Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 19 marzo 2008

1-a)

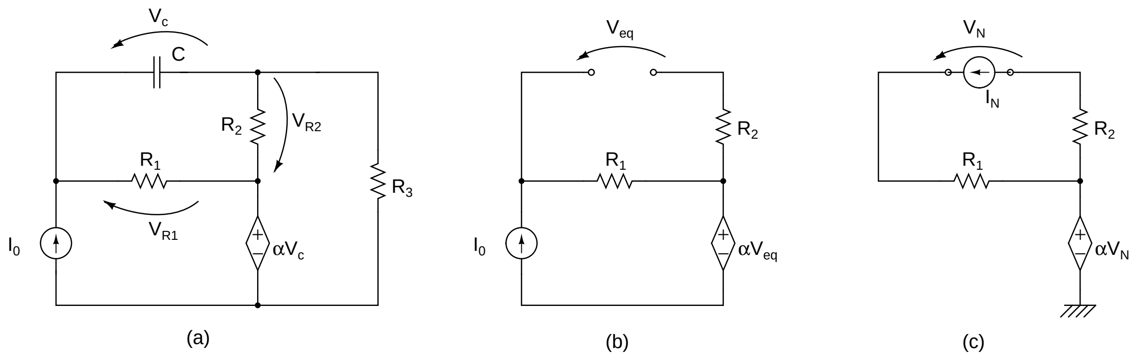
Dal circuito risulta evidente che $i_1 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} + g_2 V_2$ e $i_2 = -g(V_1 - V_2) + \frac{V_2}{R_3} + \frac{V_2 - V_1}{R_2} - g_2 V_2$ da cui si ricava

$$i_1 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) V_1 + \left(g_2 - \frac{1}{R_2}\right) V_2$$
$$i_2 = \left(-g - \frac{1}{R_2}\right) V_1 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} - g_2 + g\right) V_2$$

Quindi ne segue: $\underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & g_2 - \frac{1}{R_2} \\ -g - \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} - g_2 + g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \text{m}\Omega^{-1}$.

Collegando il generatore ideale I_0 alla porta 1, si ha $i_1 = I_0 = G_{11}V_1 + G_{22}V_2$ da cui si ricava $V_1 = \frac{I_0}{G_{11}}$ (essendo $G_{12} = 0$). Sostituendo nella equazione della porta 2 si ottiene $i_2 = G_{21}\left(\frac{I_0}{G_{11}}\right) + G_{22}V_2$. Considerando il generatore equivalente di Norton con verso pari a quello della corrente di cortocircuito della porta 2 (quindi discorde a quello di i_2) si ha $i_2 = G_{eq}V_2 - I_{eq}$ da cui si deduce $G_{eq} = G_{22}$ (ossia $R_{eq} = \frac{1}{G_{22}} = 500\Omega$) e $I_{eq} = -\frac{G_{21}}{G_{11}} I_0 = 1\text{mA}$.

1-b)



Per $t \leq 0$sec il circuito è a regime e il condensaotre si comporta come un circuito aperto; la situazione è mostrata in figura (a).

Risulta evidente che $V_c = V_{R1} + V_{R2}$ dove ovviamente $V_{R1} = R_1 I_0$ mentre $V_{R2} = \alpha V_c \frac{R_2}{R_2 + R_3}$. Sostituendo e raccogliendo V_c si ottiene $v_c(t) = \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_3 + (1-\alpha)R_2} I_0 = -2\text{V}$, $\forall t \leq 0$.

Per $t > 0$ conviene calcolare l'equivalente di Thevenin ai capi del condensatore. La tensione equivalente si ricava dal circuito di figura (b). Si ricava banalmente $V_{eq} = R_1 I_0 = 3\text{V}$.

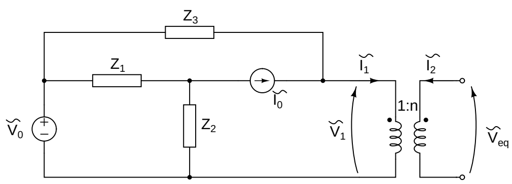
La resistenza equivalente si ricava dal circuito (c) dove, essendo il circuito costituito da un'unica maglia, vale $V_N = (R_1 + R_2)I_N$ da cui segue immediatamente $R_{eq} = (R_1 + R_2) = 8\text{k}\Omega$.

Si può scrivere quindi $v_c(t) = v_{C\infty} - (v_{C\infty} - v_C(0^+))e^{-t/\tau}$ dove $v_{C\infty} = V_{eq} = 3\text{V}$, $v_C(0^+) = v_C(0^-) = -2\text{V}$ e $\tau = R_{eq}C = 1\text{msec}$. Sostituendo si ricava $v_C(t) = [3 - 5e^{-1000t}]\text{V}$.

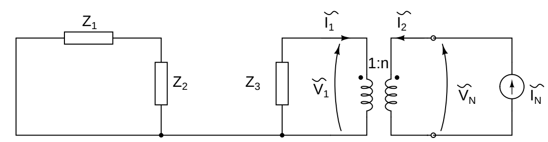
1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha ($\omega = 1$rad/sec): $Z_1 = Z_{L1} = j\Omega$, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = (1+j)\Omega$, $Z_3 = j\omega L_3 = j\Omega$, $Z_4 = R_4 - j1/\omega C_4 = (1-j)\Omega$, $Z_5 = R_5 + j\omega L_5 = (1+j)\Omega$, $\widetilde{I}_0 = 2$A, $\widetilde{I}_1 = (1+j)$A, $\widetilde{V}_0 = 2(1-j)$V.

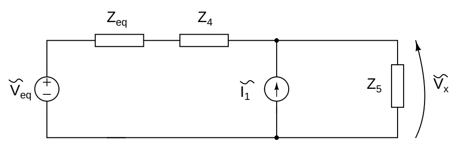
Conviene calcolare l'equivalente di Thevenin a monte della porta 2 del trasformatore.



(a)



(b)



(c)

Per il calcolo della tensione equivalente si consideri il circuito di figura (a). Essendo $\widetilde{I}_2 = 0$ ne segue $\widetilde{I}_1 = 0$; risulta evidente quindi che $\widetilde{V}_1 = \widetilde{V}_0 + Z_3\widetilde{I}_0$ da cui $\widetilde{V}_{eq} = \widetilde{V}_2 = n\widetilde{V}_1 = n(\widetilde{V}_0 + Z_3\widetilde{I}_0) = 4$V.

Per il calcolo della impedenza equivalente si consideri il circuito di figura (b). Risulta evidente che l'impedenza equivalente è data dalla impedenza Z_3 riportata a secondario, ossia $Z_{eq} = n^2 Z_3 = 4j\Omega$.

Ricollegando l'equivalente di Thevenin si ottiene il circuito di figura (c). Il calcolo della tensione $\widetilde{V}_x$ può essere effettutato applicando il teorema di Millmann:

$$\widetilde{V}_x = \frac{\widetilde{V}_{eq}/(Z_{eq} + Z_4) + \widetilde{I}_1}{1/(Z_{eq} + Z_4) + 1/Z_5}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene $\widetilde{V}_x = (1+j)$V che implica, passando al dominio dei tempi, $v_x(t) = \sqrt{2}\cos(t + \pi/4)$V.

2-a) Essendo gli operazionali ideali, e operanti sempre nella zona ad alto guadagno, numerandoli coerentemente con le denominazioni delle tensioni di uscita, vale $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$ e $i_-^{(i)} = i_+^{(i)} = 0$A con $i = 1, 2$.

Indicando con V_x la tensione al nodo cui sono collegati R_1, R_2, R_3, I_0, non essendo la resitenza R_3 percorsa da corrente ($i_-^{(2)} = 0$) e considerando che $V_-^{(2)} = V_+^{(2)}$, si può scrivere

$$\begin{cases} V_x = V_{o1} + V_0 \\ \frac{V_x - V_{o1}}{R_2} + I_0 + \frac{V_x}{R_1} = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $V_x = -R_1\left(\frac{V_0}{R_2} + I_0\right) = -6$V e $V_{o1} = -R_1 I_0 - \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_0 = -9$V.

Infine, essendo $V_-^{(1)} = V_+^{(1)} = 0$, si ha $V_{o2} = V_-^{(1)} - R_4 i_{R1} = R_4\left(\frac{V_0}{R_2} + I_0\right) = 6$V.