



Fondamenti di Automatica

Risposte canoniche e sistemi elementari

Prof. Marcello Bonfè

Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara

Tel. +39 0532 974839

E-mail: marcello.bonfe@unife.it



Università degli Studi di Ferrara



Risposte canoniche e sistemi elementari ANTITRASFORMAZIONE di FUNZIONI RAZIONALI



Antitrasformazione di funzioni di trasferimento

- ➔ Data la funzione razionale ($n \geq m$):

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

- ➔ Le radici di $D(s)$ sono i **poli della funzione $F(s)$**
- ➔ Le radici di $N(s)$ sono gli **zeri della funzione $F(s)$**
- ➔ La differenza $r = n - m$ è il **grado relativo di $F(s)$**
- ➔ La fisica realizzabilità corrisponde a $r \geq 0$
- ➔ Se la funzione di trasferimento di un sistema ha grado relativo r , l'uscita è influenzata dall'ingresso solo a partire dalla sua derivata di ordine r

slide 3

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Antitrasformazione di funzioni di trasferimento - 1

- ➔ **Se la $F(s)$ ha grado relativo $r = 0$** , si può facilmente scomporre un termine costante (la cui antitrasformata è la stessa costante per un impulso di Dirac). Es.:

$$F(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 5} = 3 - \frac{4s + 14}{s^2 + 2s + 5}$$

- ➔ **Se $r > 0$** e i poli di $F(s)$ sono tutti distinti, **allora** la funzione si può **scomporre in fratti semplici**:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - p_i}$$

slide 4

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Antitrasformazione di funzioni di trasferimento - 2

- ➔ Nella scomposizione in fratti semplici di $F(s)$ ogni termine k_i si chiama **residuo di $F(s)$ nel polo p_i** , e risulta:

$$k_i = \left[(s - p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \right]_{s \rightarrow p_i}$$

- ➔ Dopo la scomposizione, **l'antitrasformata di $F(s)$** è:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t}$$

- ➔ **NOTA:** Se $F(s)$ è la funzione di trasferimento di un sistema (i.e. di solito indicata con $G(s)$), l'antitrasformata è la **risposta impulsiva $W(t)$** .

slide 5

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Antitrasformazione di funzioni di trasferimento - 3

- ➔ Se i poli non sono tutti distinti, cioè si ha una $F(s)$ (con $\sum_{i=1}^h n_i = n$):

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - p_1)^{n_1} (s - p_2)^{n_2} \dots (s - p_h)^{n_h}}$$

si dice che i poli sono *multipli* con molteplicità n_i

- ➔ **La scomposizione in fratti semplici** diventa:

$$F(s) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^{n_i} \frac{k_{ij}}{(s - p_i)^{n_i - j + 1}}$$

slide 6

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Antitrasformazione di funzioni di trasferimento - 3a

► I residui di $F(s)$ risultano in tal caso:

$$k_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[(s-p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \right] \right\}_{s \rightarrow p_i}$$

► L'antitrasformata di $F(s)$ risulta:

$$f(t) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^{n_i} \frac{k_{ij} t^{n_i-j} e^{p_i t}}{(n_i-j)!}$$

slide 7

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Antitrasformazione di funzioni di trasferimento - 4

► Generalizzando i risultati precedenti, si può osservare che, indipendentemente dai relativi coefficienti costanti, l'antitrasformata di una $F(s)$ razionale è composta da termini, detti **modi di $F(s)$** , del tipo:

$$e^{p_1 t}, t e^{p_1 t}, \dots, t^{n_1-1} e^{p_1 t}, \dots, e^{p_h t}, \dots, t^{n_h-1} e^{p_h t}$$

NOTARE l'analogia con i modi degli autovalori di un modello ingresso-stato-uscita (v. slide 66 in FdA-1.3)

slide 8

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Antitrasformazione di funzioni di trasferimento - 5

- Si noti che per ogni **polo complesso** di $F(s)$, sarà sempre presente anche il relativo coniugato
- Anche i residui per tali poli sono complessi:

$$\frac{k_1}{s-p_1} + \frac{\bar{k}_1}{s-\bar{p}_1} = \frac{u_1 + jv_1}{s - (\sigma_1 + j\omega_1)} + \frac{u_1 - jv_1}{s - (\sigma_1 - j\omega_1)}$$

- Ponendo: $\frac{M_1}{2} = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$, $\varphi_1 = \arg(u_1 + jv_1)$

$$\rightarrow \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{\bar{k}_1}{s-\bar{p}_1} = \frac{M_1}{2} \left(\frac{e^{j\varphi_1}}{s - (\sigma_1 + j\omega_1)} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{s - (\sigma_1 - j\omega_1)} \right)$$

slide 9

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Antitrasformazione di funzioni di trasferimento - 6

- Pertanto l'antitrasformata dei fratti corrispondenti a poli complessi:

$$f_1(t) = \frac{M_1}{2} \left(e^{\sigma_1 t + j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{\sigma_1 t - j(\omega_1 t + \varphi_1)} \right)$$

- Applicando la formula di Eulero:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= M_1 e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ &= M_1 e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

slide 10

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Antitrasformazione: primo esempio

► Poli semplici reali: $F(s) = \frac{s-6}{s^3+5s^2+6s}$
($p_1 = 0, p_2 = -2, p_3 = -3$)

$$F(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+3}$$

$$k_1 = [sF(s)]_{s \rightarrow 0} = -1$$

$$k_2 = [(s+2)F(s)]_{s \rightarrow -2} = 4$$

$$k_3 = [(s+3)F(s)]_{s \rightarrow -3} = -3$$

➡ $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -1 + 4e^{-2t} - 3e^{-3t}$

slide 11

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Antitrasformazione: secondo esempio

► Poli multipli reali: $F(s) = \frac{s+3}{s(s+2)^3}$
($p_1 = 0, p_2 = -2$)

$$F(s) = \frac{k_{11}}{s} + \frac{k_{23}}{s+2} + \frac{k_{22}}{(s+2)^2} + \frac{k_{21}}{(s+2)^3}$$

$$k_{11} = [sF(s)]_{s \rightarrow 0} = \frac{3}{8}$$

$$k_{23} = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{ds^2} ((s+2)^3 F(s)) \right]_{s \rightarrow -2} = -\frac{3}{8}$$

$$k_{22} = \left[\frac{d}{ds} ((s+2)^3 F(s)) \right]_{s \rightarrow -2} = -\frac{3}{4}$$

$$k_{21} = [(s+2)^3 F(s)]_{s \rightarrow -2} = -\frac{1}{2}$$

➡ $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{3}{8} - \frac{3}{8}e^{-2t} - \frac{3}{4}te^{-2t} - \frac{1}{4}t^2e^{-2t}$

slide 12

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Antitrasformazione: terzo esempio

► Poli semplici complessi: $F(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 13}$

$$(p_1 = -2 \pm j3)$$

$$F(s) = \frac{k_1}{s + 2 - j3} + \frac{\bar{k}_1}{s + 2 + j3}$$

$$k_1 = [(s + 2 - j3)F(s)]_{s \rightarrow -2 + j3} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{3}$$

$$\frac{M_1}{2} = \frac{\sqrt{13}}{6}, \quad \varphi_1 = \arctan \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{\sqrt{13}}{3} e^{-2t} \cos\left(3t + \arctan \frac{2}{3}\right)$$

slide 13

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Analisi modale di funzioni di trasferimento

- I poli della funzione di trasferimento di un sistema, espressa con $F(s)$ razionale, hanno ruolo analogo a quello degli autovalori di A in un modello ingresso-stato-uscita (stabilità del sistema)
- Infatti l'antitrasformata di $F(s)$ (con grado relativo $r > 0$):
 - tende a 0 per $t \rightarrow \infty$ se tutti i suoi poli hanno **parte reale negativa**
 - è limitata se **non ha** poli a **parte reale positiva** e quelli a **parte reale nulla** sono **semplici**
 - tende a ∞ per $t \rightarrow \infty$ se ha poli a **parte reale positiva** (**positiva**) (o a parte reale nulla ma non semplici)

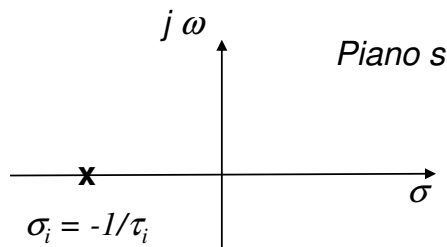
slide 14

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Funzioni di trasferimento: termini elementari

- Per semplificare l'antitrasformazione si usa definire tabelle di termini elementari, espressi inoltre in modo da evidenziare opportuni parametri caratteristici
- Es.: polo reale $p_i = \sigma_i$, ($\sigma_i \neq 0$)



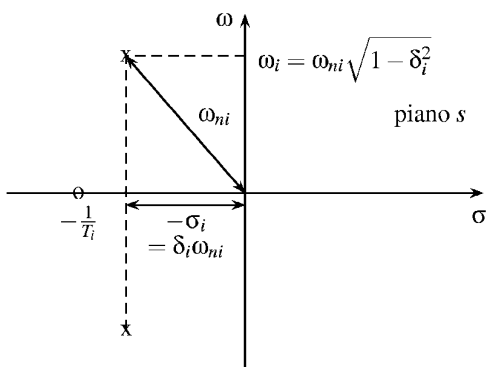
$$\frac{k_i}{s - \sigma_i} = \frac{k'_i}{1 + \tau_i s}, \quad \text{con } \tau_i = -1/\sigma_i$$

$$k'_i = -\frac{k_i}{\sigma_i}$$

τ_i è detta **costante di tempo**

Funzioni di trasferimento: termini elementari - 1

- Es.: coppia di poli complessi



$$\frac{u_i + j v_i}{s - \sigma_i - j \omega_i} + \frac{u_i - j v_i}{s - \sigma_i + j \omega_i} = 2 \frac{u_i (s - \sigma_i) - v_i \omega_i}{s^2 - 2 \sigma_i s + \sigma_i^2 + \omega_i^2}$$



$$\frac{k'_i (\sigma_i^2 + \omega_i^2) (1 + T_i s)}{(s - \sigma_i)^2 + \omega_i^2} = \frac{k'_i \omega_{ni}^2 (1 + T_i s)}{s^2 + 2 \delta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2}$$

$$\omega_{ni} = \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}$$

$$\delta_i = -\frac{\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}}$$

$$k'_i = -2 \frac{u_i \sigma_i + v_i \omega_i}{\sigma_i^2 + \omega_i^2}$$

$$T_i = -\frac{u_i}{u_i \sigma_i + v_i \omega_i}$$

Funzioni di trasferimento: termini elementari - 2

- Nell'ipotesi che lo zero del denominatore non sia presente (i.e. $T_i=0$), caso più tipico, si considera il seguente termine elementare:

$$\frac{\omega_{ni}^2}{s^2 + 2\delta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2}$$

per il quale si definisce:

- δ_i **coefficiente di smorzamento**
- ω_{ni} **pulsazione naturale**

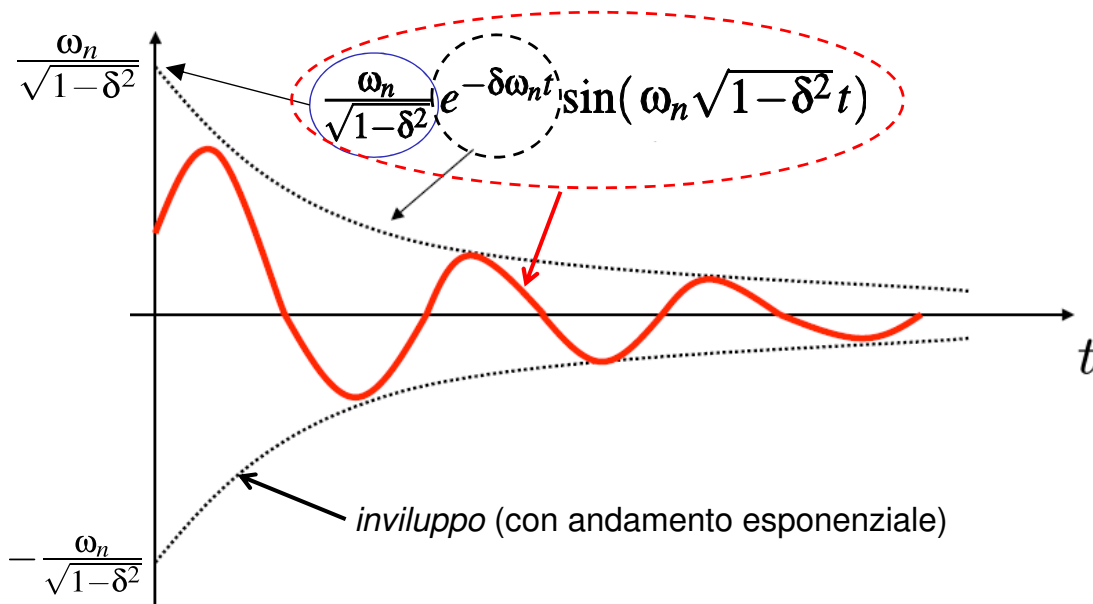
Funzioni di trasferimento: termini elementari - 3

- Per i termini elementari visti, più il termine $1/s$ (la cui antitrasformata è il gradino unitario), si ha:

Trasformata di Laplace	Funzione del tempo
$\frac{1}{s}$	1 ($u(t)$ gradino unitario in $t = 0$)
$\frac{1}{1 + \tau s}$	$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t)$
$\frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\omega_n \sqrt{\frac{1-2\delta\omega_n T + \omega_n^2 T^2}{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \varphi)$ $\varphi := \arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T \sqrt{1-\delta^2})$

Funzioni di trasferimento: termini elementari - 4

- Il termine associato a un polo reale ha l'andamento della ben nota funzione esponenziale, mentre quello associato a poli complessi è del tipo:



slide 19

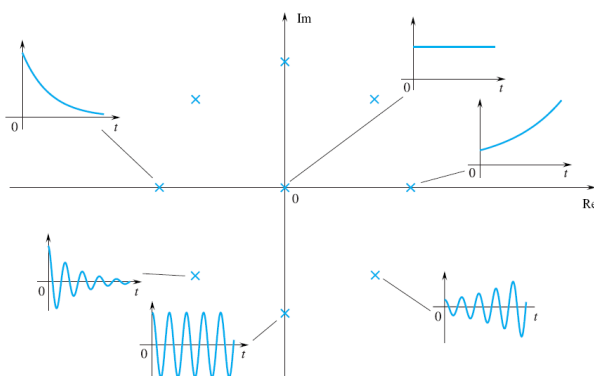
Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



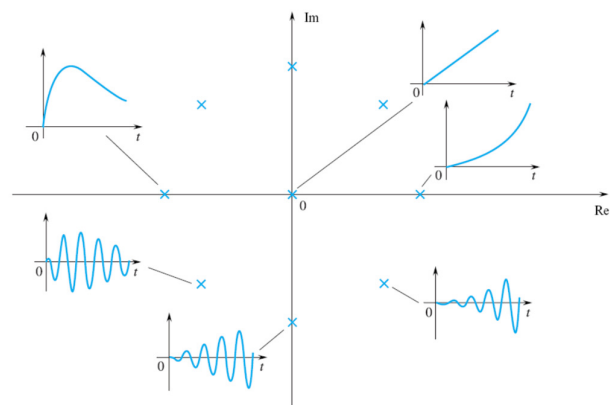
Funzioni di trasferimento: termini elementari - 5

N.B.: l'analisi modale di una funzione di trasferimento è assolutamente analoga a quella della matrice di transizione (autovalori della matrice A nel modello ingresso-stato-uscita).

POLI SEMPLICI:



POLI DOPPI (molteplicità 2):



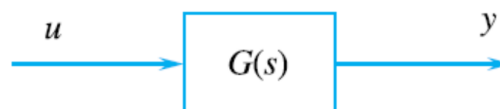
slide 20

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposte canoniche di un sistema

► Dato un sistema:



$$\text{con } (n \geq m): \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

► Si usa analizzare la risposta di tale sistema quando all'ingresso sono applicati segnali tipici:

- impulso di Dirac $\rightarrow U(s) = 1$
- gradino unitario $\rightarrow U(s) = 1/s$
- rampa unitaria $\rightarrow U(s) = 1/s^2$

Risposte canoniche di un sistema - 1

► Infatti, le risposte a tali stimoli, dette **risposte canoniche**, caratterizzano completamente il comportamento dinamico del sistema:

$$\rightarrow Y(s) = G(s)U(s)$$

antitrasformando diventa:

$$y(t) = \int_0^t W(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

con

$$W(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

corrispondente alla **risposta impulsiva** del sistema (se questo è puramente dinamico)

Risposte canoniche di un sistema - 2

- Si noti che la risposta all'impulso di Dirac è anche la derivata della risposta al gradino unitario:

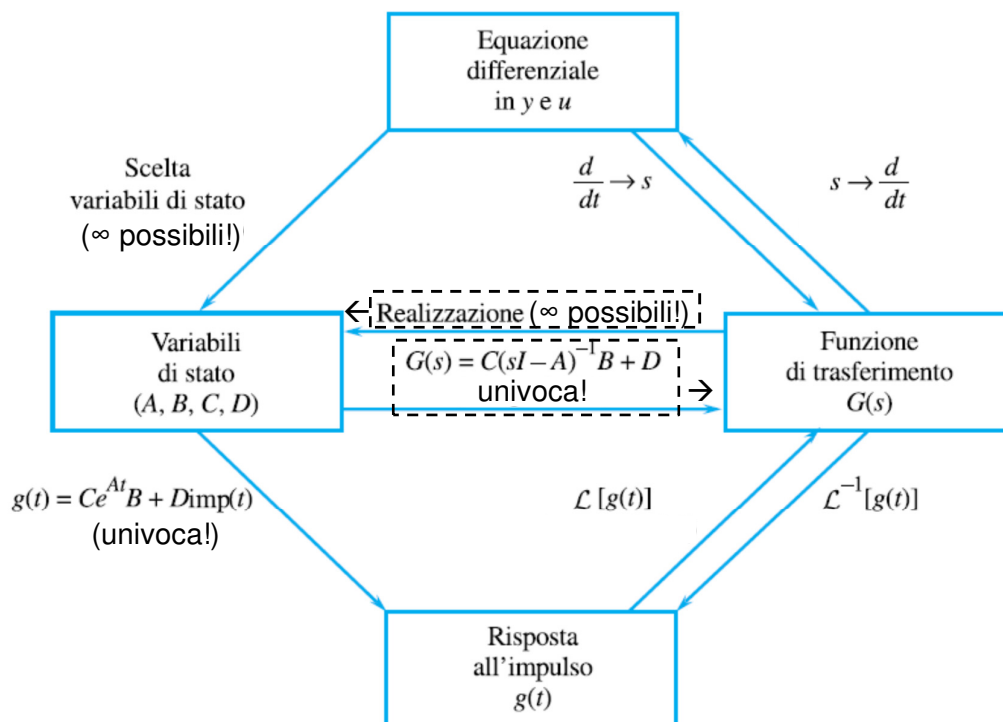
$$G(s) = s \frac{G(s)}{s}$$

e che ovviamente la risposta al gradino unitario è la derivata della risposta alla rampa unitaria:

$$\frac{G(s)}{s} = s \frac{G(s)}{s^2}$$

- La risposta al gradino unitario è anche detta **risposta indiciale del sistema**

Riepilogo delle relazioni tra modelli I-U e I-S-U



Risposte canoniche e sistemi elementari SISTEMI di PRIMO e SECONDO ORDINE

slide 25

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



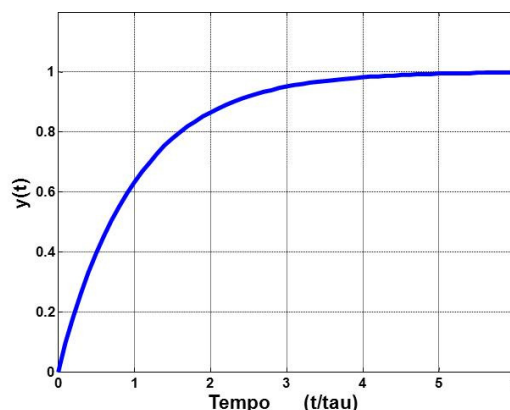
Risposta al gradino di sistemi del primo ordine

- ➔ Si consideri il sistema con f. di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

- ➔ Il suo comportamento è unicamente determinato dalla **costante di tempo** τ e la risposta è:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(1 + \tau s)s} \right] \\ &= 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$



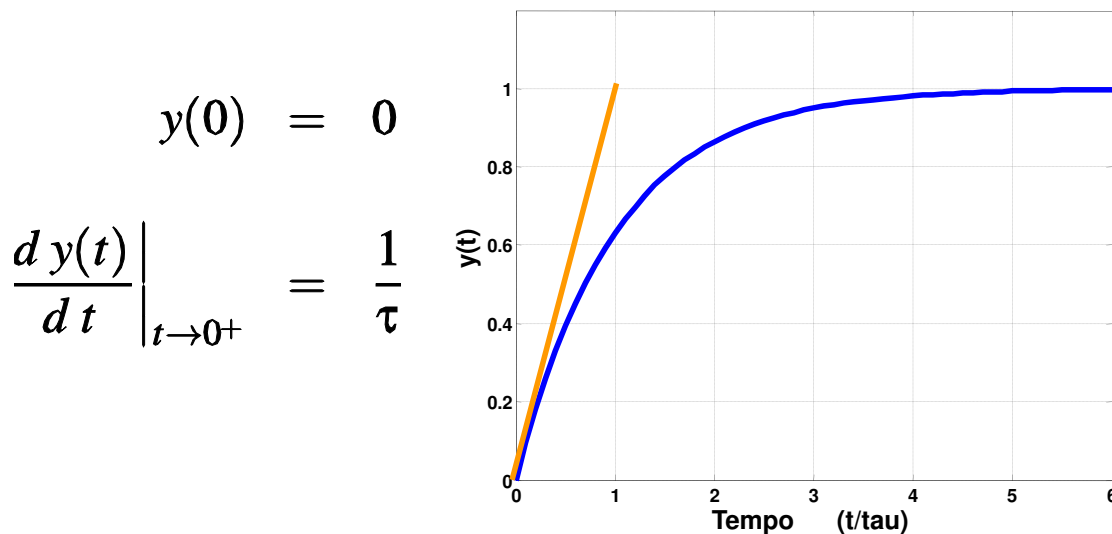
slide 26

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del primo ordine - 1

➔ Si noti che per la risposta di tale sistema:



➔ Cioè il **valore iniziale** è nullo e la **pendenza iniziale** è $1/\tau$

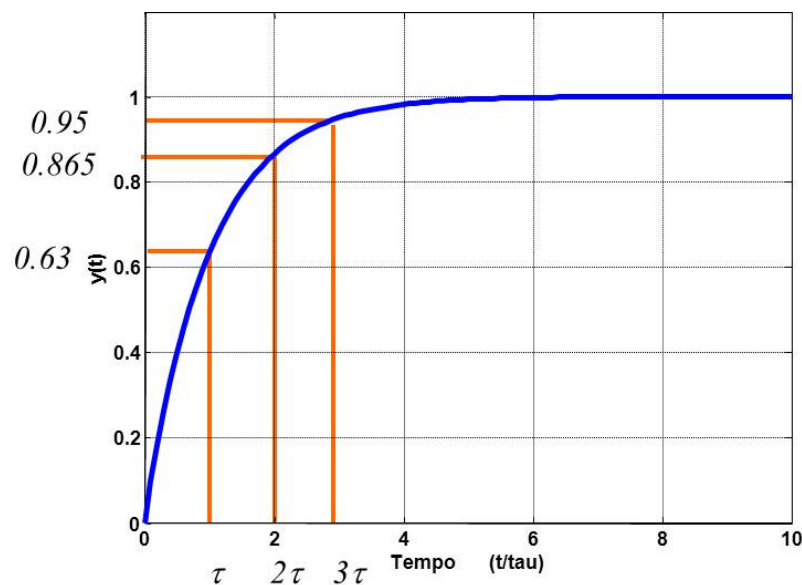
slide 27

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del primo ordine - 2

- ➔ Per $t = \tau$ la risposta assume un valore pari al 63.2 % del valore finale
- ➔ Per $t = 2\tau$ il valore è pari all'86.5% del valore di regime,
- ➔ Per $t = 3\tau$ si raggiunge il 95.0% del valore di regime.



slide 28

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del primo ordine - 3

- ➔ **Tempo di assestamento (T_a):** si definisce come il tempo che occorre affinché l'uscita rimanga entro un marginale di errore del 5% rispetto al valore finale
- ➔ In base ai valori visti nella slide precedente, si può affermare che per il sistema del primo ordine:

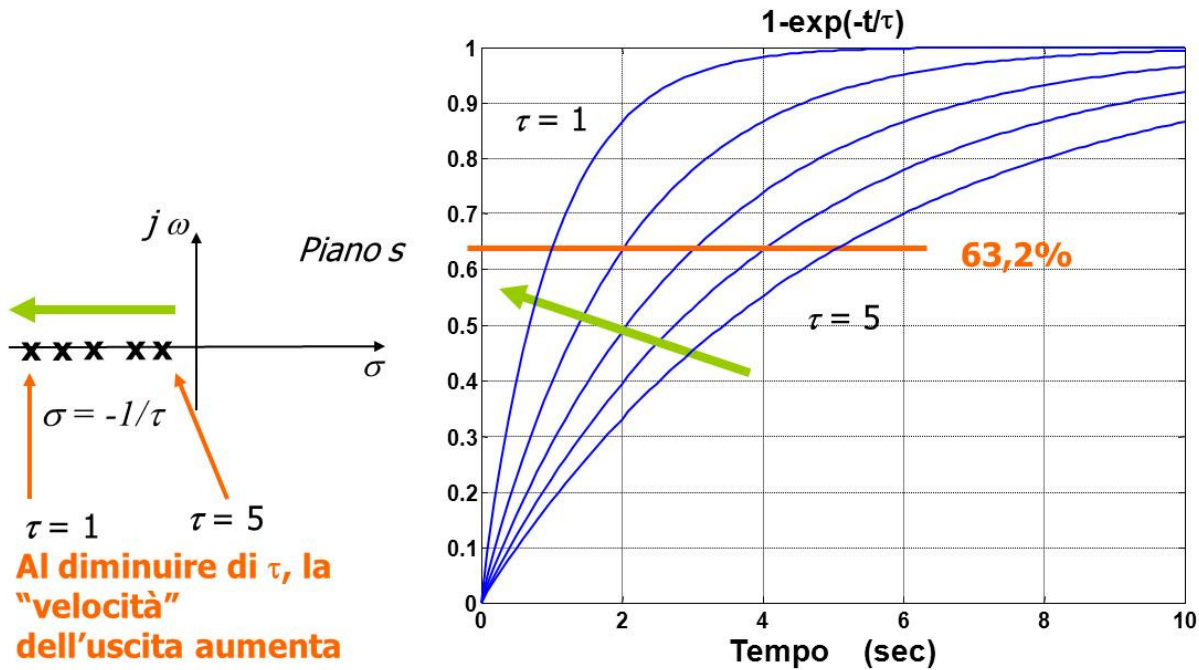
$$T_a = 3\tau$$

Risposta al gradino di sistemi del primo ordine - 3a

- ➔ **NOTA BENE:** alcuni testi definiscono il tempo di assestamento T_a considerando un marginale di errore del 2% rispetto al valore finale
- ➔ Estendendo le considerazioni viste in precedenza, tale definizione porta a determinare il T_a per il sistema del primo ordine: $T_a = 4\tau$
- ➔ Nel contesto di questo corso si considererà sempre il margine del 5% (**N.B.:** anche nelle esercitazioni con il software Matlab/Simulink)

Risposta al gradino di sistemi del primo ordine - 4

► Risposta del sistema per $\tau = (5,4,3,2,1)$:



slide 31

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari

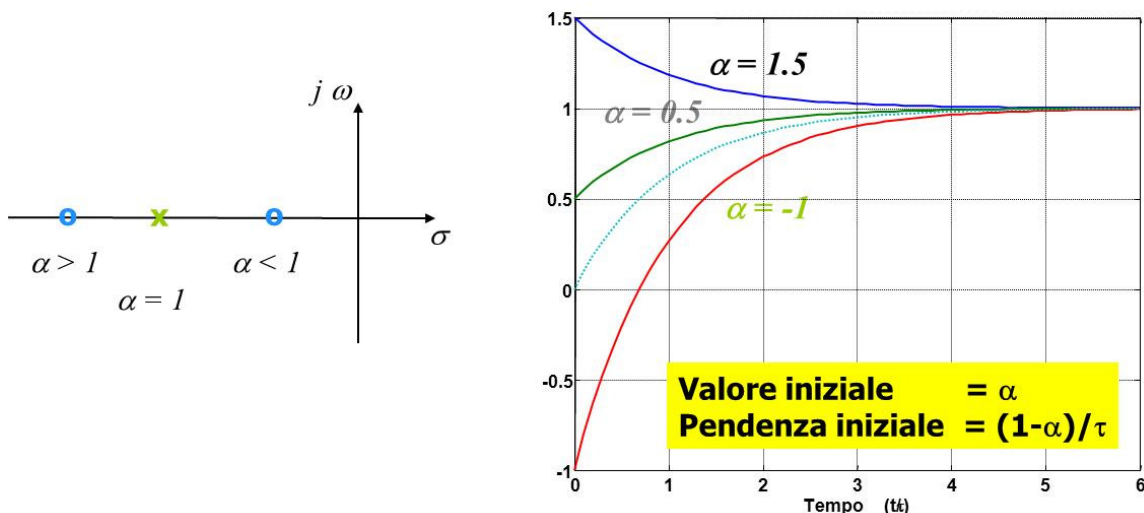


Risposta al gradino di sistemi del primo ordine - 5

► Si consideri il sistema con un polo e uno zero:

$$G(s) = \frac{1 + Ts}{1 + \tau s} = \frac{T}{\tau} + \frac{1 - T/\tau}{1 + \tau s} = \alpha + \frac{1 - \alpha}{1 + \tau s}$$

► La risposta al gradino è: $y(t) = 1 + (\alpha - 1)e^{-t/\tau}$



slide 32

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del primo ordine - 6

- ➔ **N.B.:** nel sistema con un polo e uno zero l'uscita assume all'istante $t=0$ un valore $\neq 0$, nonostante le condizioni iniziali siano sempre ipotizzate nulle
- ➔ L'uscita del sistema è pertanto discontinua nella risposta al gradino (per sua natura discontinuo)
- ➔ Ciò è tipico dei sistemi con grado relativo $r = 0$, per i quali l'ingresso influenza direttamente l'uscita
- ➔ Nei sistemi con grado relativo $r > 0$ ciò non avviene, perché l'uscita $y(t)$ è l'integrazione r -esima della variabile influenzata dall'ingresso (cioè $d^r y(t)/dt^r$), il che ne *filtra* le discontinuità

slide 33

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari

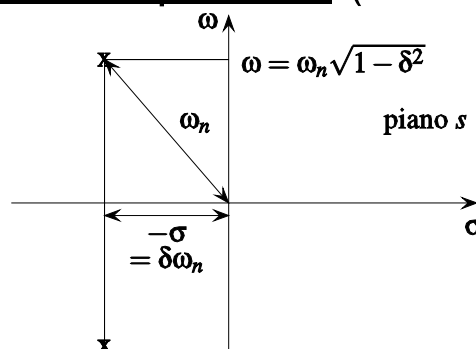


Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine

- ➔ Si consideri:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\delta\frac{s}{\omega_n} + 1}$$

- ➔ Si usa considerare il coefficiente di smorzamento $0 \leq \delta < 1$, perché se fosse $\delta < 0$ si avrebbero poli a parte reale positiva (sistema instabile)



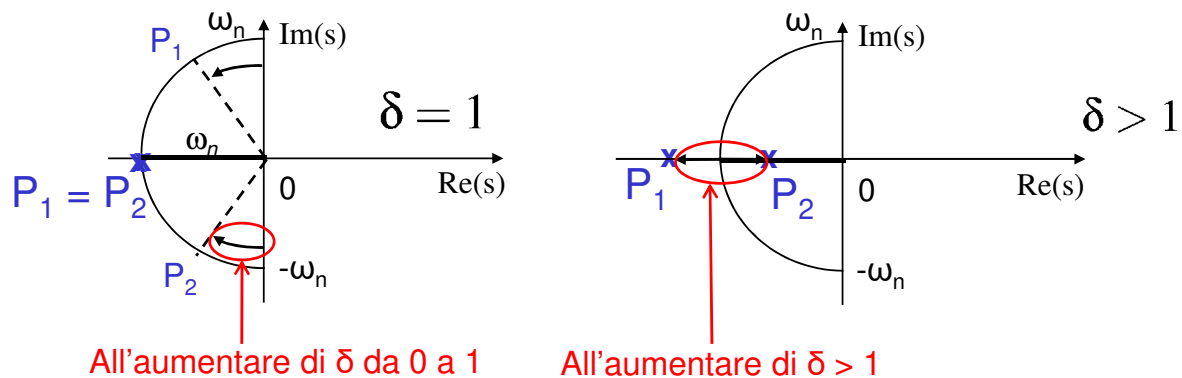
slide 34

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 1

- ➔ Altre condizioni **NON** di interesse per il seguito (perchè analizzabili con i criteri già visti per sistemi del primo ordine):
 - con $\delta = 1$ i poli sarebbero reali e coincidenti
 - con $\delta > 1$ i poli sarebbero reali e distinti



slide 35

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 2

- ➔ In base al valore del coefficiente di smorzamento δ , e, quindi, del piazzamento dei poli, si definisce:
 - se $\delta = 1$: sistema con **smorzamento critico**
 - se $\delta > 1$: sistema **sovra-smorzato**
 - se $0 \leq \delta < 1$: sistema **sotto-smorzato**
- ➔ **NOTA BENE:** per il sistema **sotto-smorzato** i poli sono quindi complessi e coniugati, con
 - **Parte reale:** $-\delta\omega_n$
 - **Parte immaginaria:** $\pm\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$

slide 36

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 3

► La risposta al gradino unitario è:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - A e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi)$$

► Con:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}}$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} =$$

$$= \arcsin \sqrt{1 - \delta^2} = \arccos \delta$$

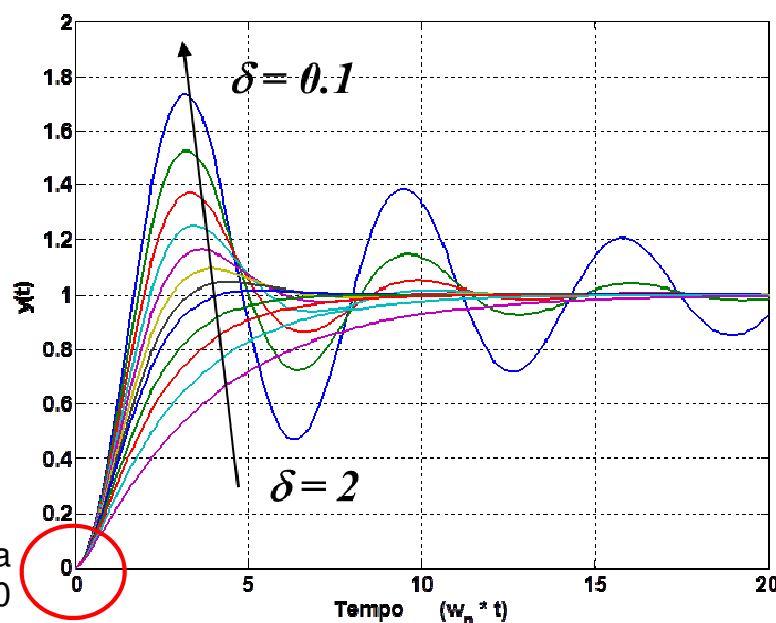
slide 37

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 4

► Risposta al gradino unitario per diversi valori di δ



N.B.: pendenza iniziale = 0

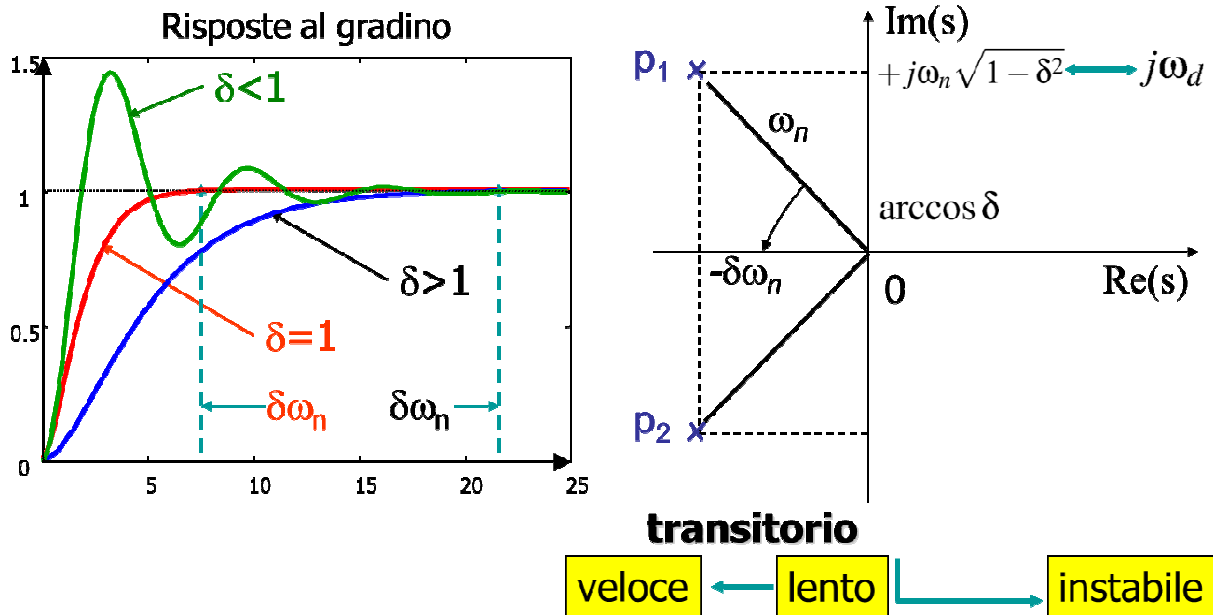
slide 38

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 5

- La pulsazione naturale ω_n influenza la velocità di risposta (N.B.: v. simile spostamento dei poli in $\text{Re}(s) < 0$, nella slide 31):



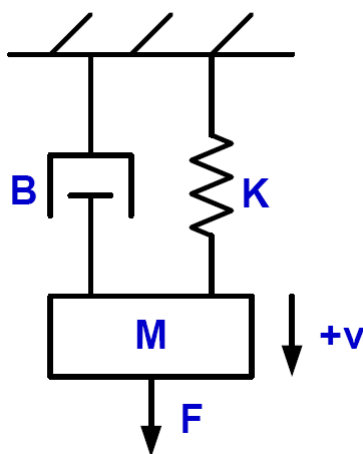
slide 39

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 6

- Un **sistema fisico** del secondo ordine: gruppo massa-molla-smorzatore:



$$M\ddot{z} + B\dot{z} + Kz = F$$

$$\Downarrow z = y; F = u$$

$$(Ms^2 + Bs + K)Y(s) = U(s)$$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$

slide 40

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 7

- Massa-molla-smorzatore: pulsazione naturale e coefficiente di smorzamento

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/M}{s^2 + B/Ms + K/M}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \rightarrow \text{Se } B = 0 \text{ corrisponde alla cosiddetta } \mathbf{pulsazione \textit{di risonanza}}$$

$$\delta = \frac{B}{2\sqrt{KM}}$$

$$B_c = 2\sqrt{KM} \quad \rightarrow \mathbf{smorzamento \textit{critico}}$$

slide 41

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 8

- **N.B.:** il coefficiente di smorzamento dipende dal (ma NON è uguale al) coefficiente di attrito dello smorzatore
- Più precisamente, il coefficiente di smorzamento è il **rapporto** tra il coefficiente dello smorzatore ed il valore di smorzamento critico ($\delta = B/B_c$)
- Quando tale rapporto è $> 0 < 1$ si determina un sistema sovra- o sotto-smorzato

slide 42

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 9

► Considerazioni energetiche:

- Come visto nelle slide 62-69 e 93-101 – FdA-1.2-Sistemi, sono gli effetti dissipativi (attrito degli smorzatori, resistenze elettriche) ad influenzare la stabilità dei sistemi fisici
- L'assenza di tali effetti corrisponde ad un coefficiente di smorzamento $\delta = 0$ nel sistema del secondo ordine analizzato
- In tale situazione, il sistema è **semplicemente stabile**: le oscillazioni innescate dalla risposta al gradino persistono inalterate per $t \rightarrow \infty$

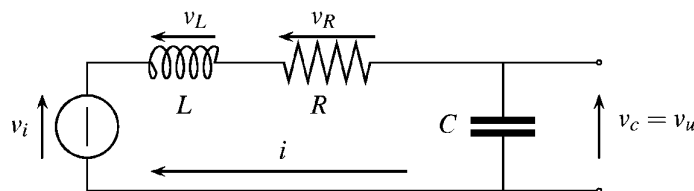
slide 43

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine-10

► Circuito elettrico analogo al gruppo massa-molla-smorzatore:



$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\delta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

La **resistenza** svolge ovviamente il ruolo dello **smorzatore**, dissipando l'energia scambiata tra L e C

slide 44

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine-11

- Si consideri il sistema del secondo ordine con **uno zero al numeratore**:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Si può scrivere:

$$G(s) = G_0 + T s G_0, \quad G_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_0(s)}{s} \right] + T \mathcal{L}^{-1} \left[s \frac{G_0(s)}{s} \right] = y_0(t) + T \frac{d y_0(t)}{d t}$$

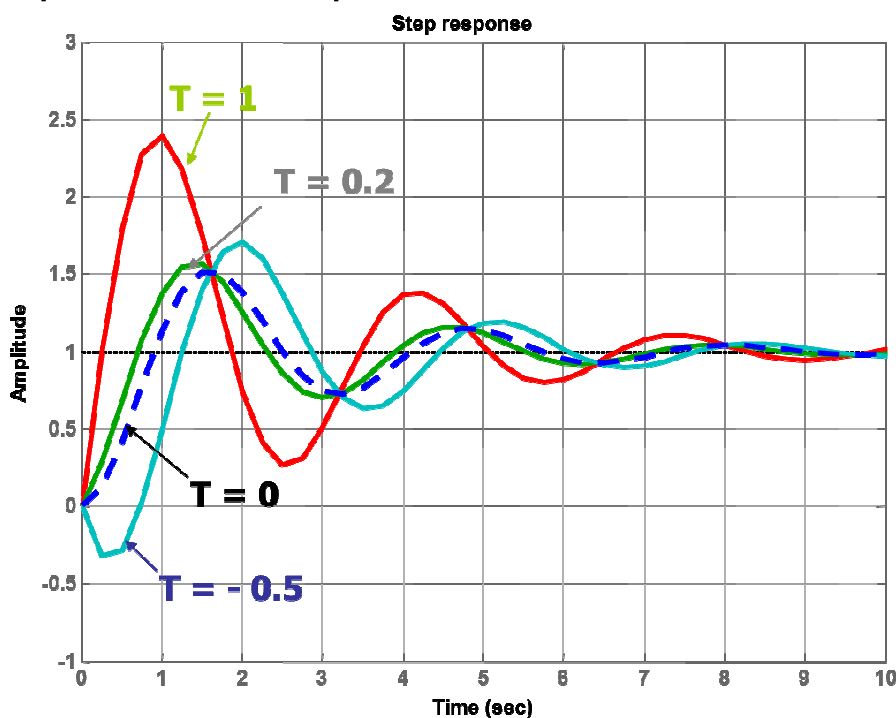
slide 45

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine-12

- La risposta è del tipo:



slide 46

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine-13

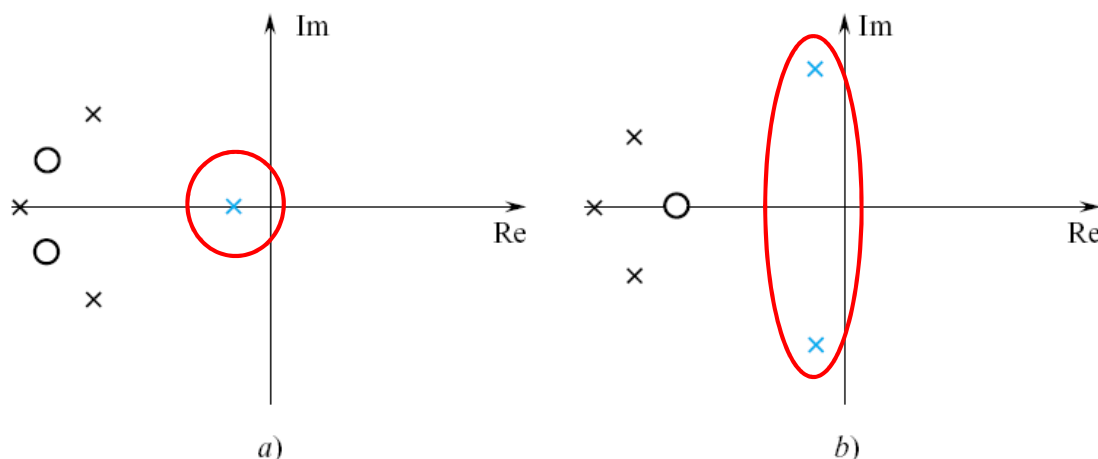
- ➔ **N.B.:** la risposta mostrata in precedenza, nel caso di **zero a parte reale positiva** ($T < 0$), è caratterizzato da una **sottoelongazione** iniziale (o *undershoot*)
- ➔ La sottoelongazione è tanto più ampia quanto più è negativa T
- ➔ Tale comportamento è tipico dei **sistemi** detti a **fase non minima**, secondo una definizione che verrà formalizzata più avanti in riferimento alla costruzione dei diagrammi di Bode

Sistemi di ordine superiore

- ➔ Solitamente sistemi più complessi rispetto a quelli del primo o secondo ordine vengono ricondotti a questi ultimi, trascurando i contributi di poli e zeri maggiormente distanti dall'asse immaginario
- ➔ Poli e zeri più vicini all'asse immaginario determinano infatti contributi **dominanti** nella risposta
- ➔ Nell'approssimazione basata sui **poli dominanti** è però necessario conservare il guadagno della funzione di trasferimento (il valore della FdT per $s=0$)

Sistemi di ordine superiore - 1

- Esempi di sistemi con un polo reale e due poli complessi dominanti (mappa poli = **X** e zeri = **O**):



slide 49

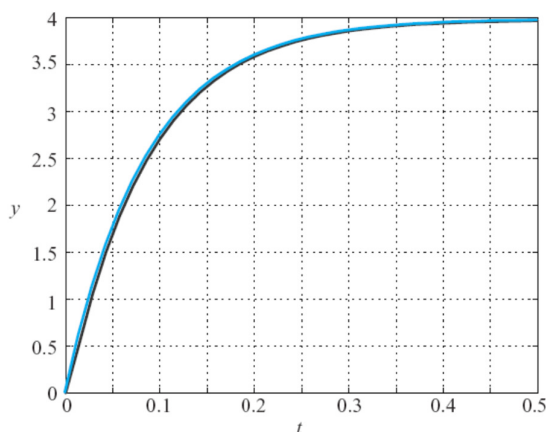
Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Sistemi di ordine superiore - 2

- Esempio: motore DC con $R=0.46$, $L=1$, $J=0.012$, $B=0.0008$, $k_m=0.25$, funzione di trasferimento tra tensione v e velocità ω

$$G(s) = \frac{3.98}{(1 + 0.0856s)(1 + 0.0022s)} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{3.98}{1 + 0.0856s}$$



Si è trascurato il polo legato alla parte elettrica (R-L), la cui dinamica è molto più rapida solitamente di quella della parte meccanica (inerzia-attrito)

slide 50

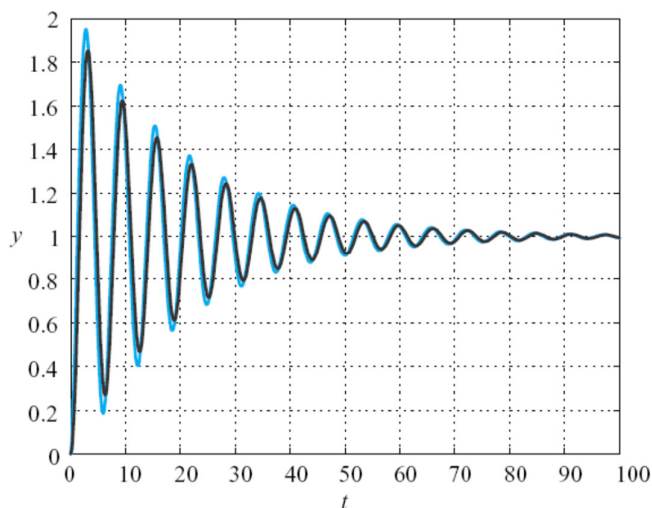
Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Sistemi di ordine superiore - 3

► Esempio:
$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(1 + 0.02s + 0.002s^2)(1 + 0.1s + s^2)}$$

➔
$$G(s) = \frac{1}{1 + 0.1s + s^2}$$



Si sono trascurati i poli con parte reale -5 e il polo reale in -10, conservando solo i poli con parte reale -0.05

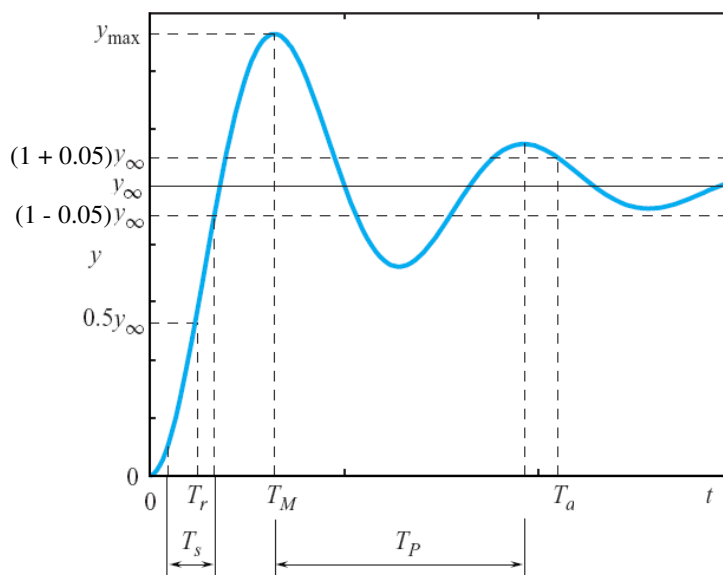
slide 51

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Analisi delle caratteristiche della risposta

- Con l'approccio dei poli dominanti la tipologia di risposta più comunemente ipotizzata nel progetto del controllo è quella del secondo ordine:



slide 52

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Analisi delle caratteristiche della risposta - 1

- In tale tipo di risposta si considerano di interesse le seguenti caratteristiche:

- Massima sovraelongazione o *overshoot* (percentuale):

$$S\% = 100 \frac{y_{max} - y_{\infty}}{y_{\infty}}$$

- Istante di massima sovraelongazione T_M
- Tempo di ritardo T_r : tempo necessario per raggiungere il 50% del valore finale
- Tempo di salita T_s : tempo necessario per passare dal 10% al 90% del valore finale
- Tempo di assestamento T_a (al 5%): tempo necessario perché l'uscita rimanga entro il +/-5% del valore finale

Analisi delle caratteristiche della risposta - 2

- E' possibile stabilire una relazione tra la massima sovraelongazione $S\%$ e il coefficiente di smorzamento, ricordando che la risposta è:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - A e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi)$$

- La sovraelongazione corrisponde ad un punto di massimo, nel quale la derivata di $y(t)$ si annulla:

$$\dot{y}(t) = -A e^{-\delta\omega_n t} \omega \cos(\omega t + \varphi) + A \delta \omega_n e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

$$-\omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \cos(\omega t + \varphi) + \delta \omega_n \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \tan(\omega t + \varphi) = \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta}$$

Analisi delle caratteristiche della risposta - 3

- ▶ Dato il valore definito per $\varphi \Rightarrow \tan(\omega t + \varphi) = \tan \varphi$
- ▶ Pertanto le soluzioni sono tutte quelle per cui $\omega t = n\pi$ con $n = 0, 1, \dots$
- ▶ Per $n=0 \rightarrow t=0$: all'istante iniziale la pendenza è nulla!
- ▶ L'istante di massima sovraelongazione corrisponde alla soluzione per $n = 1$:

$$T_M = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$$

- ▶ Il valore di $y(t)$ in tale istante è:

$$y_{max} = 1 + e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

- ▶ Quindi: $S\% = 100(y_{max} - 1) = 100e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$

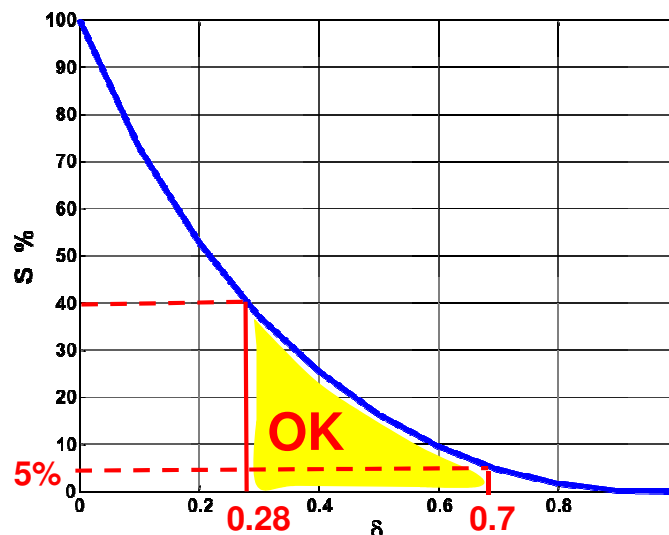
slide 55

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Analisi delle caratteristiche della risposta - 4

- ▶ Normalmente si considera accettabile un $S\%$ tra il 5 e il 40%, che corrisponde ad un coefficiente di smorzamento tra 0.7 e 0.28:



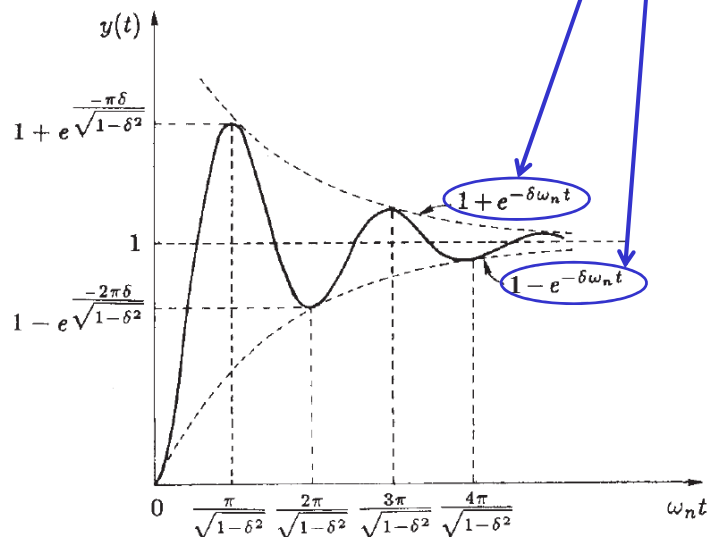
slide 56

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Analisi delle caratteristiche della risposta - 5

- Risulta più complicato fornire una espressione esatta per il calcolo del **tempo di assestamento** T_a
- E' però semplice determinarne un limite superiore, approssimando la risposta con il suo inviluppo:



slide 57

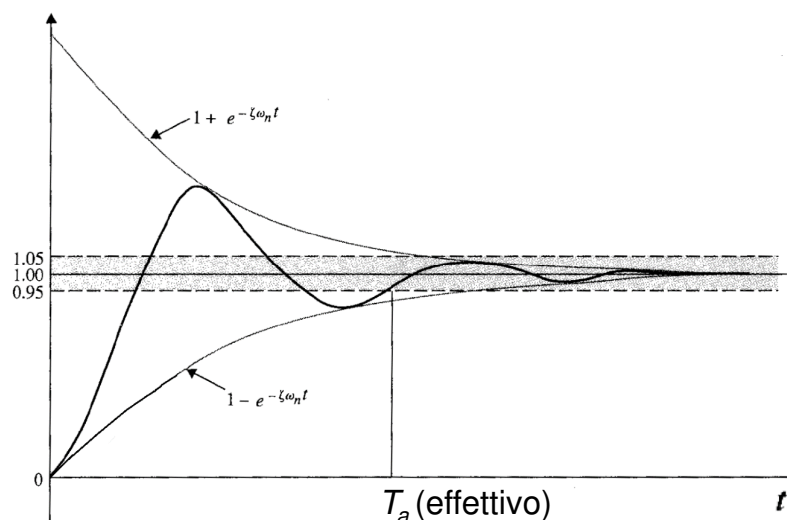
Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Analisi delle caratteristiche della risposta - 6

- Si considera pertanto che la risposta effettiva è sempre limitata superiormente e inferiormente:

$$y(t) \leq 1 + e^{-\delta\omega_n t} \quad y(t) \geq 1 - e^{-\delta\omega_n t}$$



slide 58

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Analisi delle caratteristiche della risposta - 6

- L'involuppo esponenziale entra nella fascia di $\pm 5\%$ rispetto al valore finale se:

$$y(T_a) = 1 \pm e^{-\delta\omega_n T_a} = 1 \pm 0.05$$

- Da cui: $\Rightarrow e^{-\delta\omega_n T_a} = 0.05 \Rightarrow -\delta\omega_n T_a = \log_e(0.05)$

$$\delta\omega_n T_a = 3 \Rightarrow T_a = \frac{3}{\delta\omega_n}$$

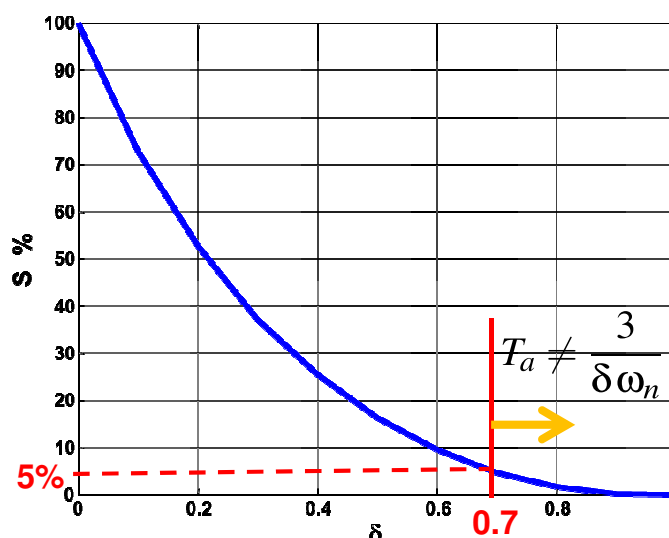
slide 59

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Analisi delle caratteristiche della risposta - 7

- **NOTA BENE:** l'approssimazione di $T_a = 3/(\delta\omega_n)$ ha un importante limite pratico. Se il sistema ha un coefficiente di smorzamento maggiore di (circa) 0.7, infatti, la massima sovraelongazione è inferiore al 5%



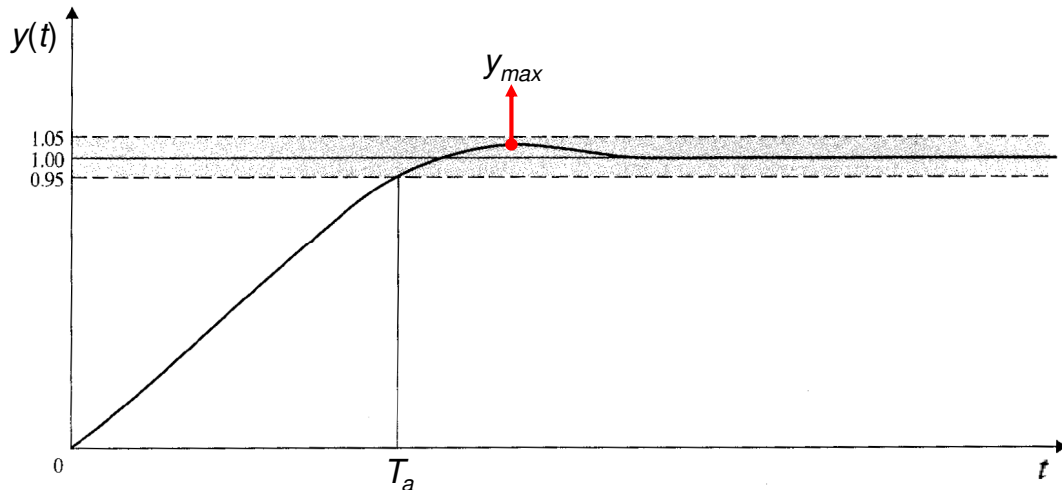
slide 60

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Analisi delle caratteristiche della risposta - 8

- Ciò significa che la risposta si assesta (entro il margine del 5%) prima di raggiungere il picco della risposta. In altre parole, la risposta si assesta prima che lo faccia il proprio inviluppo esponenziale!



slide 61

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Analisi delle caratteristiche della risposta - 9

- In letteratura, si trovano ulteriori formulazioni (sempre approssimate!) del tempo di assestamento per la risposta di un sistema del secondo ordine, in funzione del coefficiente di assestamento e della pulsazione naturale.
- Ad esempio, una formula ragionevolmente valida (della quale non si riporta la dimostrazione) è la seguente:

$$T_a = \frac{4.5 \delta}{\omega_n} \quad \text{SE} \quad \delta \geq 0.7$$

slide 62

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Analisi delle caratteristiche della risposta - 10

- **Ricapitolando:** per un sistema del secondo ordine con coefficiente di smorzamento δ e pulsazione naturale ω_n

$$T_a = \frac{3}{\delta \omega_n} \quad \text{SE} \quad 0 < \delta < 0.7$$

$$T_a = \frac{4.5 \delta}{\omega_n} \quad \text{SE} \quad \delta \geq 0.7$$

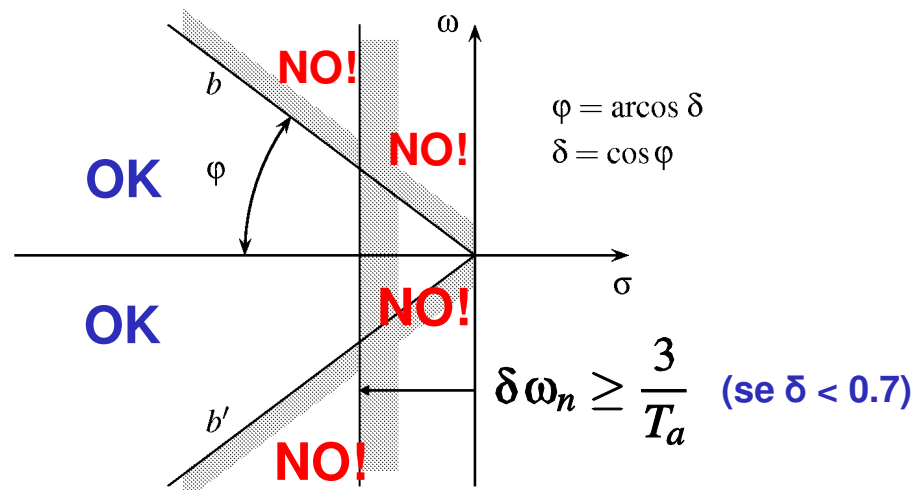
slide 63

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari



Analisi delle caratteristiche della risposta - 11

- **N.B.:** le specifiche su $S\%$ e su T_a impongono dei vincoli sulle regioni del piano complesso dove è ammissibile piazzare i poli complessi coniugati della FdT:



slide 64

Fondamenti di Automatica – 2.2 Risposte / Sistemi elementari





RISPOSTE CANONICHE e SISTEMI ELEMENTARI

- Antitrasformazione di funzioni razionali**
- Sistemi del primo e secondo ordine**

FINE