Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 21.06.2001

1-a) Basta scrivere la LKV alla maglia comprendente i resistori R_1, R_2, R_4 e R_3, R_2 ed R_4 per ottenere

$$v_1 = R_1 i_1 + R_2 i_3 + R_4(1+\alpha) i_3 v_2 = R_2 i_3 + R_4(1+\alpha) + R_3(i_2 - \alpha i_3)$$

Applicando la LKC al nodo inferiore si ha $i_1 + i_2 = (1+\alpha)i_3$, da cui si puó ricavare i_3 da sostituire nella precedenti equazioni ottenendo

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_4 + \frac{R_2}{1+\alpha} & \frac{R_2}{1+\alpha} + R_4 \\ \frac{R_2}{1+\alpha} + R_4 - R_3 \frac{\alpha}{1+\alpha} & \frac{R_2}{1+\alpha} + R_4 + \frac{R_3}{1+\alpha} \end{bmatrix}$$

da cui, sostituendo i valori numerici si ottiene R_{11}=300Ω, R_{12}=200Ω, R_{21}=-600Ω, R_{22}=400Ω.

Quando la porta di uscita viene chiusa sul generatore reale di tensione, questo impone la sequente equenzione di vincolo alla porta di uscita $v_2 = v_0 - R_5 i_2$ che, assieme alla equazione che caratterizza il comportamento della porta di uscita del doppio bipolo, porge

$$i_2 = \frac{v_0 - R_{21} i_1}{R_5 + R_{22}}$$

Sostituendo nella prima equazione del doppio bipolo si ottiene

$$v_1 = i_1 \left(R_{11} - \frac{R_{12} R_{21}}{R_5 + R_{22}} \right) + v_0 \frac{R_{12}}{R_5 + R_{22}} = i_1 R_{eq} + v_{eq}$$

da cui $R_{eq} = 400\Omega$ e $v_{eq} = 1\mathrm{V}$.

1-b) Per $t < 0$ la rete si riduce ad un semplice circuito RC che opera in condizioni stazionarie, da cui $v_C(0^-) = v_{03} = 2\mathrm{V}$, che risulta anche uguale a $v_C(0^+)$. Per $t > 0$ si puó subito notare che R_6 é in parallelo ad un cortocircuito e non ha quindi alcun effetto e che R_1 ed R_2 sono in parallelo e sono quindi equivalenti a R_p=1Ω. Per calcolare $vvC(+\infty)$ conviene considerare il circuito equivalente secondo Thevenin del bipolo che é collegato ai capi della capacitá.

Applicando il teorema di Millman si ottiene facilmente che

$$v_{eq} = v_{ca} = \frac{\frac{v_{01}}{R_3} + \frac{v_{02}}{R_5 + R_p}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5 + R_p}} = 4\mathrm{V}$$

mentre la resistenza equivalente vale il parallelo tra R_3 e $(R_5 + R_p)$ in serie ad R_4, da cui $R_{eq} = 11\Omega$.

Complessivamente si ottiene

$$v_C(t) = v_{eq} + (v_C(0^+) - v_{eq}) e^{-t/(R_{eq} C)} = 4 - 2e^{-10t}$$

1-c) Chiaramente R_7 ed L_8 sono in parallelo ad un cortocircuito e non agiscono. Quindi $i_7(t) = 0$. Le impedenze associate a ciascun ramo sono, secondo la numerazione di figura, $Z_1 = j$, $Z_2 = -j$, $Z_3 = 1$, $Z_4 = 2j$, $Z_5 = -j$, $Z_6 = 1 + j$. Per calcolare $\tilde{I}_6$ connziene considerare l'impedenza equivalente collegata alla serie del generatore di tensione e della impedenza Z_6. Considerando la trasformazione triangolo-stella per le impedenze Z_1, Z_2, e Z_3, che divengono $Z_1{}' = -j$, $Z_2{}' = j$, $Z_3{}' = 1$ l'impedenza equivalente risulta

$$Z_{eq} = Z_2{}' + \frac{(Z_3{}' + Z_4)(Z_1{}' + Z_5)}{Z_3{}' + Z_4 + Z_1{}' + Z_5} = 4 - j$$

da cui

$$\tilde{I}_6 = \frac{\tilde{E}}{Z_{eq} + Z_6} = \frac{10e^{j\pi/3}}{5}$$

e quindi, passando al dominio dei tempi si ha $i_6(t) = 2\cos(t + \pi/3)$. Ovviamente $P = 1/2 R_6 I_6{}^2 = 2\text{W}$.

2-a) Il circuito presenta un induttore e 2 condensatori e quindi le candidate quali variabili di stato sono le correnti i_{L_1}, e le tensioni v_{C_1}, e v_{C_2}. É peró immediato notare che tali le ultime due sono proporzionali tra loro in virtú della presenza del generatore di tensione comandato in tensione. Pertanto l'ordine di complessitá del circuito si riduce a due.

2-b) Il ramo contente il generatore di corrente indipendente e quello che contiene R_3 e C costituiscono un taglio e sono quindi percorsi dalla stessa corrente. Pertanto i restanti componenti non sono influenti per determinare $v_u(t)$. Risolvedo l'equazione differenziale $C\, dv_C(t)/dt = i_0$ e tenendo conto che $v_C(0) = 0$ si ha $v_C(t) = (i_0/C)t$ e quindi $v_u(t) = R_3 i_0 + v_C(t) = 4 + 2t$