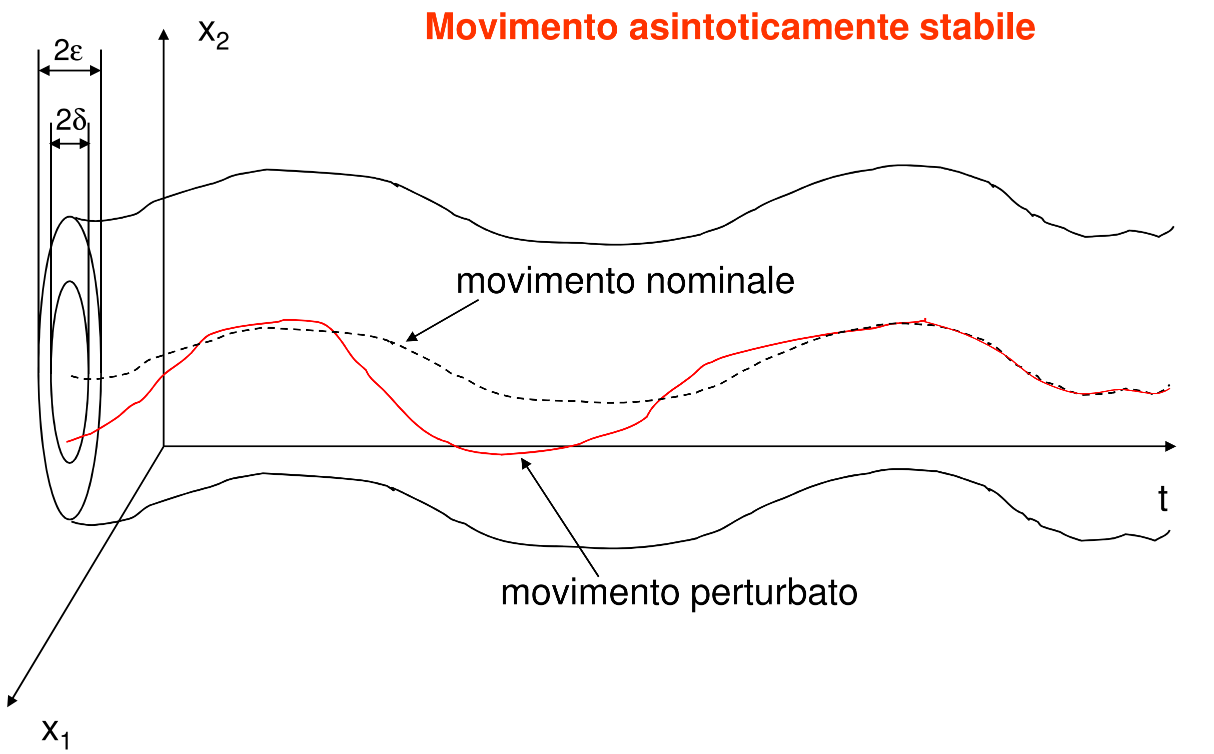
$$\lim_{t\to\infty} \|\delta x_1(t)\| = 0$$



## Stabilità: interpretazione geometrica

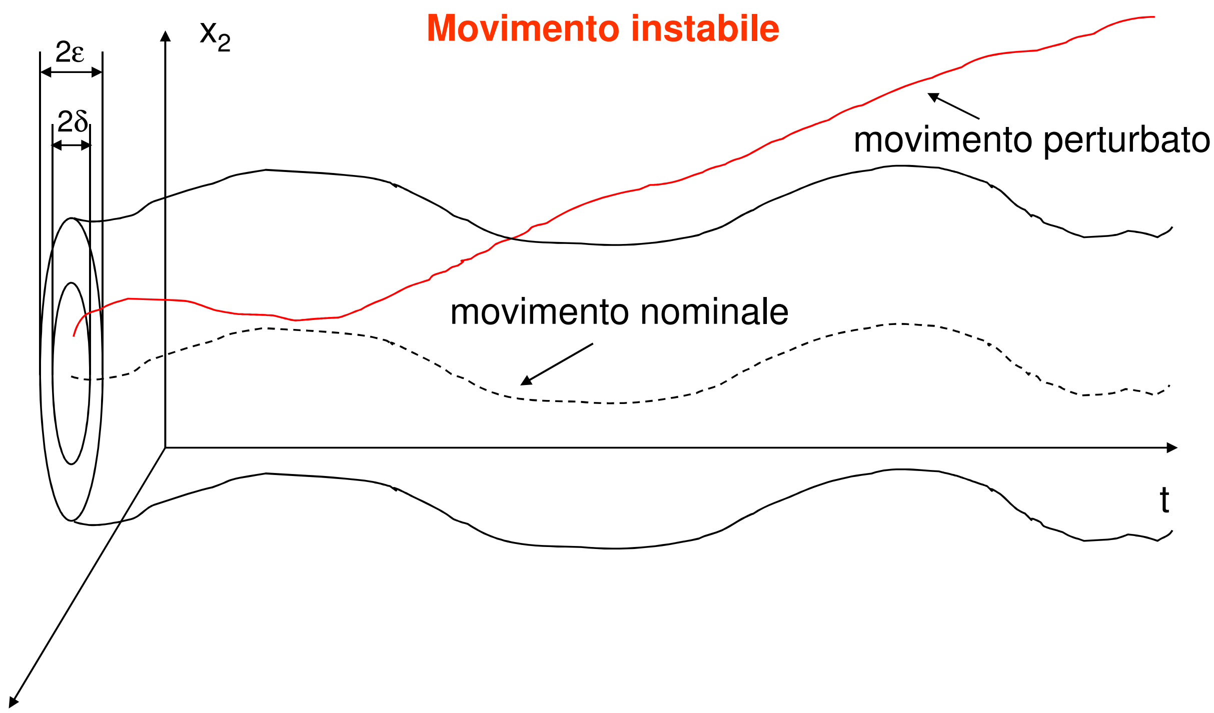


## Stabilità: interpretazione geometrica - 1






## Stabilità: interpretazione geometrica - 2



## Stabilità rispetto a perturbazioni dell'ingresso

- Dato $\delta x_2(t) = x_2(t) - x(t)$ si dice che il moto di riferimento **è stabile rispetto a** $\delta u(\cdot)$ o anche **stabile ingresso limitato – stato limitato**, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che quando $\|\delta u(\cdot)\| < \delta$ risulta $\|\delta x_2(t)\| < \varepsilon; \quad \forall t \geq t_0$

- Riferendosi alla funzione di risposta $y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ anziché alla funzione di transizione $x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ si ottiene in modo analogo la definizione di **stabilità ingresso limitato – uscita limitata**



## Osservazioni

- La stabilità, così come è stata definita, si riferisce ad un moto (o ad una risposta), individuato da una terna $t_0$, $x(t_0)$, $u(.)$, **NON** al sistema
- La stabilità può essere riferita ad uno **stato di equilibrio**:
$$\bar{x} = \phi(t, t_0, \bar{x}, u(\cdot))$$
che è un particolare moto del sistema
- Si è soliti distinguere la stabilità in piccolo (piccole perturbazioni) dalla stabilità in grande o globale, per la quale si misura l'entità della perturbazione cui corrisponde un comportamento stabile dei movimenti del sistema (globale ➔ entità qualunque)

## Esempio: stati di equilibrio stabili e instabili

Pendolo sollecitato dalla sola forza di gravità:

**STABILE ☺**


**INSTABILE ☹**



## Osservazioni - 1

- Per un sistema libero (cioè <u>senza ingresso</u> *u*(t)):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

uno **stato di equilibrio** è uno stato $\bar{x}$ tale che:

$$0 = f(\bar{x}, t)$$

- Questa condizione evidenzia l’associazione intuitiva tra *stabile* e *fermo* → $\dot{\bar{x}} = 0$
- Tuttavia, come già detto, la stabilità è in realtà un concetto associato al *movimento*, del quale lo stato di equilibrio è un <u>caso particolare</u> (anche per sistemi dotati di ingresso)

## Analisi dei sistemi dinamici
## SOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI STAZIONARI



## Sistemi lineari stazionari (o tempo-invarianti, LTI)

- Tempo continuo $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$
- Tempo discreto $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$
- Per tali sistemi è possibile calcolare **in forma esplicita** la funzione di transizione dello stato $x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ e la funzione di risposta $y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$

## Soluzione di equazioni differenziali

- Una equazione differenziale scalare e omogenea:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ha una soluzione del tipo $x(t) = x_0 e^{at}$

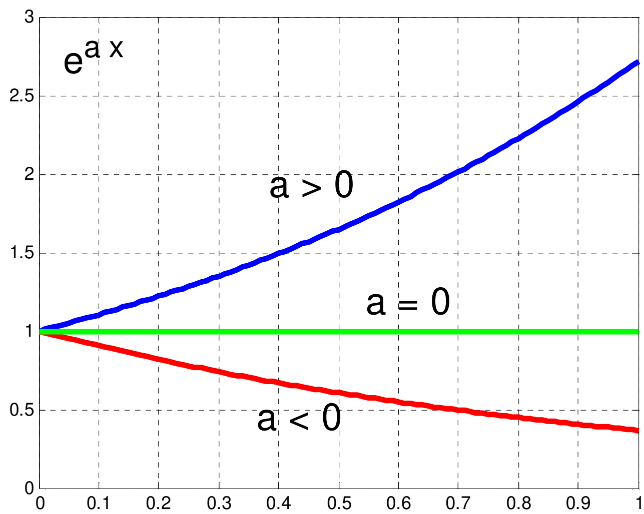
- Il comportamento della soluzione dipende ovviamente dal segno e dal valore di *a* (o della sua parte reale, $e^{(x+jy)} = e^x(\cos y + j\sin y)$)
- Sviluppo in serie della funzione esponenziale:

$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \frac{t^i}{i!} = 1 + at + a^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + a^r \frac{t^r}{r!} + \ldots \qquad a \in \mathbb{R}$$



## Soluzione di equazioni differenziali - 1

- Funzione esponenziale naturale:



## Soluzione di equazioni differenziali - 2

- Caso vettoriale omogeneo (sistema LTI con u(t)=0)

$$\dot{x}(t) = Ax(t); \quad x(0) = x_0,\ x(t) \in \mathbb{R}^n$$

- **Teorema**: la soluzione dell'equazione differenziale vettoriale è del tipo:

$$x(t) = e^{At}x_0$$

dove

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{i!} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + A^r\frac{t^r}{r!} + \ldots$$

è chiamata **esponenziale della matrice A**



## Osservazioni

- Conoscere l'esponenziale della matrice A equivale a conoscere la soluzione dell'equazione differenziale per ogni condizione iniziale
- Si noti anche che:

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i t^{i-1}}{(i-1)!} = Ae^{At}$$

$$e^{At}_{(t=0)} = I$$

## Proprietà dell'esponenziale della matrice A

- E' **non singolare** per ogni t, per cui si può scrivere: $$x(0) = (e^{At})^{-1} x(t)$$
- Altre proprietà utili:

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

$$e^{A(t+\tau)} = e^{At} e^{A\tau}$$

$$(e^{At})^k = e^{Akt}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{(A+B)t} \neq e^{At} e^{Bt}$$



## Proprietà dell'esponenziale della matrice A - 1

- Il fatto che l'esponenziale sia sempre invertibile (**non singolare** per ogni t) e che per calcolarne l'inversa basti di fatto cambiare segno al tempo nell'esponente: $(e^{At})^{-1} = e^{-At} = e^{A\cdot(-t)}$

implica di fatto che è sempre possibile invertire la direzione del tempo nel calcolo di una transizione dello stato e che per farlo basti invertire l'istante iniziale con quello finale..

$$\boxed{x(t) = e^{At} x(0) \Leftrightarrow x(0) = e^{A\cdot(-t)} x(t)}$$

## $e^{At}$ = Matrice di transizione

- L'esponenziale della matrice A è anche chiamata **matrice di transizione** perché determina, in assenza di ingresso, il moto libero:

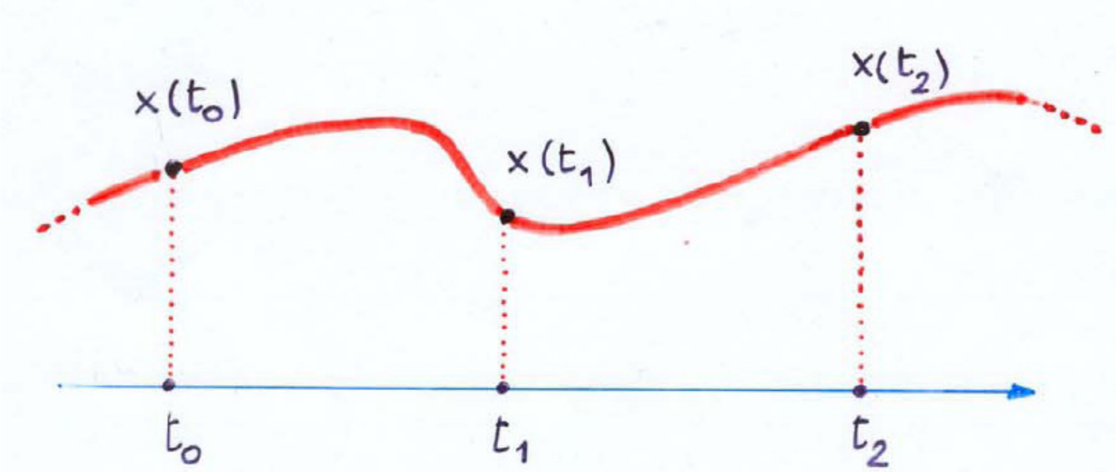
$$x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), 0) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

- In generale, si definisce matrice di transizione dello stato $\Phi(t, t_0)$ la soluzione dell'equazione differenziale matriciale (caso non stazionario):

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t); \quad X(t_0) = I$$



## Proprietà di composizione




$$x(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}x(t_0)$$

$$x(t_2) = e^{A(t_2-t_0)}x(t_0) = e^{A(t_2-t_1)}x(t_1)$$

$$= \underbrace{e^{A(t_2-t_1)}e^{A(t_1-t_0)}}_{e^{A(t_2-t_0)}}x(t_0)$$

## Calcolo di $e^{At}$ : richiamo delle basi teoriche

**[Def.]** Il **polinomio caratteristico** di una matrice reale A (n x n) è dato da:

$$a(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

**[Def.]** L'**equazione caratteristica** di A è data dal polinomio caratteristico eguagliato a 0:

$$a(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

**[Def.]** Le radici dell'equazione caratteristica sono gli **autovalori** di A (che possono essere numeri complessi):

$$a(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\ldots(\lambda - \lambda_h)^{n_h} = 0$$



## Calcolo di $e^{At}$ : richiamo delle basi teoriche - 1

**[Teorema di Cayley-Hamilton]**

La matrice A soddisfa l'equazione caratteristica:

$$a(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = 0$$

**N.B.:** dal teorema risulta quindi che:

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1A - a_0I$$

Ciò risulterà di grande importanza, oltre che per il calcolo dell'esponenziale, anche per l'analisi delle proprietà strutturali di un sistema LTI

## Calcolo di $e^{At}$ : richiamo delle basi teoriche - 2

**[Def.]** Un **polinomio annullatore** per A è un polinomio che soddisfa la relazione:

$$p(A) = 0$$

**[Def.]** Il **polinomio minimo** di A è il polinomio annullatore di grado minimo

$$\alpha(A) = 0$$





## Calcolo di $e^{At}$ : richiamo delle basi teoriche - 3

- **Proprietà** del polinomio minimo:
  - È unico se considerato monico (coefficiente del termine con esponente maggiore = 1)
  - È un divisore del polinomio caratteristico:

$$\alpha(\lambda) = \frac{\det(\lambda I - A)}{b(\lambda)}$$

dove $b(\lambda)$ è il massimo comun divisore (monico) degli elementi della matrice $\mathrm{agg}(\lambda I - A)$

## Calcolo di $e^{At}$ : richiamo delle basi teoriche - 4

- **Proprietà** del polinomio minimo:
  - Ha come radici tutti gli autovalori di A

$$\alpha(\lambda) = \lambda^l + \alpha_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 =$$
$$= (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2}\ldots(\lambda - \lambda_h)^{l_h}$$

con $0 < l_i \leq n_i \quad (i = 1, 2, \ldots, h)$

$$\sum_{i=1}^{h} l_i = l \leq \sum_{i=1}^{h} n_i = n$$



## Calcolo di $e^{At}$ : richiamo delle basi teoriche - 5

- **Proprietà** del polinomio minimo:
  - La matrice $(\lambda I - A)^{-1} = \dfrac{\mathrm{agg}(\lambda I - A)}{\det(\lambda I - A)}$

    è una matrice i cui elementi sono rapporti tra polinomi in funzione di λ
  - Il minimo comune multiplo dei denominatori di tale matrice è il polinomio minimo di A
  - Il calcolo di questa matrice e del m.c.m. dei denominatori costituiscono appunto il procedimento per determinare il polinomio minimo di A

## Calcolo di $e^{At}$ : richiamo delle basi teoriche - 6

- **Richiami** di algebra lineare:
  - Inversa di una matrice quadrata: $A^{-1}$

    $$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

  - Se A ha l'inversa è invertibile o non singolare
  - La matrice inversa di può calcolare come:

    $$A^{-1} = \frac{\mathrm{agg}(A)}{\det(A)}$$

  - La matrice $\mathrm{agg}(A)$ si ottiene associando ad ogni elemento di riga *i* e colonna *j* il complemento algebrico dell'elemento di A di riga *j* e colonna *i*



## Calcolo di $e^{At}$ : richiamo delle basi teoriche - 7

- **Richiami** di algebra lineare:
  - Il complemento algebrico dell'elemento $a_{ij}$ di una matrice quadrata A si ottiene calcolando il determinante della matrice risultante da A eliminando la riga i e la colonna j, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$
  - ESEMPIO: per A (2x2)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}$$

## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico

- Nel seguito viene descritto un metodo, basato sul cosiddetto *polinomio interpolante,* per ottenere l'espressione di $e^{At}$
- Ottenuta tale espressione, si potrà notare che tutti gli elementi della matrice sono delle combinazioni di termini elementari costituiti da funzioni (scalari) esponenziali, cioè del tipo $e^{\lambda t}$
- Si vedranno infine la natura (i.e. sono gli autovalori di A) e l'importante ruolo dei coefficienti λ che compaiono in tali termini elementari



## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 1

- **Punto di partenza**: teoria delle funzioni di matrice
- Sia A una matrice reale (n x n) e si consideri una funzione (scalare) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sviluppabile in serie di potenze:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

- La corrispondente funzione di matrice è definita:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i$$

## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 2

- Per la funzione di matrice non è però necessario considerare serie di infiniti termini.
- Infatti, dal polinomio minimo (monico) di A:

$$\alpha(\lambda) = \lambda^l + \alpha_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 =$$
$$= (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2} \ldots (\lambda - \lambda_h)^{l_h}$$

risulta (applicando il teorema di Cayley-Hamilton):

$$A^l = -\alpha_{l-1}A^{l-1} - \cdots - \alpha_1 A - \alpha_0 I$$

- **NOTA**: nel contesto scalare, questo vale solo rimpiazzando la matrice A con uno dei suoi autovalori $\lambda_k$

$$\lambda_k^l = -\alpha_{l-1}\lambda_k^{l-1} - \cdots - \alpha_1\lambda_k - \alpha_0 \; (k = 1, 2, \ldots, h)$$



## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 3

- **PERTANTO**, grazie al teorema di Cayley-Hamilton le serie infinite considerate diventano serie finite:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i A^i$$

← Funzione di matrice, uguaglianza valida con argomento = matrice A

$$f(\lambda_k) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda_k^i = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i \lambda_k^i \quad (k = 1, 2, \ldots, h)$$

Funzione scalare, uguaglianza valida con argomento = qualsiasi autovalore di A

con una opportuna definizione dei *coefficienti* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1}$

## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 4

- I coefficienti (che si vedrà poi essere a loro volta funzioni scalari del tempo) $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1}$ che compaiono nell'espressione matriciale (rispetto ad A) e nelle *h* espressioni scalari sono gli stessi
- Per determinarli, si possono quindi sfruttare le espressioni ottenute dalla funzione scalare sostituendo alla variabile scalare gli autovalori di A
- Nel caso di interesse, l'obiettivo finale è ottenere l'esponenziale della matrice A, quindi

$$f(x) = e^{xt} \Rightarrow f(A) = e^{At}$$

**N.B.:** funzione di *x*, non di *t*..



## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 5

- Una volta determinati i coefficienti (funzioni scalari del tempo) $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1}$, la matrice $e^{At}$ si può esprimere con la serie finita (quindi calcolabile esplicitamente!)

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i A^i = \gamma_0 I + \gamma_1 A + \gamma_2 A^2 + \cdots + \gamma_{l-1} A^{l-1}$$

## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 6

- Le condizioni sulla funzione scalare si possono esprimere in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_h) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{l-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_h & \lambda_h^2 & \dots & \lambda_h^{l-1} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di Vandermonde}} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{l-1} \end{bmatrix}$$

**N.B.**: una matrice di Vandermonde è una matrice le cui righe (o colonne) hanno elementi in progressione geometrica a partire da 1. Tale tipo di matrice è sempre invertibile



## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 6a

Nel caso di interesse, cioè per calcolare $f(A) = e^{At}$ , risulta il seguente sistema di vincoli:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_h t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{l-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_h & \lambda_h^2 & \dots & \lambda_h^{l-1} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di Vandermonde}} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{l-1} \end{bmatrix}$$

## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 7

- A questo punto, si possono presentare due casi, a seconda della molteplicità degli autovalori (nel polinomio minimo):
  1. Tutti gli autovalori hanno molteplicità unitaria (radici distinte nel polinomio minimo), vale a dire $h = l$
  2. Uno o più autovalori hanno molteplicità maggiore di uno (radici multiple nel polinomio minimo), vale a dire $h \neq l$



## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 8

1. Se $h = l$ (radici distinte nel polinomio minimo), il sistema di equazioni **ha soluzione**, essendo la matrice dei coefficienti (di *Vandermonde*) non singolare (i.e. invertibile) per costruzione.

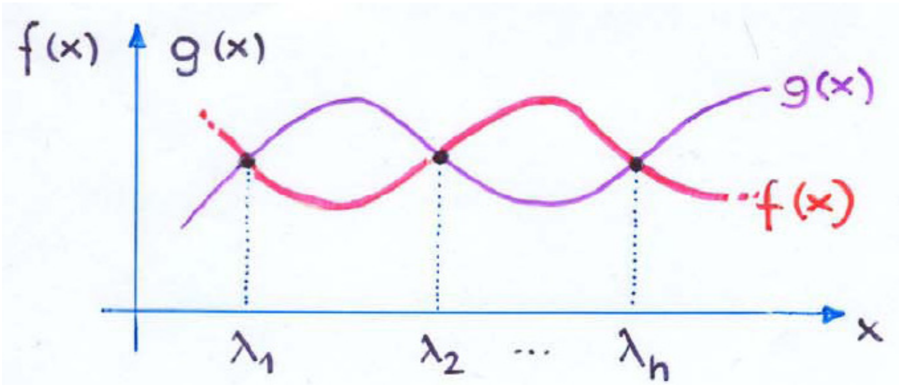
   Ricavati i coefficienti $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1}$ è possibile calcolare la funzione di matrice con:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i A^i$$

## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 8a

**NOTA BENE:** $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \neq \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i x^i = g(x)$

Per la funzione scalare l'uguaglianza vale se $x = \lambda_k \ (k = 1, .., h)$, per la funzione di matrice vale sempre! Questo metodo per il calcolo di $e^{At}$ prende il nome appunto da tale aspetto, evidenziabile in modo grafico come segue:






## Calcolo di $e^{At}$ : primo esempio

- Si consideri: $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

**N.B.:** matrice ***triangolare*** superiore! ➔ gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale!

i cui autovalori sono: $\lambda_1 = -3; \ \lambda_2 = 2$

Il sistema generico di slide 45 diventa quindi:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$$

e la matrice esponenziale è facilmente calcolabile:

$$e^{At} = \gamma_0 I + \gamma_1 A = \begin{bmatrix} \gamma_0 - 3\gamma_1 & \gamma_1 \\ 0 & \gamma_0 + 2\gamma_1 \end{bmatrix}$$

## Calcolo di $e^{At}$ : primo esempio - 1

- Perciò : $\begin{cases} e^{-3t} = \gamma_0 - 3\gamma_1 \\ e^{2t} = \gamma_0 + 2\gamma_1 \end{cases}$

  dalla cui soluzione si ottiene:

$$\begin{cases} \gamma_0 = \frac{3e^{2t}}{5} + \frac{2e^{-3t}}{5} \\ \gamma_1 = \frac{e^{2t} - e^{-3t}}{5} \end{cases}$$

  e quindi:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & \frac{e^{2t} - e^{-3t}}{5} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$



## Calcolo di $e^{At}$ : primo esempio - 2

- Nota $e^{At}$ è possibile calcolare lo stato $x(t)$ in un qualunque istante $t$, noto $x(0)$:

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

  **ma anche** calcolare a ritroso lo stato iniziale, noto $x(t)$:

$$x(0) = e^{A(-t)}x(t) = e^{-At}x(t)$$

- **NOTA BENE:** in generale, l'operazione è possibile dati gli stati in due istanti di tempo $t_1$ e $t_2$ qualunque (cioè $t_1 \lesseqgtr t_2$!!):

$$\boxed{x(t_2) = e^{A(t_2 - t_1)}x(t_1)}$$

- **Es.**: dato $x(0) = [1 \;\; 5]^T$ , calcolare $x(t)$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & \frac{e^{2t} - e^{-3t}}{5} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 5e^{2t} \end{bmatrix}$$

## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 9

2. Se $h \neq l$, il sistema visto nelle slide 44-45 <u>non ha soluzione univoca</u>, quindi occorre fare ulteriori considerazioni.

Anzitutto, si noti che, dato un qualunque altro polinomio *h(x)* per il quale valga:

$$f(A) = g(A) = h(A)$$

si avrà ➔ $g(A) - h(A) = \mathbf{0}$

il che significa che il polinomio minimo (che t.c. $\alpha(A) = 0$) è un divisore per *g(x)-h(x)*, cioè esiste un polinomio $\beta(x)$ tale che: $g(x) - h(x) = \alpha(x)\beta(x)$



## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 9a

Inoltre, nei punti di interesse per la variabile scalare *x* (cioè gli autovalori di A), il polinomio minimo ha anche derivate (rispetto a *x*) nulle fino all'ordine pari alla molteplicità dell'autovalore considerato:

$$0 = \alpha(\lambda_k) = \alpha'(\lambda_k) = \cdots = \alpha^{(l_k - 1)}(\lambda_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, h)$$

## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 10

Di conseguenza: $g(\lambda_k) = h(\lambda_k)$

$$g'(\lambda_k) = h'(\lambda_k)$$

$$....$$

$$g^{(l_k-1)}(\lambda_k) = h^{(l_k-1)}(\lambda_k)$$

➔Tutti i polinomi = *f(A)* e le loro derivate fino alla ($l_k$-1)-esima assumono gli stessi valori in $\lambda_k$ (con k=1,2,…,h)



## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 11

In base a questi risultati, si può estendere il problema di calcolo dei coefficienti $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{l-1}$ impostando un sistema di equazioni basato su una matrice di *Vandermonde generalizzata*, nella quale cioè vi siano blocchi di righe ciascuna delle quali pari alla derivata della precedente

## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 12

Se $h \neq l$ il sistema da risolvere diventa (in generale):

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f'(\lambda_1) \\ \vdots \\ f^{l_1-1}(\lambda_1) \\ \hline f(\lambda_2) \\ f'(\lambda_2) \\ \vdots \\ f^{l_2-1}(\lambda_2) \\ \hline \vdots \\ f^{l_h-1}(\lambda_h) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{l-1} \\ 0 & 1 & \dots & (l-1)\lambda_1^{l-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{(l-1)!}{(l-l_1)!}\lambda_1^{l-l_1} \\ \hline 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{l-1} \\ 0 & 1 & \dots & (l-1)\lambda_2^{l-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{(l-1)!}{(l-l_2)!}\lambda_2^{l-l_2} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{(l-1)!}{(l-l_h)!}\lambda_h^{l-l_h} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di Vandermonde generalizzata}} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{l-1} \end{bmatrix}$$

**N.B.:** derivate di f(x), calcolate in $\lambda_k$



## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 13

Anche in questo secondo caso, ricavati i coefficienti $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{l-1}$ (in quanto anche la matrice di *Vandermonde generalizzata* si può dimostrare essere invertibile) è possibile calcolare la funzione di matrice con:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i A^i$$

## Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 14

Per il caso specifico di interesse $f(A) = e^{At}$ risulta:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ te^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ t^{l_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ \hline e^{\lambda_2 t} \\ te^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ t^{l_2-1}e^{\lambda_2 t} \\ \hline \vdots \\ t^{l_h-1}e^{\lambda_h t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{l-1} \\ 0 & 1 & \dots & (l-1)\lambda_1^{l-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{(l-1)!}{(l-l_1)!}\lambda_1^{l-l_1} \\ \hline 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{l-1} \\ 0 & 1 & \dots & (l-1)\lambda_2^{l-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{(l-1)!}{(l-l_2)!}\lambda_2^{l-l_2} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{(l-1)!}{(l-l_h)!}\lambda_h^{l-l_h} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di Vandermonde generalizzata}} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{l-1} \end{bmatrix}$$

**N.B.:** derivate di $e^{xt}$, rispetto a $x$, calcolate in $\lambda_k$



## Calcolo di $e^{At}$ : secondo esempio

- Si consideri: $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

**N.B.:** matrice ***triangolare*** superiore! ➔ gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale!

con autovalore di molteplicità doppia: $\lambda_1 = -3;$

In questo caso occorre considerare la forma di Vandermonde generalizzata della slide precedente:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ te^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ te^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$$

e poi: $e^{At} = \gamma_0 I + \gamma_1 A = \begin{bmatrix} \gamma_0 - 3\gamma_1 & \gamma_1 \\ 0 & \gamma_0 - 3\gamma_1 \end{bmatrix}$

## Calcolo di $e^{At}$ : secondo esempio - 1

- Perciò: $$\begin{cases} e^{-3t} = \gamma_0 - 3\gamma_1 \\ te^{-3t} = \gamma_1 \end{cases}$$

  dalla cui soluzione si ottiene:

  $$\begin{cases} \gamma_0 = e^{-3t} + 3te^{-3t} \\ \gamma_1 = te^{-3t} \end{cases}$$

  e quindi:

  $$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$



## Calcolo di $e^{At}$ : note sugli esempi

- Si noti che nei due esempi presentati la <u>struttura triangolare</u> della matrice ***A*** semplifica l'identificazione "a colpo d'occhio" dei suoi autovalori, ma in generale la procedura completa è:
  – calcolare il polinomio caratteristico: $a(\lambda) = \det(\lambda I - A)$
  – trovare gli autovalori come soluzioni in λ di $a(\lambda) = 0$
- Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = (\lambda+1)(\lambda+2)\underbrace{-2}$$

costante non presente nei due casi prec.

$$\Rightarrow (\lambda+1)(\lambda+2) - 2 = \lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda+3)$$

Che posto = 0 permette di calcolare i due autovalori ➔ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$

# Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 15

**RIASSUMENDO**: per calcolare $e^{At}$, calcolare gli $h$ autovalori di A ed analizzare il grado $l$ del polinomio minimo, poi determinare $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{l-1}$ da uno dei seguenti sistemi:

$\boxed{\text{1. Se } h = l}$

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_h t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{l-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_h & \dots & \lambda_h^{l-1} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di Vandermonde}} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{l-1} \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{2. Se } h \neq l}$

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ t\,e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ t^{l_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ t^{l_h-1} e^{\lambda_h t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{l-1} \\ 0 & 1 & \dots & (l-1)\lambda_1^{l-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{(l-1)!}{(l-l_1)!}\lambda_1^{l-l_1} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{(l-1)!}{(l-l_h)!}\lambda_h^{l-l_h} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di Vandermonde generalizzata}} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{l-1} \end{bmatrix}$$



# Calcolo di $e^{At}$ : un procedimento analitico - 15a

**INFINE**: esplicitare $e^{At}$ calcolando la serie di $l$ termini in funzione dei coefficienti $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{l-1}$ e delle potenze di A:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i A^i = \gamma_0 I + \gamma_1 A + \gamma_2 A^2 + \dots + \gamma_{l-1} A^{l-1}$$

## Calcolo di $e^{At}$ : osservazioni

- Il metodo visto per il calcolo dell'esponenziale di matrice è detto metodo del *polinomio interpolante*
- In letteratura esistono diversi altri metodi per il calcolo di $e^{At}$ :
  - tramite la *forma di Jordan* della matrice A
  - tramite la forma triangolare di A ottenuta per *scomposizione di Schur*
  - …
- Qualunque sia il metodo utilizzato, gli elementi di $e^{At}$ hanno una forma ben precisa (slide seguente)



## Calcolo di $e^{At}$ : definizione dei *modi*

**STRUTTURA GENERALE DI $e^{At}$** :

- Ogni termine di $e^{At}$ è una combinazione lineare a coefficienti costanti di termini del tipo:

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{l_1-1}e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_h t}, \ldots, t^{l_h-1}e^{\lambda_h t}$$

- Questi termini elementari si chiamano **modi** di $e^{At}$ e caratterizzano completamente il **moto libero** del sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$

## Calcolo di $e^{At}$ : definizione dei *modi* - 1

**OSSERVAZIONE**:

- Gli autovalori di A possono essere complessi, nel qual caso sarà sempre presente una coppia di valori complessi coniugati: $\lambda_{i1,i2} = \sigma_i \pm j\omega_i$
- Applicando la formula di Eulero ($e^{x+jy} = e^x(\cos y + j \sin y)$) i modi associati a tali autovalori complessi risultano del tipo:
  $e^{\sigma_i t} cos(\omega_i t), e^{\sigma_i t} sin(\omega_i t), \ldots, t^{l_i - 1} e^{\sigma_i t} cos(\omega_i t), t^{l_i - 1} e^{\sigma_i t} sin(\omega_i t)$
- **N.B.:** essendo gli autovalori complessi sempre presenti con il proprio coniugato, la matrice $e^{At}$ e quindi i modi della risposta risultano comunque **REALI**



## Evoluzione dello stato: soluzione completa ($u(t) \neq 0$)

- Dato: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(0) = x_0,\ x(t) \in \mathbb{R}^n$
  si può dimostrare che la soluzione dell'equazione differenziale è data dalla **formula di Lagrange**:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

**Moto libero** + **Moto forzato**

$\phi(t, t_0, x_0, 0)$ $\qquad\qquad$ $\phi(t, t_0, 0, u(\cdot))$

## Evoluzione dello stato: soluz. completa ($u(t) \neq 0$) - 1

- Verifica della formula di Lagrange:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(e^{At}x_0) + \frac{d}{dt}\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau =$$

$$= Ae^{At}x_0 + e^{A(t-t)}Bu(t) + A\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau =$$

$$= A\underbrace{\left[e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right]}_{x(t)} + Bu(t)$$



## Evoluzione dello stato: soluz. completa ($u(t) \neq 0$) - 2

- In generale, se $t_0 \neq 0$:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

## Funzione di risposta

- Nel caso LTI non omogeneo, si ottiene facilmente:

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{Risposta forzata}}$$

**Risposta libera** + **Risposta forzata**

$$\gamma(t, t_0, x_0, 0) \qquad\qquad \gamma(t, t_0, 0, u(\cdot))$$



## Funzione di risposta - 1

- La matrice: $\boxed{W(t) = Ce^{At}B}$

  è chiamata **risposta impulsiva** del sistema
- Se $x_0 = 0$ ed il sistema è puramente dinamico:

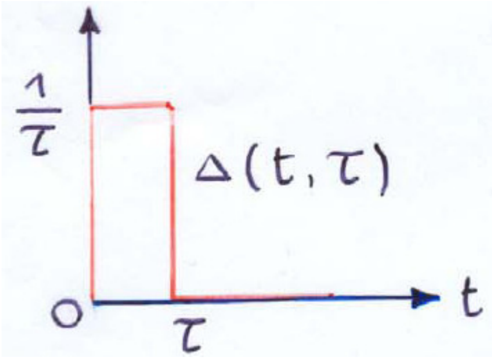
$$y(t) = \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

cioè l'uscita è data dall'integrale di convoluzione tra la risposta impulsiva e l'ingresso

- La matrice di risposta impulsiva è un **modello matematico ingresso-uscita** del sistema

# Funzione di risposta - 2

- La risposta impulsiva è così denominata in quanto corrisponde anche alla risposta del sistema nel caso in cui venga applicato ad esso la cosiddetta "funzione" **impulso (o *delta*) di Dirac**, definita come il limite per $\tau \to 0$ del seguente segnale:






# Funzione di risposta - 3

- Caratteristiche dell'impulso di Dirac:

$$\int_0^\infty \delta(t)dt = \lim_{\tau \to 0} \int_0^\infty \Delta(t,\tau)dt = 1$$

$$\int_0^\infty f(t)\delta(t)dt = \lim_{\tau \to 0} \int_0^\infty f(t)\Delta(t,\tau)dt = f(0)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \int_0^t W(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = W(t)$$

## Soluzione di equazioni alle differenze finite

- Caso vettoriale omogeneo (sistema LTI tempo-discreto, con u(k)=0)

$$x(k+1) = Ax(k); \quad x(0) = x_0,\ x(k) \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{Z}$$

- In tale caso, risulta agevolmente:

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax_0 \\ x(2) &= Ax(1) = A^2 x_0 \\ x(3) &= Ax(2) = A^3 x_0 \\ &\cdots \\ x(k) &= A^k x_0 \end{aligned}$$



## Soluzione di equazioni alle differenze finite - 1

- Pertanto nel caso discreto la **matrice di transizione**, che caratterizza il moto libero, è la **potenza di matrice** $A^k$
- A differenza dell'esponenziale di matrice, la potenza di matrice **può essere singolare**
- Anche tale matrice può essere calcolata con la teoria delle funzioni di matrice, dalla quale risulta che ogni suo elemento è una combinazione lineare a coefficienti costanti di termini, detti **modi di** $A^k$ , del tipo:

$$\lambda_1^k, k\lambda_1^{k-1}, \ldots, (l_1-1)!\binom{k}{l_1-1}\lambda_1^{k-l_1+1}, \ldots, \lambda_h^k, \ldots, (l_h-1)!\binom{k}{l_h-1}\lambda_h^{k-l_h+1}$$

# Modi: caso continuo e caso discreto

Modi di $e^{At}$:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t}, & t e^{\lambda_1 t}, & \dots, & t^{\ell_1 - 1} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_h t}, & t e^{\lambda_h t}, & \dots, & t^{\ell_h - 1} e^{\lambda_h t} \end{cases}$$

radici del polinomio minimo: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ autovalori

$\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_h$ molteplicità

Modi di $A^K$

$$\begin{cases} \lambda_1^K, & K \lambda_1^{K-1}, & \dots, & (\ell_1 - 1)! \binom{K}{\ell_1 - 1} \lambda_1^{K - \ell_1 + 1} \\ \vdots & & & \\ \lambda_h^K, & K \lambda_h^{K-1}, & \dots, & (\ell_h - 1)! \binom{K}{\ell_h - 1} \lambda_h^{K - \ell_h + 1} \end{cases}$$



# Soluzione di equazioni alle differenze finite - 2

- Caso non omogeneo ($u(k) \neq 0$):

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \quad x(0) = x_0,\ x(k) \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{Z}$$

risulta:

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax_0 + Bu(0) \\ x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = A^2 x_0 + ABu(0) + Bu(1) \\ x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A^3 x_0 + A^2 Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\ &\dots \\ x(k) &= \underbrace{A^k x_0}_{\text{Moto libero}} + \underbrace{\textstyle\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i)}_{\text{Moto forzato}} \end{aligned}$$

Moto libero + Moto forzato

$$\phi(k, 0, x_0, 0) \qquad \phi(k, 0, 0, u(\cdot))$$

## Funzione di risposta – caso discreto

- Per il sistema LTI non omogeno vale:

$$y(k) = \underbrace{CA^k x(0)}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-1-i}Bu(i) + Du(k)}_{\text{Risposta forzata}}$$

Risposta libera + Risposta forzata

$$\gamma(k,0,x_0,0) \qquad \gamma(k,0,0,u(\cdot))$$

- La matrice $W(k) = CA^{k-1}B$ è la risposta impulsiva per il caso discreto, determinabile applicando ingressi del tipo:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$



## Rappresentazioni equivalenti

Introducendo il concetto di stato ed i modelli per sistemi ingegneristici, si è osservato che **NON** esiste un modo unico di scegliere le variabili di stato per rappresentare un sistema dinamico.

Per un sistema LTI, una volta scelta una base per ***X*=R$^n$**, ***U*=R$^r$** e ***Y*=R**$^m$ e scelte le variabili di stato, esso è rappresentato da:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Le proprietà del sistema però, NON dipendono dalla scelta delle variabili di stato…

Considerando una matrice T (n x n) costante e non singolare, è possibile effettuare un **cambio di variabili** e definire un nuovo vettore di stato x come:

$$x = Tz \iff z = T^{-1}x$$

# Rappresentazioni equivalenti - 1

Sostituendo nelle equazioni di partenza si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) = \hat{C}z(t) + \hat{D}u(t) \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} \hat{A} = T^{-1}AT & \hat{B} = T^{-1}B \\ \hat{C} = CT & \hat{D} = D \end{array}$$

Il sistema LTI rappresentato da queste equazioni è **equivalente** al sistema LTI di partenza, nel senso che per un ingresso u(t) e due stati iniziali legati dalla condizione

$$z_0 = T^{-1}x_0$$

Le funzioni dello stato x(t) e z(t) sono legate dalla relazione

$$z(t) = T^{-1}x(t) \quad \forall t \geq 0$$

e le uscite sono identiche.



# Rappresentazioni equivalenti - 2

Le matrici ***A*** e $\bar{A}$ sono matrici simili, aventi **lo stesso polinomio caratteristico, lo stesso polinomio minimo e gli stessi autovalori**:

$$\det(\lambda I - \hat{A}) = \det(\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT) =$$
$$= \det\left[T^{-1}(\lambda I - \hat{A})T\right] = \cancel{\det T^{-1}}\det(\lambda I - A)\cancel{\det T}$$

Risulta inoltre:

$$\hat{A}^2 = T^{-1}A\cancel{TT^{-1}}AT = T^{-1}A^2T$$

$$e^{\hat{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty}\hat{A}\frac{t^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty}T^{-1}AT\frac{t^i}{i!} = T^{-1}e^{At}T$$

$$\hat{C}e^{\hat{A}t}\hat{B} = C\cancel{TT^{-1}}e^{At}\cancel{TT^{-1}}B = Ce^{At}B$$

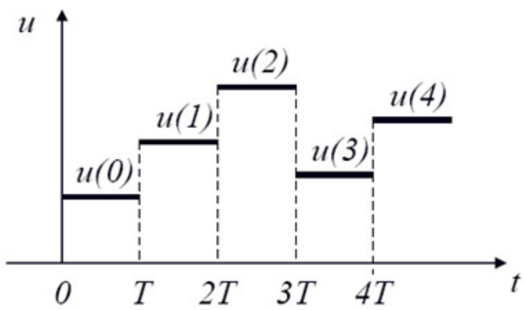
## Rappresentazioni equivalenti - 3

- Riassumendo, sia per sistemi continui che per sistemi discreti le **rappresentazioni equivalenti** hanno la stessa risposta (i.e. *W*(*t*) identica) e caratteristiche analoghe nel moto (dettato dagli autovalori) e quindi, come vedremo, **le stesse proprietà di stabilità**
- Tuttavia, la scelta delle variabili di stato influisce sulla forma delle matrici A, B e C. Ciò permette, con opportune trasformazioni, di rendere più evidenti alcuni parametri numerici del sistema (sistemi in forma *canonica*)



## Discretizzazione di un sistema LTI continuo

- **Discretizzazione (campionamento):** si suppone che ad ogni ingresso venga applicata una funzione costante a tratti




- Integrando l'equazione differenziale tra due istanti di campionamento:

$$x[(k+1)T] = \underbrace{e^{AT}}_{A_d} x(kT) + \underbrace{\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau)]} B d\tau}_{B_d} u(kT)$$

## Discretizzazione di un sistema LTI continuo - 1

- Si ottiene pertanto un modello discreto che fornisce ad ogni passo *i* gli stessi valori di stato e uscite del modello continuo all'istante *iT*, nelle ipotesi dette sugli ingressi (costanti a tratti):

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases}$$

Con:

$$\begin{aligned} A_d &= e^{AT} \\ B_d &= \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau)]} B d\tau = \int_0^T e^{A\varepsilon} B d\varepsilon \\ C_d &= C \\ D_d &= D \end{aligned}$$



## Analisi dei sistemi dinamici
## STABILITA' DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI

## Stabilità di un moto con stato iniziale perturbato

- Dato il sistema LTI continuo $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

moto di riferimento:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

moto perturbato:

$$x_1(t) = e^{At}[x(0) + \delta x_1(0)] + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \delta x_1(t) = x_1(t) - x(t) = e^{At}\delta x_1(0)$$



## Stabilità di un moto con stato iniziale perturbato - 1

- La differenza tra il moto di riferimento e quello perturbato $\delta x_1(t) = e^{At}\delta x_1(0)$ corrisponde di fatto a un moto libero del sistema con stato iniziale $\delta x_1(0)$
- Perché tale differenza tenda a zero, per t → ∞ (i.e. **stabilità asintotica**), occorre che tutti gli elementi di $e^{At}$ (che dipendono dagli autovalori di A) tendano a zero per t → ∞!!

**N.B.:** Si noti che $\delta x_1(t)$ **NON** dipende dal moto di riferimento, pertanto per i sistemi LTI si può parlare di **stabilità del sistema**, <u>anziché</u> di **stabilità dello specifico moto** (o <u>stato di equilibrio</u>)

## Stabilità di un moto con stato iniziale perturbato - 2

- Dato il sistema LTI discreto $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

moto di rif. $$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)$$

moto perturb. $$x_1(k) = A^k [x(0) + \delta x_1(0)] + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)$$

$$\Rightarrow \quad \delta x_1(t) = x_1(t) - x(t) = A^k \delta x_1(0)$$

**N.B.:** Ancora, $\delta x_1(t)$ **NON** dipende dal moto di riferimento, pertanto anche per i sistemi discreti si può parlare di **stabilità del sistema**, anziché di **stabilità dello specifico moto** (o stato di equilibrio)



## Stabilità e stati di equilibrio dei sistemi LTI

- Se A è invertibile, il **punto di equilibrio è unico**

$$A\bar{x} + B\bar{u} = 0 \;\Rightarrow\; \bar{x} = -A^{-1} B\bar{u}$$

- Ovviamente, se $\bar{u} = 0 \rightarrow \bar{x} = 0$
- L'unico movimento di interesse per la stabilità è il movimento libero, le cui caratteristiche dipendono da $e^{At}$ (o $A^k$ ), cioè **dipendono solo dagli autovalori di A** (che a loro volta **NON** cambiano rispetto a rappresentazioni equivalenti dello stesso sistema!)

## Stabilità e analisi modale

- Per i sistemi LTI il moto libero è caratterizzato dai **modi** della matrice di transizione ($e^{At}$ o $A^k$ )
- Lo studio delle caratteristiche di questi termini elementari viene chiamata **analisi modale**
- Nel *caso continuo*, l'analisi modale si basa sulle proprietà delle funzioni esponenziali. Come noto, tali funzioni convergono a 0 per valori dell'esponente a <u>parte reale negativa</u>.
- Nel *caso discreto*, l'analisi modale si basa sulle potenze. Tali funzioni convergono a 0 per valori della base con <u>modulo inferiore a 1</u>.

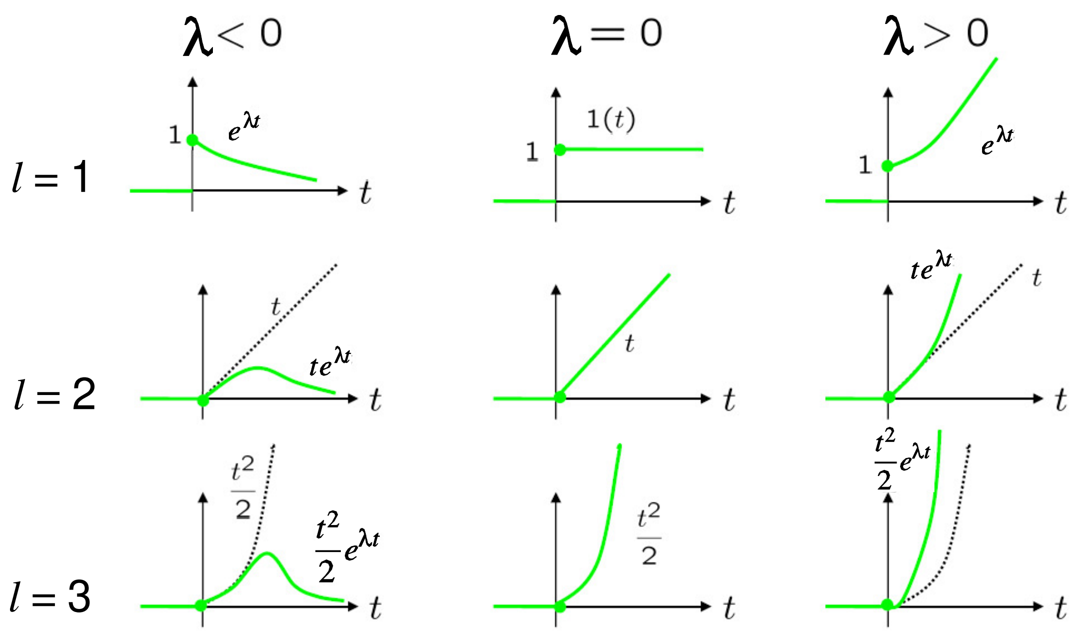


## Stabilità e analisi modale: tempo continuo

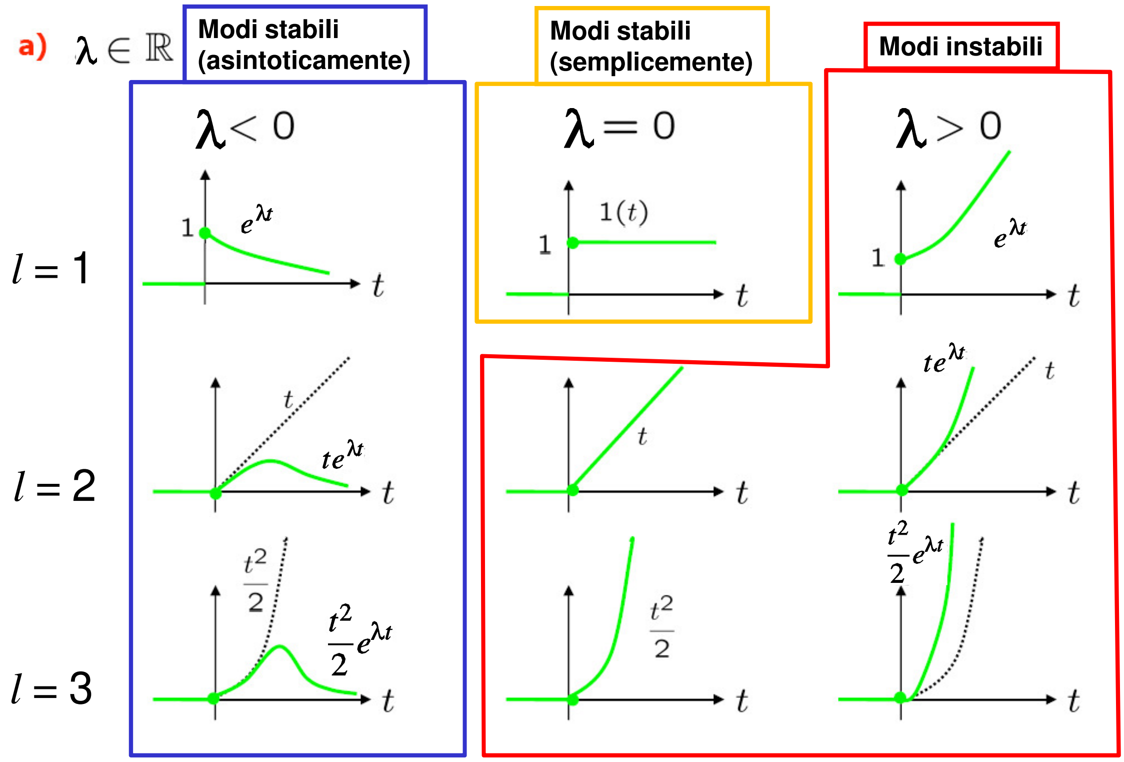
- Studio qualitativo dei termini tipo $t^{l-1}e^{\lambda t}$

$l$ = molteplicità dell'autovalore λ

**a)** $\lambda \in \mathbb{R}$



## Stabilità e analisi modale: tempo continuo - a

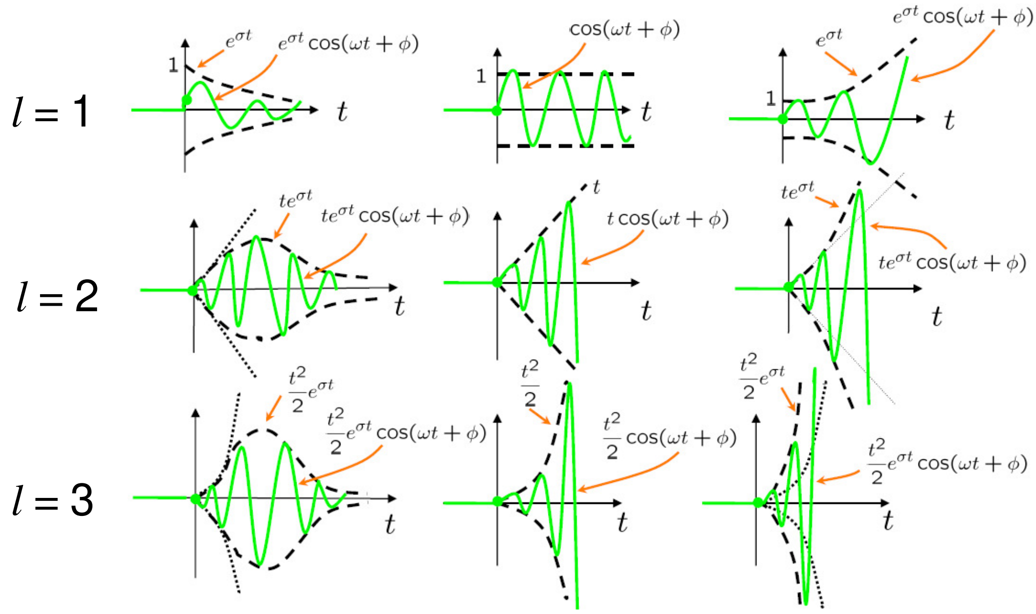




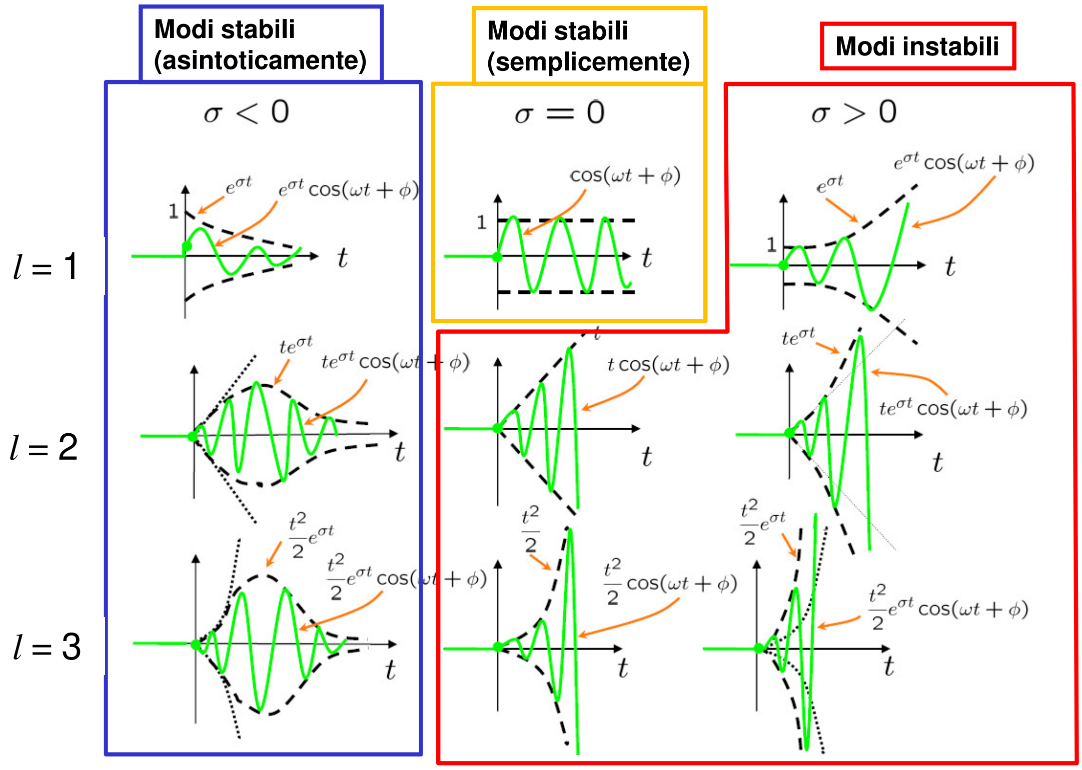

## Stabilità e analisi modale: tempo continuo - 1

- Studio qualitativo dei termini di tipo $t^{l-1}e^{\lambda t}$

b) $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda_1 = \sigma + j\omega, \lambda_2 = \sigma - j\omega,$



# Stabilità e analisi modale: tempo continuo - 1a

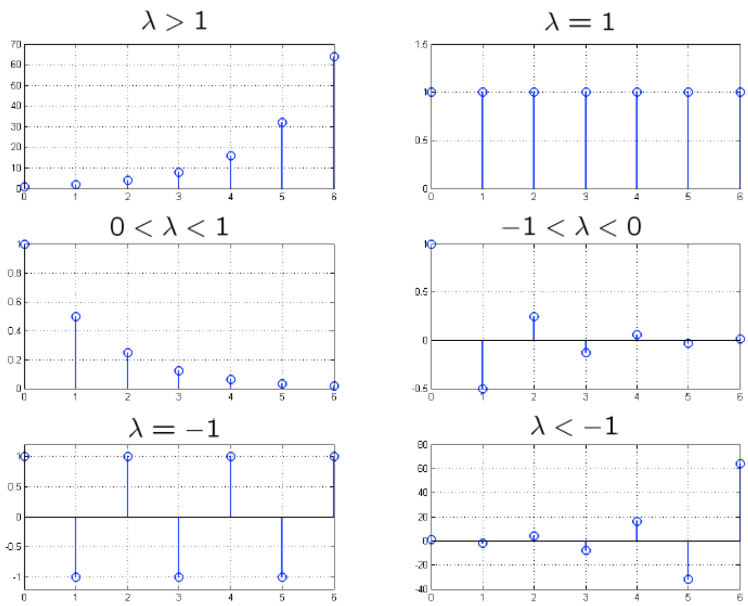





# Stabilità e analisi modale: tempo discreto

- Studio qualitativo dei termini di tipo $\binom{k}{l-1}\lambda^{(k-l+1)}$

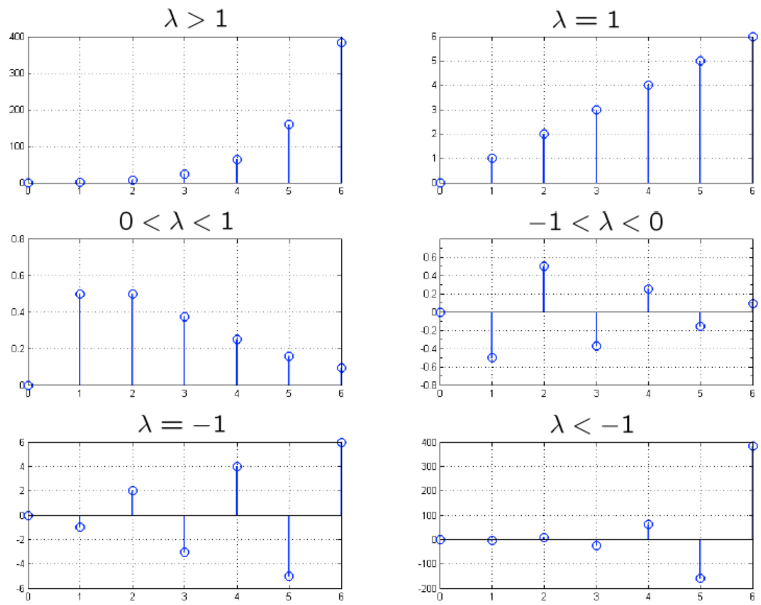
  **a)** $\lambda \in \mathbb{R}$ **autovalori semplici** (cioè $l$=1)



# Stabilità e analisi modale: tempo discreto - 1

- Studio qualitativo dei termini di tipo $\binom{k}{l-1}\lambda^{(k-l+1)}$

**a)** $\lambda \in \mathbb{R}$ **autovalori multipli (doppi)** (cioè $l$=2)

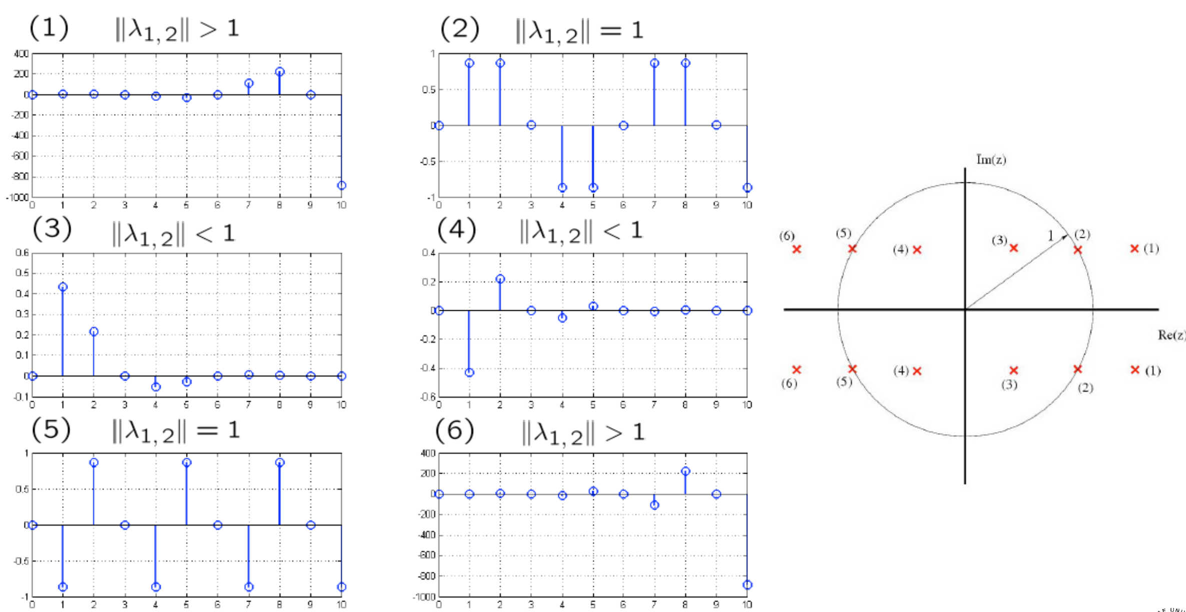





# Stabilità e analisi modale: tempo discreto - 2

- Studio qualitativo dei termini di tipo $\binom{k}{l-1}\lambda^{(k-l+1)}$

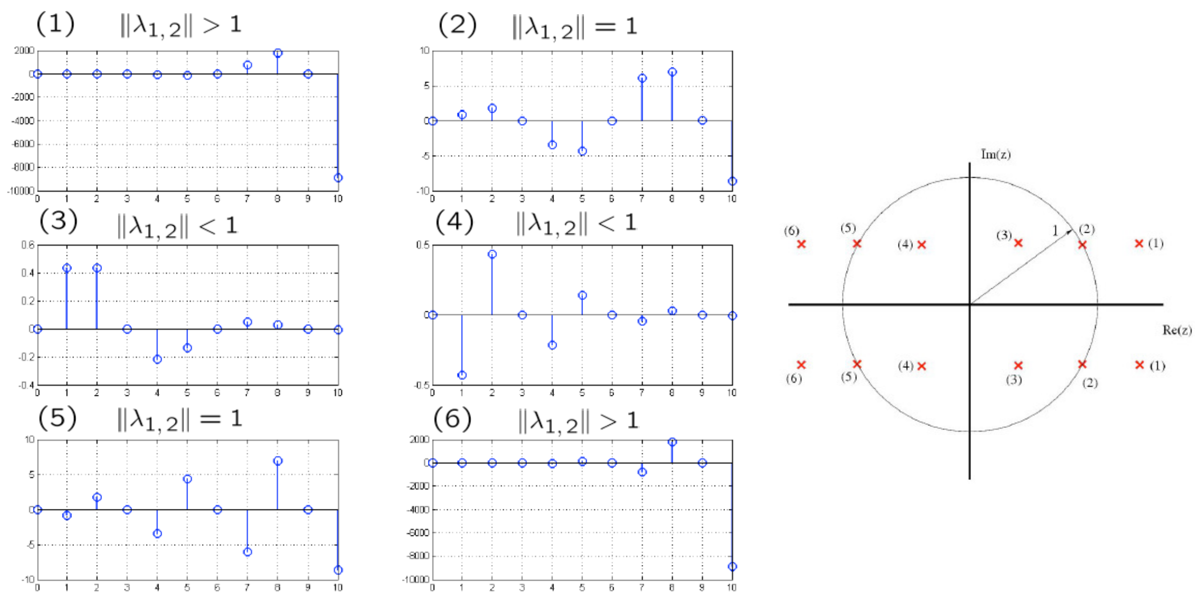
**b)** $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ **autovalori semplici** (cioè $l$=1)



## Stabilità e analisi modale: tempo discreto - 3

- Studio qualitativo dei termini di tipo $\binom{k}{l-1}\lambda^{(k-l+1)}$

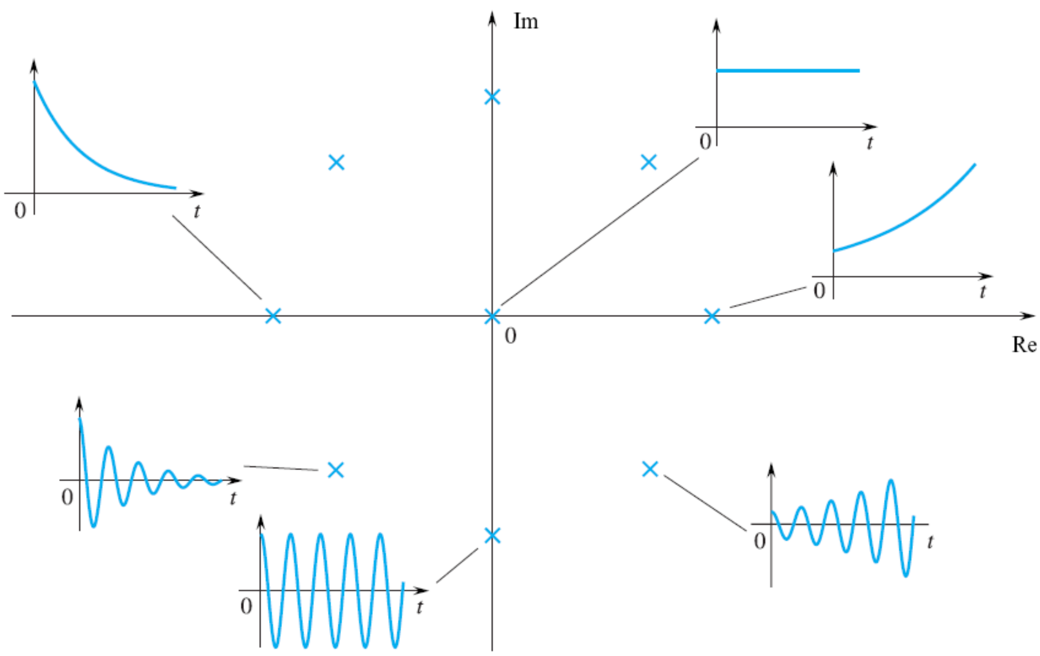
**b)** $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ **autovalori multipli (doppi)** (cioè $l$=2)





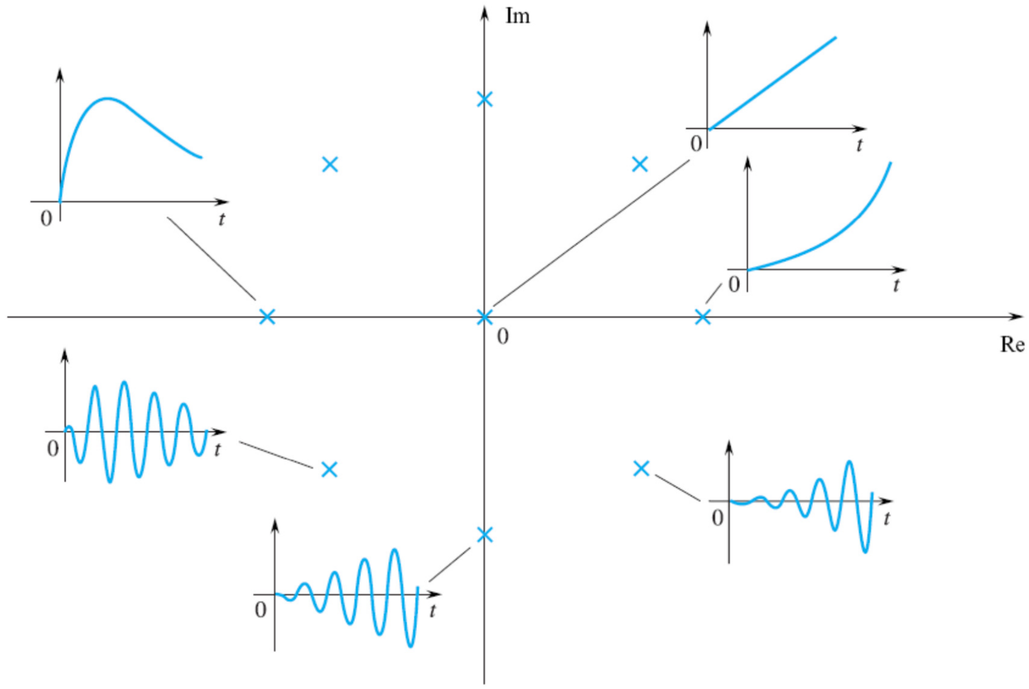

## Stabilità e analisi modale: nel piano complesso

- Mappa degli autovalori, caso <u>continuo</u> con molteplicità = 1:



# Stabilità e analisi modale: nel piano complesso - 1

- Mappa degli autovalori, caso continuo con molteplicità = 2:

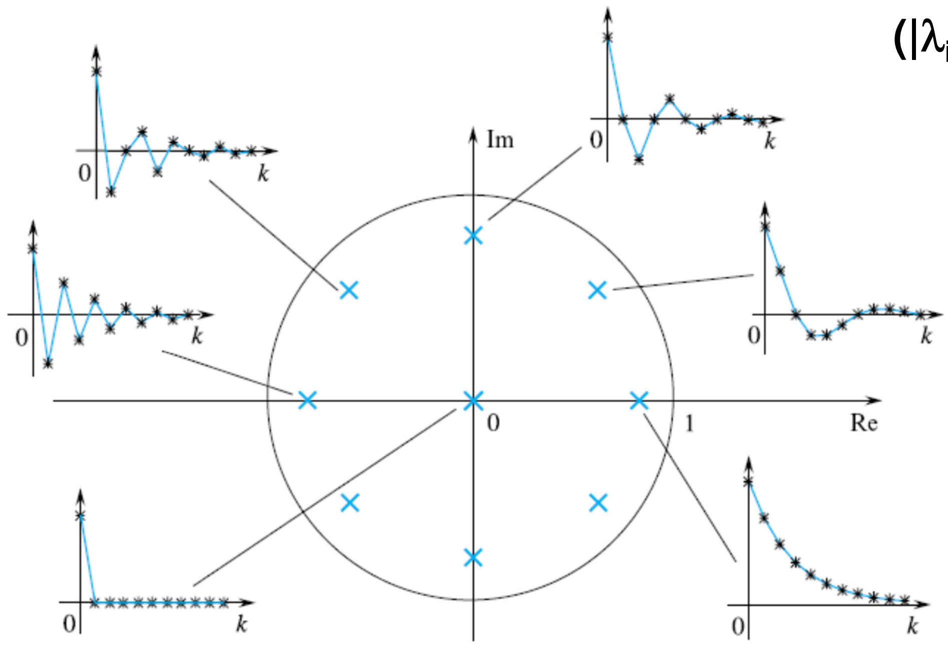





# Stabilità e analisi modale: nel piano complesso - 2

- Mappa degli autovalori, caso discreto con molteplicità = 1:

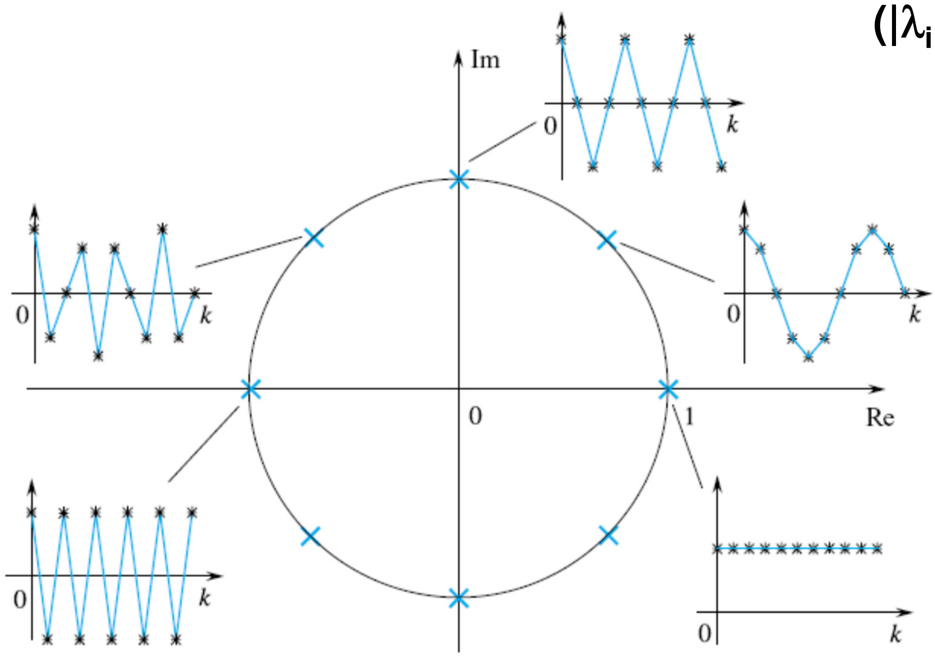
**($|\lambda_i| < 1$)**



## Stabilità e analisi modale: nel piano complesso - 3

- Mappa degli autovalori, caso discreto con molteplicità = 1:

**($|\lambda_i| = 1$)**

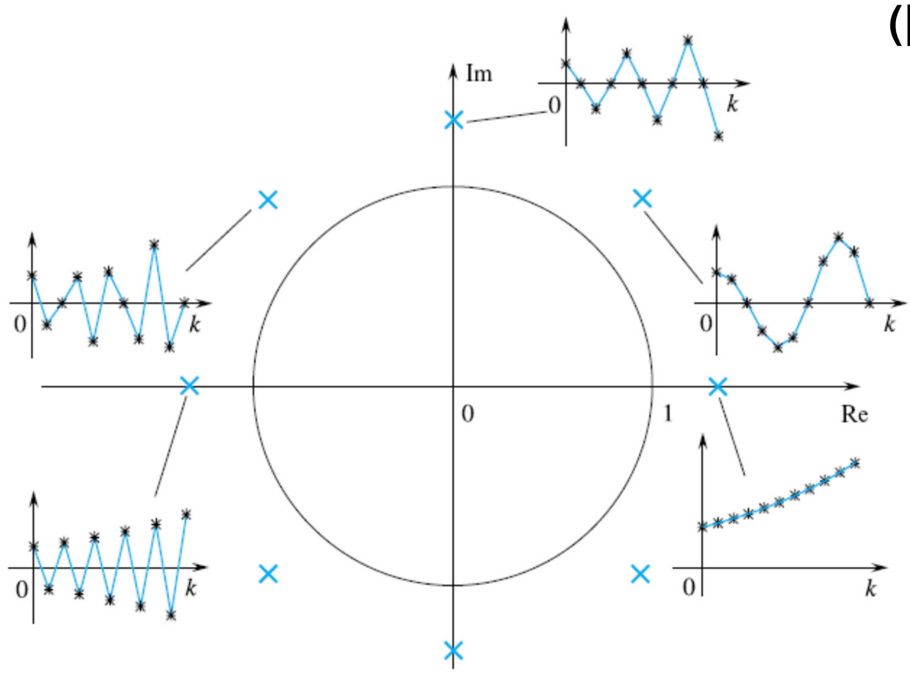





## Stabilità e analisi modale: nel piano complesso - 4

- Mappa degli autovalori, caso discreto con molteplicità = 1:

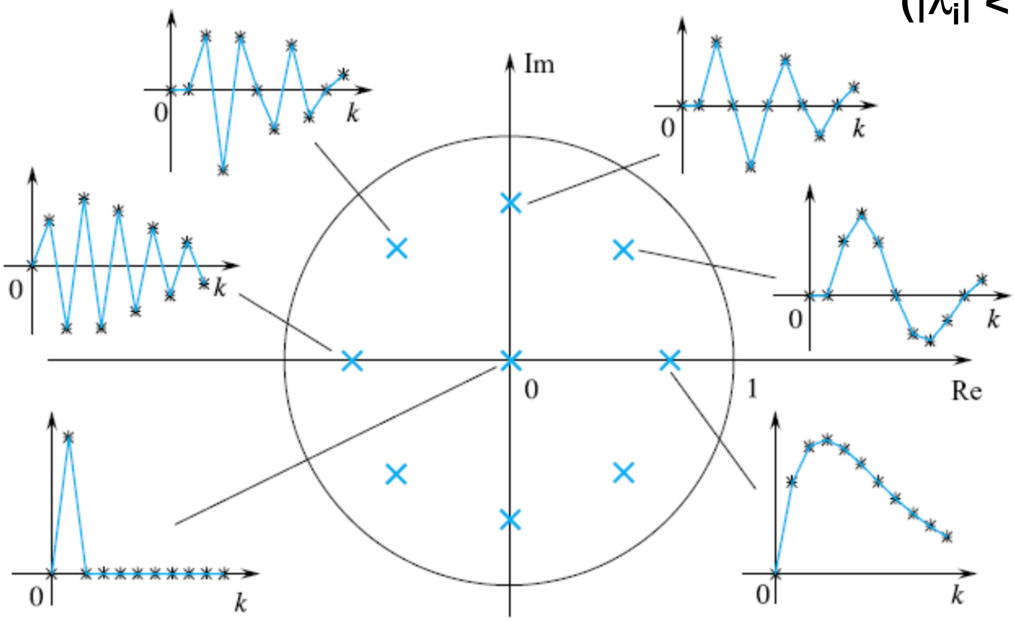
**($|\lambda_i| > 1$)**



## Stabilità e analisi modale: nel piano complesso - 5

- Mappa degli autovalori, caso <u>discreto</u> con molteplicità = 2:

**($|\lambda_i| < 1$)**



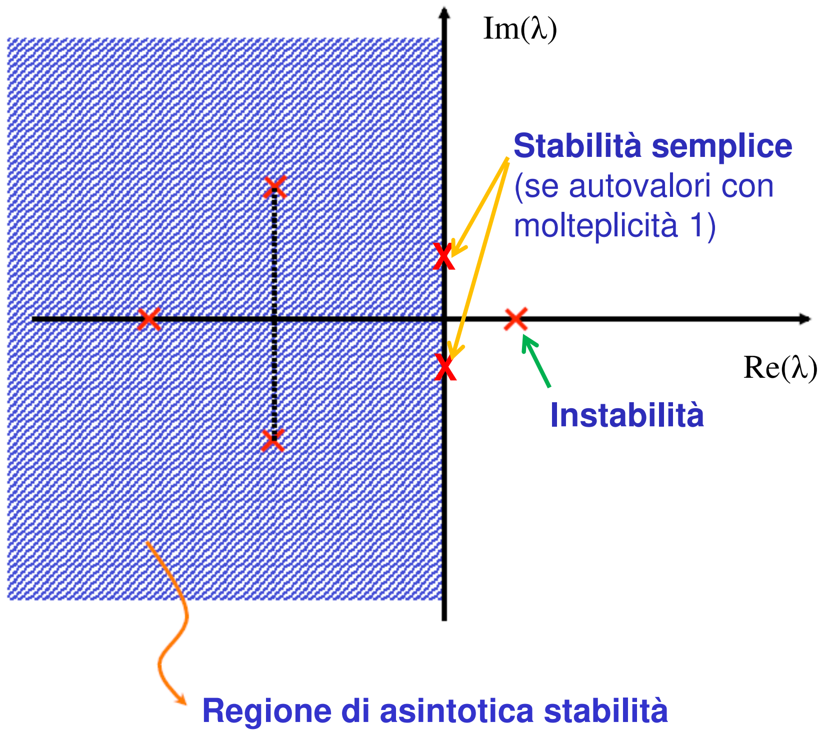



## Stabilità dei sistemi LTI (tempo continuo)

- **Teorema:** Un sistema LTI a tempo continuo è **semplicemente stabile** se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa o nulla, e quelli a parte reale nulla hanno molteplicità unitaria nel polinomio minimo di A

- **Teorema:** Un sistema LTI a tempo continuo è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa

# Stabilità dei sistemi LTI (tempo continuo) - 1



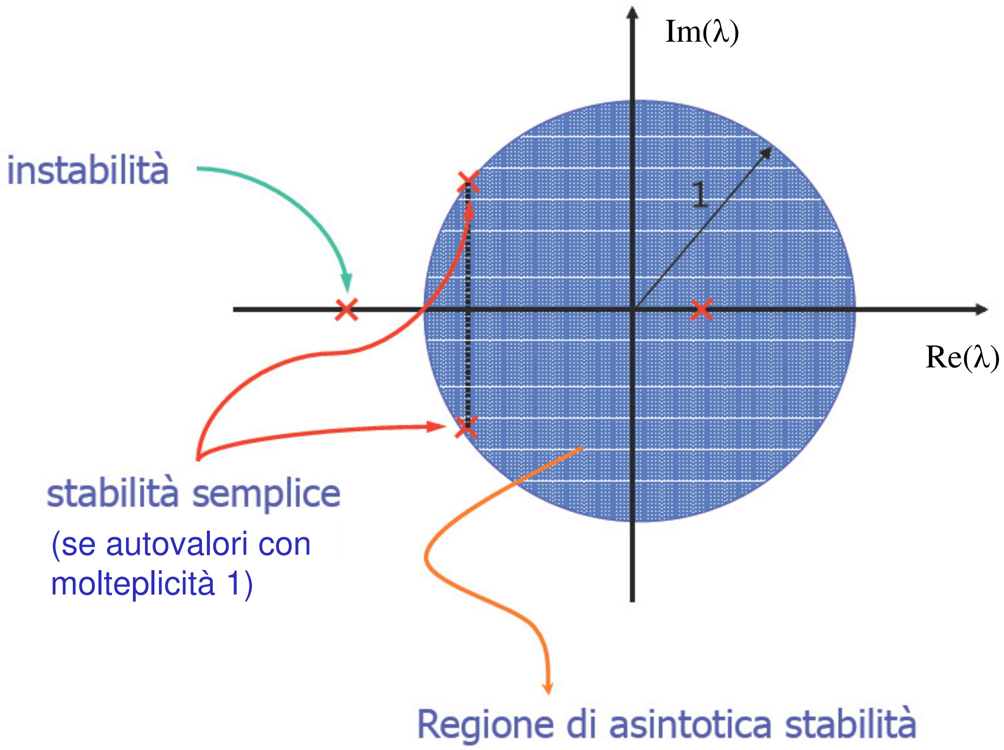



# Stabilità dei sistemi LTI (tempo discreto)

- **Teorema:** Un sistema LTI a tempo discreto è **semplicemente stabile** se e solo se tutti gli autovalori di A hanno modulo minore o uguale a 1, e quelli a modulo unitario hanno molteplicità unitaria nel polinomio minimo di A

- **Teorema:** Un sistema LTI a tempo discreto è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori di A hanno modulo minore di 1

# Stabilità dei sistemi LTI (tempo discreto) - 1





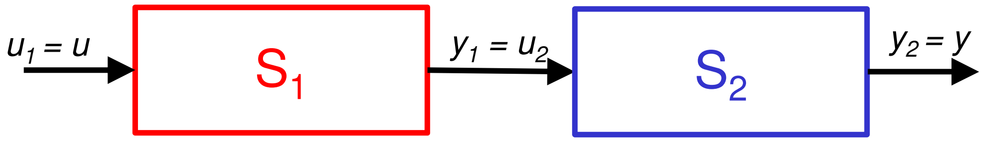

# Stabilità dei sistemi LTI interconnessi

- Grazie alle proprietà dei modelli LTI (es. sovrapposizione degli effetti), risulta relativamente agevole studiare la stabilità sistemi complessi, ma costituiti da più parti semplici interconnesse
- Le tipiche modalità di interconnessione sono:
  - **In cascata**: l'uscita di un sistema è l'ingresso di un altro
  - **In parallelo**: due sistemi hanno lo stesso ingresso

**N.B.:** l'interconnessione in retroazione di sistemi con modelli nello spazio degli stati è più complessa e non è qui trattata

## Stabilità dei sistemi LTI interconnessi - 1

- **Sistemi in cascata**:




$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \\ y_1(t) = C_1 x_1(t) + D_1 u_1(t) \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \\ y_2(t) = C_2 x_2(t) + D_2 u_2(t) \end{cases}$$

- Sistema ottenuto (<u>solo</u> variabili di stato):

$$S_c : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \\ \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 C_1 x_1(t) + B_2 D_1 u(t) \end{cases}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$$



## Stabilità dei sistemi LTI interconnessi - 2

- **Sistemi in cascata**: ai fini dell'analisi di stabilità, si può osservare che la matrice di stato ottenuta

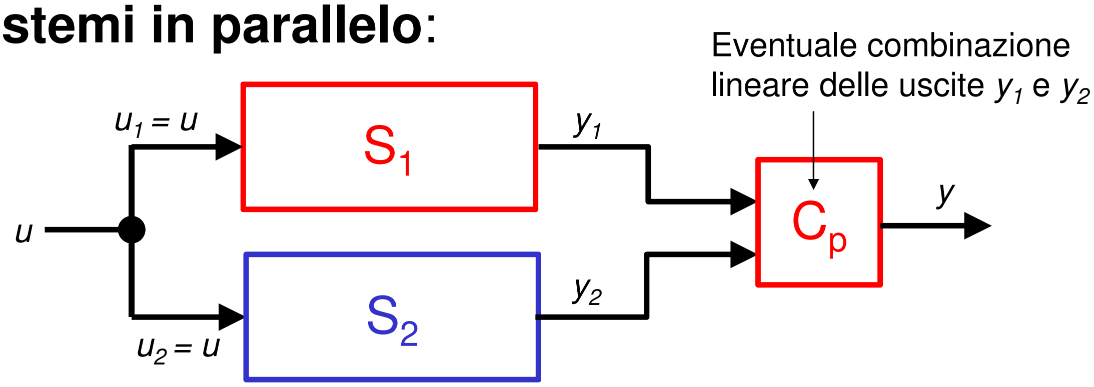
$$A_c = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}$$

è <u>triangolare a blocchi</u>, pertanto i suoi autovalori sono l'unione di quelli dei blocchi sulla diagonale, che coincidono con quelli dei due sistemi $S_1$ e $S_2$

**Teorema:** Il sistema LTI ottenuto come **cascata** di due sistemi LTI è asintoticamente stabile **se e solo se** lo sono entrambi i due sistemi interconnessi

# Stabilità dei sistemi LTI interconnessi - 3

- **Sistemi in parallelo**:




$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \\ y_1(t) = C_1 x_1(t) + D_1 u_1(t) \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \\ y_2(t) = C_2 x_2(t) + D_2 u_2(t) \end{cases}$$

$$S_p : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \\ \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u(t) \end{cases}$$

**N.B.**: <u>solo</u> variabili di stato



# Stabilità dei sistemi LTI interconnessi - 4

- **Sistemi in parallelo**: la matrice di stato non è altro che

$$A_p = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

la cui forma <u>diagonale a blocchi</u> evidenzia che gli autovalori sono anche in questo caso l'unione di quelli dei due sistemi $S_1$ e $S_2$

**Teorema:** Il sistema LTI ottenuto come **parallelo** di due sistemi LTI è asintoticamente stabile **se e solo se** lo sono entrambi i due sistemi interconnessi

## Proprietà strutturali dei sistemi LTI
## RAGGIUNGIBILITA' E CONTROLLABILITA'



## Raggiungibilità e controllabilità

- Sono proprietà di un sistema che descrivono la possibilità di influire sul suo moto ***x(.)*** agendo opportunamente sulla funzione di ingresso ***u(.)***
- Tali proprietà sono **strutturali**, cioè **NON** dipendono dalla rappresentazione (scelta delle variabili di stato)
- Inoltre, **NON** sono modificabili tramite il controllo
- **Analisi** di Raggiungibilità / controllabilità:
  – Applicazione diretta: pianificazione dell'azione di controllo in catena aperta
  – Conseguenze: proprietà in catena chiusa

## Raggiungibilità (partendo da $x(t_0)=x_0$, arrivare a… ??)

**[Def.]** Lo stato $x_1$ di un sistema dinamico è **raggiungibile** da $x_0$ nell'intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ (con $t_0 < t_1$) se esiste una funzione di ingresso $u(.)\in \boldsymbol{U_f}$ tale che:

$$x_1 = x(t_1) = \phi(t_1, t_0, \underbrace{x(t_0)}_{x_0}, u(\cdot))$$

**L'insieme degli stati raggiungibili** all'istante $t_1$ a partire dall'evento $(t_0,x_0)$ è indicato con

$$\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x_0)$$



## Controllabilità (arrivare a $x(t_1)=x_1$, partendo da… ??)

**[Def.]** Lo stato $x_0$ di un sistema dinamico è **controllabile** a $x_1$ nell'intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ (con $t_0 < t_1$) se esiste una funzione di ingresso ammissibile $u(.)\in \boldsymbol{U_f}$ tale che:

$$x_1 = x(t_1) = \phi(t_1, t_0, \underbrace{x(t_0)}_{x_0}, u(\cdot))$$

**L'insieme degli stati controllabili** all'evento $(t_1,x_1)$ a partire dall'istante $t_0$ è indicato con

$$\mathcal{R}^-(t_0, t_1, x_1)$$

## Raggiungibilità e controllabilità

**Per estensione:**

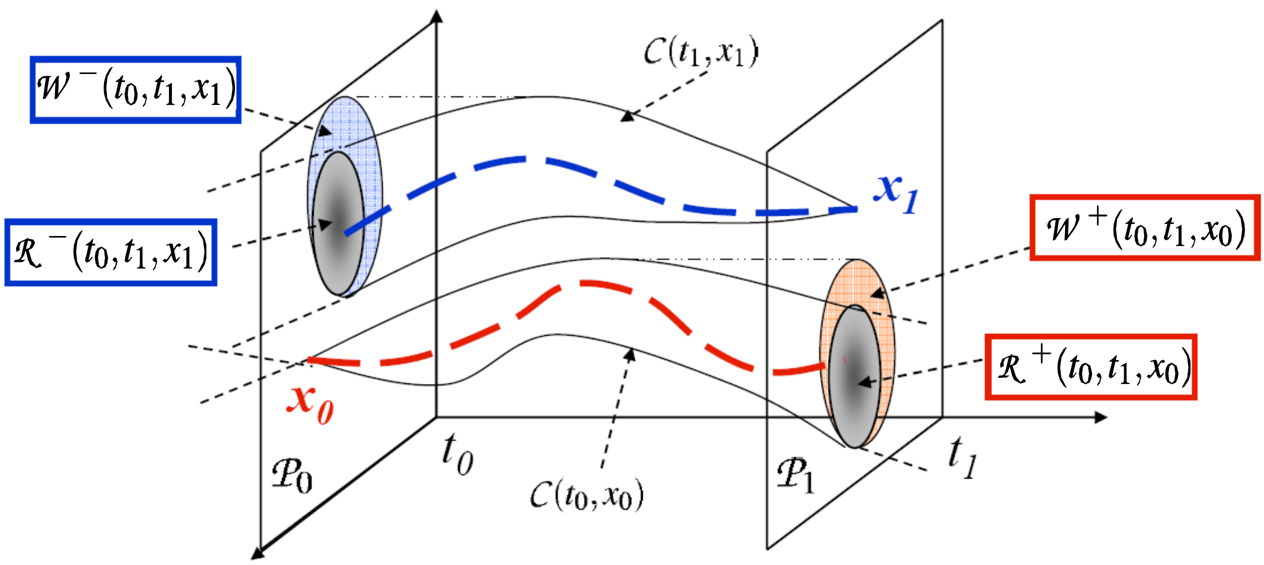
**L'insieme degli stati raggiungibili** in un istante t qualunque dell'intervallo $[t_0,t_1]$ a partire dall'evento $(t_0,x_0)$ è indicato con $\mathcal{W}^+(t_0,t_1,x_0)$

**L'insieme degli stati controllabili** all'evento $(t_1,x_1)$ a partire da un istante t qualunque dell'intervallo $[t_0,t_1]$ è indicato con $\mathcal{W}^-(t_0,t_1,x_1)$



## Interpretazione geometrica

$C(t_1,x_1)$ e $C(t_0,x_0)$: insieme dei moti cui appartengono $(t_1,x_1)$ e $(t_0,x_0)$



## Raggiungibilità e controllabilità completa

- Un sistema si dice **completamente raggiungibile** dall'evento *($t_0$,x)* nell'intervallo di tempo [$t_0$,$t_1$] se

$$\mathcal{W}^+(t_0,t_1,x) = X$$

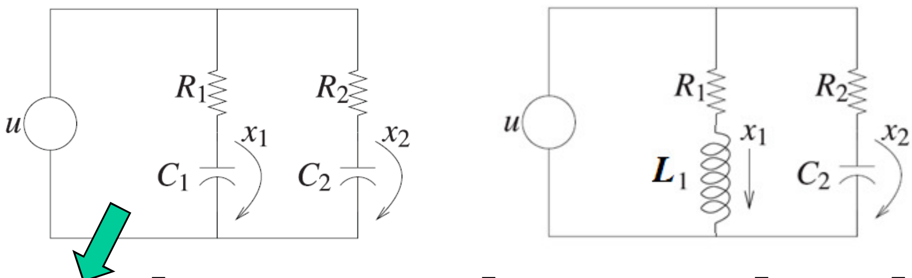
- Un sistema si dice **completamente controllabile** all'evento *($t_1$,x)* nell'intervallo di tempo [$t_0$,$t_1$] se

$$\mathcal{W}^-(t_0,t_1,x) = X$$



## Esempi: sistemi non completamente raggiungibili

1) Circuiti elettrici con rami in parallelo, per i quali sia $R_1$*$C_1$ = $R_2$*$C_2$ oppure $L_1$/$R_1$ = $R_2$*$C_2$

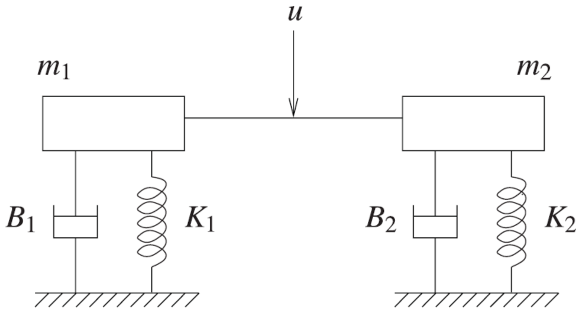



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} u(t)$$

E' impossibile portare l'origine verso qualunque condizione in cui sia $x_1(t) \neq x_2(t)$

## Esempi: sistemi non completamente raggiungibili - 1

2) Sistemi meccanici con strutture in parallelo, per i quali i parametri siano <u>perfettamente</u> bilanciati:




E' impossibile portare l'origine verso qualunque condizione in cui le posizioni dei due blocchi siano diverse!

**N.B.:** si vedrà nel seguito la formalizzazione di questa condizione



## Raggiungibilità e controllabilità nei sistemi LTI

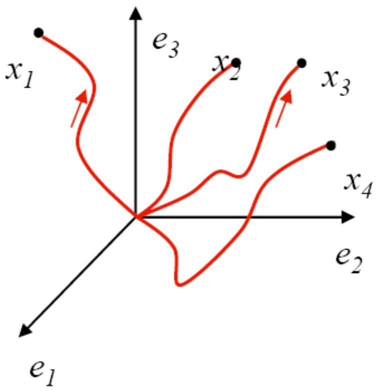
- Tali proprietà sono, come detto in precedenza, **strutturali** (**NON** dipendono dalla scelta delle variabili di stato) e **NON** sono modificabili tramite il controllo
- Per i sistemi LTI, si assume $\mathbf{t_0 = 0}$
- Per i sistemi LTI, si può considerare x = 0 come unico punto di interesse dell'analisi
- Si parla quindi di **raggiungibilità DALL'origine** e **controllabilità ALL'origine**

## Raggiungibilità e controllabilità complete

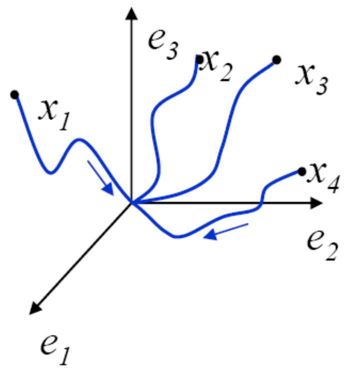
- Il sistema MIMO LTI t.continuo [t.discreto]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad [x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)]$$

È completamente raggiungibile se qualunque stato può essere raggiunto da x=0 in un tempo finito




È completamente controllabile se x=0 può essere raggiunto da qualunque stato in t finito






## Raggiungibilità e movimento forzato

- La possibilità di considerare x = 0 come unico punto di interesse nei sistemi LTI lega la raggiungibilità unicamente al **moto forzato**:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Tempo continuo

$$x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i)$$

Tempo discreto

## Raggiungibilità dei sistemi LTI discreti

- Insieme di stati **raggiungibili** in *k* passi per:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad x(0) = 0$$

$$\begin{array}{rcl} x(1) & = & Bu(0) \\ x(2) & = & Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1) \\ x(3) & = & Ax(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\ & \dots & \\ x(k) & = & \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}Bu(i) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{k-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \end{array}$$

- Perciò: $\mathcal{R}_k^+(0) = im\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{k-1}B \end{bmatrix}\}$

  = ***sottospazio*** **stati raggiungibili** in *k* passi



## Esempi

1) $$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\mathcal{R}_k^+(0) = im\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_3 & \dots & a_3^{k-1} \end{bmatrix}\} = span\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

2) Idem, ma con $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\mathcal{R}_2^+(0) = im\{\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\} = \mathbb{R}^2$$

## Raggiungibilità dei sistemi LTI discreti - 1

- L'insieme (o *sottospazio*) degli stati raggiungibili in *n* passi è anche l'insieme degli stati raggiungibili **dal sistema**
- Infatti, oltre gli *n* passi non è utile proseguire per via del teorema di Cayley-Hamilton, dal quale:

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1 A - a_0 I$$

- Si definisce ***sottospazio* raggiungibile**

$$\mathcal{R}^+(0) = im\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{n-1}B \end{bmatrix}\}$$



## Controllabilità dei sistemi LTI t.discreti

- Si consideri ancora $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ con l'obiettivo di controllare (a 0) un certo x(0)$\neq$0, in k passi:

$$0 = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}Bu(i) \quad \Rightarrow \quad -A^k x(0) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}Bu(i)$$

➔ x(0)$\neq$0 è controllabile in k passi se $-A^k x(0)$ è raggiungibile in k passi

$$A^k x(0) \in im\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{k-1}B \end{bmatrix}\} = \mathcal{R}_k^+(0)$$

## Raggiungibilità dei sistemi LTI continui

- Analogamente, per determinare gli stati **raggiungibili** di $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, si fa riferimento al moto forzato:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A\tau} Bu(t-\tau) d\tau$$

- Dal teorema di Cayley-Hamilton si può esprimere:

$$e^{A\tau} = I\gamma_0(\tau) + A\gamma_1(\tau) + \cdots + A^{n-1}\gamma_{n-1}(\tau)$$

con $\gamma_i(\tau)$ opportune funzioni scalari



## Raggiungibilità dei sistemi LTI continui - 1

- Si può quindi espandere l'espressione del moto forzato, ottenendo una combinazione lineare di termini (integrali di convoluzione tra ingresso e $\gamma_i(\tau)$ ) con coefficienti ***B***, ***AB***, ***A²B***, ecc.:

$$x(t) = B\int_0^t \gamma_0(\tau)u(t-\tau)d\tau + AB\int_0^t \gamma_1(\tau)u(t-\tau)d\tau + \cdots +$$
$$+ A^{n-1}B\int_0^t \gamma_{n-1}(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

- Pertanto, gli stati raggiungibili sono ancora un sottospazio generato da $\left[B \quad AB \quad A^2B \ \ldots \ A^{n-1}B\right]$

## Controllabilità dei sistemi LTI continui

- Per $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ uno stato x(0) $\neq$ 0 è **controllabile** (a 0) al tempo *t* se esiste una funzione di ingresso ammissibile u(.) tale che:

$$0 = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

ovvero $-x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$

perciò si possono applicare considerazioni analoghe a quelle viste in precedenza



## Matrice di raggiungibilità

- **[Def.]** Si definisce **matrice di raggiungibilità** di un sistema LTI la matrice di dimensione [n x (n r)]

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

- **Teorema:** Il sistema è **completamente raggiungibile e completamente controllabile** se e solo se:

$$rango(P) = n$$

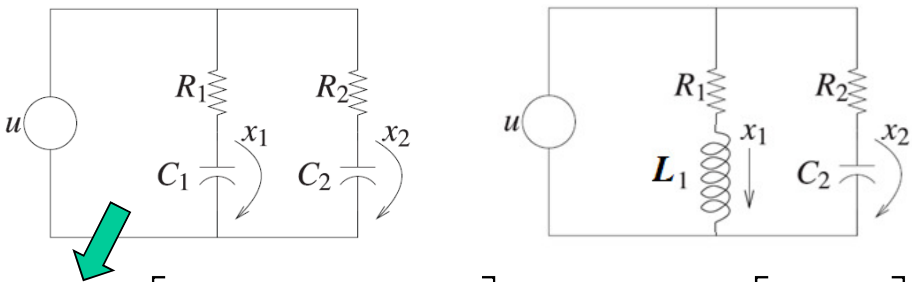
## Matrice di raggiungibilità

- **Osservazioni**:
  - Le proprietà di raggiungibilità e controllabilità coincidono per sistemi LTI tempo continui, ma **NON** coincidono in generale per tutte le classi di sistemi dinamici
  - In alcuni testi, soprattutto in lingua inglese, per via del fatto che per sistemi LTI continui vale tale coincidenza, la matrice di raggiungibilità è chiamata (impropriamente) matrice di controllabilità
  - Per tale motivo, in molti programmi di calcolo numerico (es. Matlab® di Mathworks Inc.), che supportino il progetto di controlli automatici, la funzione per calcolare tale matrice è chiamata: `P=ctrb(A,B)`



## Esempi: sistemi non completamente raggiungibili

1) Circuiti elettrici con rami in parallelo, per i quali sia $R_1 * C_1 = R_2 * C_2$ oppure $L_1/R_1 = R_2 * C_2$




$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} u(t)$$

E’ impossibile portare l’origine verso qualunque condizione in cui sia $x_1(t) \neq x_2(t)$

## Esempi: sistemi non completamente raggiungibili - 1

1) **PROVA**: ponendo $R_1*C_1 = R_2*C_2 = 1$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il rango di $P$ è 1 < 2 (la seconda colonna $AB$ = -$B$, quindi lin. dipendente dalla prima colonna), pertanto il sistema **NON** è completamente raggiungibile e controllabile



## Esempi: sistemi non completamente raggiungibili - 2

1) **NOTA**: scegliendo come variabili di stato (sempre con $R_1*C_1 = R_2*C_2 = 1$):

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$ (i.e. $z = T^{-1}x \quad \text{con} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$)

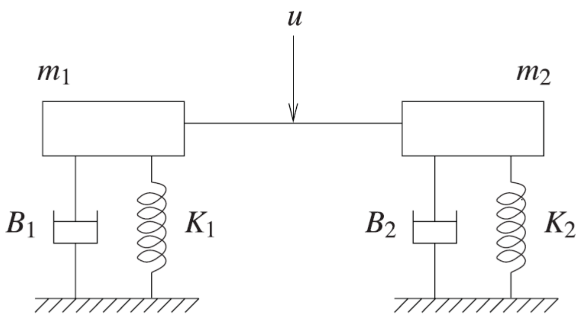
Le equazioni dinamiche diventano:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1 + 2u \\ \dot{z}_2 &= -z_2 \end{aligned}}$$

dalle quali si può facilmente capire che la variabile $z_2$ dipende solo da sé stessa e quindi non c'è alcuna possibilità di influenzarla tramite l'ingresso!

# Esempi: sistemi non completamente raggiungibili - 4

2) Sistemi meccanici con strutture in parallelo, per i quali i parametri siano <u>perfettamente</u> bilanciati:




E' impossibile portare l'origine verso qualunque condizione in cui le posizioni dei due blocchi siano diverse!



# Esempi: sistemi non completamente raggiungibili - 5

2) **PROVA**: normalizzando a 1 tutti i parametri del modello:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{2m_1} \\ 0 \\ \frac{1}{2m_2} \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$x := \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & x_1 & \dot{x}_2 & x_2 \end{bmatrix}^T,$$

Si ottiene che il rango di $P$ è $2 < 4$

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

# Esempi: sistemi non completamente raggiungibili - 6

2) **NOTA**: la matrice *P* ha rango 2 perché:

- le prime due colonne sono indipendenti
- la terza colonna corrisponde alla somma delle prime due moltiplicate entrambe per -1
- la quarta colonna è uguale alla prima!!

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{array}{cccc} & & & \\ \left[\begin{matrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 \leftrightarrow & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 \leftrightarrow & 1/2 & -1/2 & 0 \end{matrix}\right] \\ p_1 \quad\quad p_2 \quad\quad -p_1-p_2 \quad\quad \boxed{p_4=p_1} \end{array}$$



# Raggiungibilità come proprietà strutturale

- Come detto, rappresentazioni equivalenti, per le quali cioè sia $x = Tz \iff z = T^{-1}x$:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= T^{-1}AT \\ \hat{B} &= T^{-1}B \end{aligned}$$

hanno le stesse proprietà di raggiungibilità:

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \hat{A}^2\hat{B} \dots \hat{A}^{n-1}\hat{B} \end{bmatrix} \\ &= T^{-1}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{n-1}B \end{bmatrix} \\ &= T^{-1}P \end{aligned}$$

in quanto la trasformazione non influisce sul rango della matrice di raggiungibilità

# Proprietà strutturali dei sistemi LTI
# OSSERVABILITA' E RICOSTRUIBILITA'



## Osservabilità e ricostruibilità

- Sono proprietà di un sistema che descrivono la possibilità di determinare lo stato iniziale $x(t_0)$ o finale $x(t_1)$ di un sistema dalla conoscenza del comportamento ingresso-uscita $u[t_0,t_1]$, $y[t_0,t_1]$
- Anche tali proprietà sono **strutturali**, cioè **NON** dipendono dalla rappresentazione (scelta dello stato), **ma** possono essere influenzate dal controllo
- **Analisi** di osservabilità / ricostruibilità:
  - Applicazione: progetto di algoritmi di stima e ricostruzione dello stato

## Osservabilità (relazione tra stato iniziale $x(t_0)=x_0$ e $u(.)/y(.)$)

**[Def.]** Lo stato $x_0$ di un sistema dinamico è **compatibile** con le funzioni di ingresso *u(.)* e uscita *y(.)* nell'intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ $(t_0<t_1)$ se:

$$y(\tau)=\gamma(\tau,t_0,\underbrace{x(t_0)}_{x_0},u(\cdot)) \qquad \forall\tau\in[t_0,t_1]$$

**L'insieme degli stati iniziali compatibili** con u(.) e *y(.)* nell'intervallo $[t_0,t_1]$ è indicato con

$$\mathcal{E}^-(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot))$$



## Ricostruibilità (relazione tra stato finale $x(t_1)=x_1$ e $u(.)/y(.)$)

**[Def.]** Lo stato $x_1$ di un sistema dinamico è **compatibile** con le funzioni di ingresso *u(.)* e uscita *y(.)* nell'intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ $(t_0<t_1)$ se:

$$x(t_1)=x_1=\phi(t_1,t_0,x(t_0),u(\cdot)) \quad x(t_0)\in\mathcal{E}^-(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot))$$

**L'insieme degli stati finali compatibili** con *u(.)* e *y(.)* nell'intervallo $[t_0,t_1]$ è indicato con

$$\mathcal{E}^+(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot))$$

## Osservabilità e ricostruibilità complete

- Se l'insieme $\mathcal{E}^{-}(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$ comprende un unico elemento, per qualunque funzione di ingresso $u(.) \in \boldsymbol{U_f}$ e di uscita $y(.) \in \boldsymbol{Y_f}$, il sistema è **completamente osservabile**
- Analogamente, se $\mathcal{E}^{+}(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$ comprende un unico elemento, per qualunque funzione di ingresso $u(.) \in \boldsymbol{U_f}$ e di uscita $y(.) \in \boldsymbol{Y_f}$, il sistema è **completamente ricostruibile**



## Osservabilità e ricostruibilità complete - 1

Formalmente, si possono dare le **[Definizioni]:**

- Un sistema si dice **completamente osservabile** in $[t_0,t_1]$ se la conoscenza del comportamento ingresso-uscita $u[t_0,t_1]$, $y[t_0,t_1]$ consente di determinare univocamente lo stato iniziale $\boldsymbol{x(t_0)}$ per ogni $u[t_0,t_1]$
- Un sistema si dice **completamente ricostruibile** in $[t_0,t_1]$ se la conoscenza del comportamento ingresso-uscita $u[t_0,t_1]$, $y[t_0,t_1]$ consente di determinare univocamente lo stato finale $\boldsymbol{x(t_1)}$ per ogni $u[t_0,t_1]$

## Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI

- Per i sistemi LTI, si può considerare solo **$t = t_1 - t_0$**
- Per i sistemi LTI, si possono considerare solo le proprietà della **risposta libera** per capire se il sistema sia osservabile (è possibile determinare lo stato iniziale) e ricostruibile (è possibile determinare lo stato finale)
- Poiché noto lo stato iniziale è possibile calcolare il corrispondente stato finale, la completa osservabilità **implica** la completa ricostruibilità



## Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI - 1

- Per risolvere il problema di osservabilità, si può considerare il sistema libero:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

- L'obiettivo è calcolare lo stato conoscendo l'uscita, operazione immediata se C è invertibile:

$$x(t) = C^{-1}y(t)$$

- Se C non è invertibile, si può cercare una relazione invertibile derivando l'uscita, perché:

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t)$$

## Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI - 2

- L'operazione di derivata sull'uscita si può ripetere fino all'ordine *n*-1, sempre con l'obiettivo di ricavare una relazione invertibile uscita-stato:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(t)$$

- Ovviamente, per il teorema di Cayley-Hamilton **NON** è utile proseguire oltre l'ordine *n*-1



## Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI - 3

- In modo analogo, per sistemi discreti si può esprimere la possibilità di osservazione dello stato iniziale analizzando le uscite dei primi *n*-1 passi:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0)$$

- Ovviamente, per il teorema di Cayley-Hamilton **NON** è utile proseguire oltre il passo *n*-1

## Matrice di osservabilità

- **[Def.]** Si definisce **matrice di osservabilità** di un sistema LTI la matrice di dimensione [n x (n m)]

$$Q = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \ldots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

o equivalentemente:

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \ldots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}$$

- **Teorema:** Il sistema è **completamente osservabile e completamente ricostruibile** se e solo se:

$$rango(Q^T) = n$$

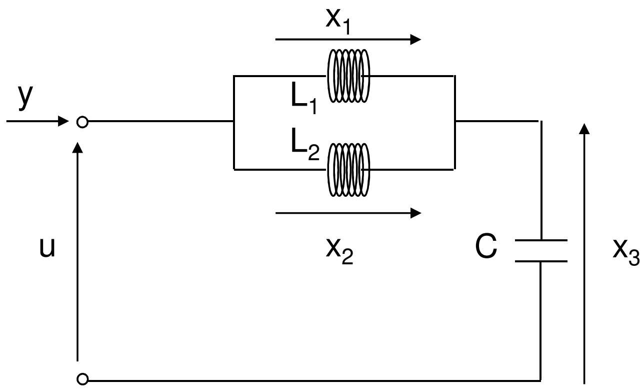


## Matrice di osservabilità

- **Osservazioni**:
  – Anche le proprietà di osservabilità e ricostruibilità coincidono per i sistemi LTI, in base alle proprietà della matrice di osservabilità (che nessun testo chiama matrice di ricostruibilità)
  – Nella maggior parte dei programmi di calcolo numerico (es. Matlab® di Mathworks Inc.), che supportino il progetto di controlli automatici, la funzione per calcolare tale matrice è chiamata: `Q=obsv(A,C)`
  – Nella slide precedente la matrice è introdotto in forma trasposta per renderne l'analisi del rango analoga a quella della matrice di raggiungibilità (i.e. costruzione e relativa verifica di lineare indipendenza *per colonne*!)

# Esempio: sistema non completamente osservabile

- Nel circuito elettrico mostrato, dal comportamento **ingresso-uscita** non è possibile distinguere stati per i quali valga inizialmente $x_1 + x_2 = 0$ (corrente che ricircola nella maglia delle due induttanze)






# Esempio: sistema non completamente osservabile-1

- Il modello matematico è infatti:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t) \end{cases}$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) \\ 1 & 0 & -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) \\ 0 & -\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

- Il rango di $Q^T$ è $2 < 3$

## Osservabilità come proprietà strutturale

- Come detto, rappresentazioni equivalenti, per le quali cioè sia $x = Tz \iff z = T^{-1}x$ :

$$\begin{aligned} \hat{A} &= T^{-1}AT \\ \hat{C} &= CT \end{aligned}$$

hanno le stesse proprietà di osservabilità:

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \left[\hat{C} \quad \hat{C}\hat{A} \quad \hat{C}\hat{A}^2 \ldots \hat{C}\hat{A}^{n-1}\right]^T \\ &= \left[C \quad CA \quad CA^2 \ldots CA^{n-1}\right]^T T \\ &= QT \end{aligned}$$

in quanto la trasformazione non influisce sul rango della matrice di osservabilità



**ANALISI DEI SISTEMI DINAMICI**
**- Definizioni**
**- Stabilità**
**- Soluzione di sistemi lineari stazionari**
**- Stabilità dei sistemi lineari stazionari**
**- Proprietà strutturali:**
**raggiungibilità-controllabilità e**
**osservabilità-ricostruibilità**

**FINE**