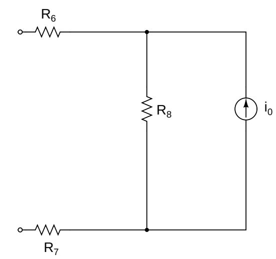
Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 11 luglio 2001

1-a)

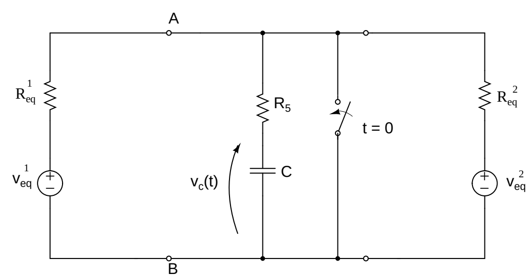
Scollegando il sottocircuito a monte da quello a valle, le resistenze R_3 e R_4 risultano non percorse da corrente; la tensione equivalente di Thevenin vista dai morsetti A-B guardando a monte sara' quindi data da $v_{eq} = v_{o1}\frac{R_2}{R_1+R_2} = 10V$; la resistenza equivalente si calcola immediatamente spegnendo il generatore indipendente v_{o1}, ottenendo $R_{eq} = (R_1//R_2)+R_4+R_3 = 5k\Omega$.

Conviene ora calcolare il bipolo equivalente anche a valle dell'interruttore:



Si ottiene semplicemente: $v_{eq} = R_8 i_0 = 30V$, $R_{eq} = R_6 + R_7 + R_8 = 5k\Omega$.

Il circuito risulta equivalente a:



t<0 Per calcolare $v_c(0^-)$, basta applicare il Teorema di Millmann, ottenendo $v_c(0^-) = (\frac{v_{eq}^1}{R_{eq}^1} + \frac{v_{eq}^2}{R_{eq}^2})/(\frac{1}{R_{eq}^1} + \frac{1}{R_{eq}^2}) = 20V$

t>0 L'interruttore chiuso mette in corto il bipolo R_5,C per cui si ha una semplice scarica del condensatore attraverso la resistenza suddetta: $v_c(t) = v_c(0^+)e^{-\frac{t}{R_5 C}} = 20e^{-2\cdot 10^5 t}$

1-b)

Conviene calcolare dapprima la matrice delle conduttanze $\underline{G}'$ del 2-porte intrinseco (ossia a meno della resistenza R_4). Si puo' notare che R_2 e' in parallelo ad un generatore di tensione e R_5 e' in serie ad un generatore di corrente, quindi tali resistori non hanno alcun effetto.

$v_1 = R_1 i_1 + \alpha v_2 \quad \Rightarrow \quad R_5 = \frac{v_1 - \alpha v_2}{R_1}$, e $i_2 = \frac{v_2}{R_3} + g_m v_1 - i_0$; si ottiene quindi:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{v_1}{R_1} - \frac{\alpha}{R_1}v_2 \\ i_2 = \frac{v_2}{R_3} + g_m v_1 - i_0 \end{cases} \Rightarrow \underline{G}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{\alpha}{R_1} \\ g_m & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

La matrice conduttanza $\underline{G}$ puo' quindi essere ottenuta facilmente considerando la particolare connessione del resistore R_4, ottenendo:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} & -\frac{\alpha}{R_1} - \frac{1}{R_4} \\ g_m - \frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -14 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} (\Omega^{-1})$$

Quando la porta di uscita viene chiusa sul generatore reale di tensione, questo impone la sequente equazione di vincolo alla porta di uscita $i_2 = \frac{v_0 - v_2}{R_6}$ che, assieme alla equazione che caratterizza il comportamento della porta di uscita del doppio bipolo, porta a:

$v_2 = \frac{v_0/R_6 + i_0 - G_{21} v_1}{(G_{22} + 1/R_6)}$

Sostituendo nella prima equazione del doppio bipolo si ottiene:

$i_1 = \left[G_{11} - \frac{G_{11} G_{21}}{G_{22} + 1/R_6}\right] v_1 + \frac{G_{12}}{G_{22} + 1/R_6}\left[i_0 + \frac{v_0}{R_6}\right] = G_{eq} v_1 + i_{eq}$

dove $G_{eq} = 8\Omega^{-1}$, $i_{eq} = 4$A.

1-c)

Equivalente di Thevenin ai morsetti A-B.

Ragionando nel dominio dei fasori:

$$\widetilde{V}_{eq} = \widetilde{V}_{AC}\Big|_{\widetilde{I}=0} = \widetilde{V}_{AB}\Big|_{\widetilde{I}=0} \;\Rightarrow\; \widetilde{V}_{AB} = -\widetilde{V}_0 \frac{R_2 + j\omega L_2}{R_2 + j\omega L_2 + R_1 + (1/j\omega C_1)} = -10^{\angle 0^\circ} V$$

Per quanto riguarda l'impedenza equivalente, considerando $Z_1 = R_1 + (1/j\omega C_1) = 1 - j$, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = 1 + j$, $Z_3 = (1/j\omega C_3) = -j$, $Z_4 = R_4//(j\omega L_4) = j/(1+j)$ si ottiene:

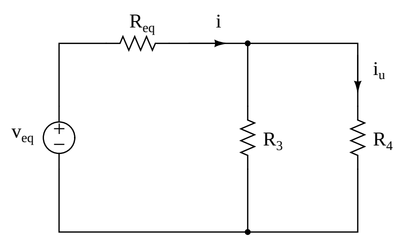
$$Z_{eq} = Z_4 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{2+j}{1+j} = (1.5 - j0.5)$$

La corrente di corto circuito puo' essere quindi ottenuta semplicemente: $\widetilde{I} = -\frac{\widetilde{V}_{eq}}{Z_{eq}} = 2\sqrt{10}e^{j\arctan(1/3)}$

Nel dominio del tempo si avra': $i(t) = 2\sqrt{10}\cos(t + 18.43^\circ)$

2-a)

Poiche' si e' a regime, il condensatore e' assimilabile ad un circuito aperto, mentre l'induttore e' equivalente ad un cortocircuito; risulta conveniente calcolare l'equivalente di Thevenin a monte del resistore R_3 ottenendo banalmente: $V_{eq} = v_{01}\frac{R_2}{R_1 + R_2} - v_{02} = \frac{v_{01}}{2} - 2$, $R_{eq} = R_1//R_2 = 1k\Omega$. Il circuito da considerare risulta quindi:



$i_u = i\frac{G_4}{G_3 + G_4} = i\frac{R_3}{R_3 + R_4}$, $i = i_u\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) = 2i_u = 14$mA.

Risulta evidente che $i = \frac{v_{eq}}{R_{eq} + R_3//R_4}$, da cui:

$$v_{eq} = \frac{v_{01}}{2} - 2 = (R_{eq} + R_3//R_4)\,i \;\Rightarrow\; v_{01} = 2\left[2 + (R_{eq} + R_3//R_4)\,i\right] = 74V$$

2-b)

a. Un esempio di albero (insieme di rami che tocca tutti i nodi ma che non forma percorsi chiusi) e' $\Re_a = \{4, 5, 6, 8, 9\}$

b. Un esempio di taglio NON nodale e' $\Re_b = \{1, 3, 6, 10, 11, 13\}$ che congiunge i due insiemi di nodi $\aleph_1 = \{A, B, C\}$ e $\aleph_2 = \{D, E, F\}$

c. L'unico taglio nodale che e' anche un albero e' quello relativo al nodo F, ossia $\Re_c = \{1, 3, 7, 8, 13\}$