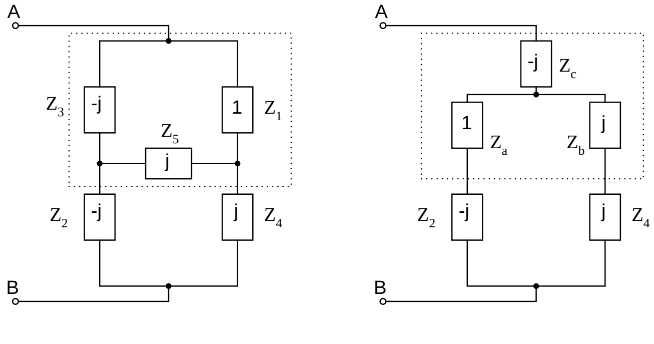
Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 4 settembre 2001

1-a)



(a) (b)

Per risolvere il problema e' sufficiente determinare la impedenza equivalente secondo Thevenin che si vede alla sezione A-B. Per fare questo e' sufficiente ridisegnare la rete come da figura (a) e quindi applicare una trasformazione triangolo-stella ottenendo il circuito di figura (b); a questo punto e' banale calcolare $Z_{eq} = Z_c + (Z_a + Z_2)//(Z_b + Z_4) = (2 - j)$.Da qui si ottiene facilmente che $P = 20$W.

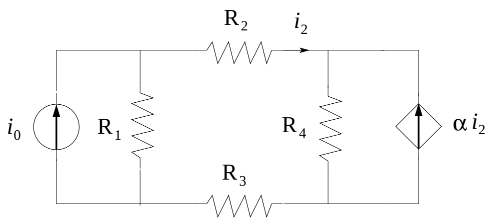
(Alternativamente, si puo' calcolare $Z_{eq} = \widetilde{V}_{AB}/\widetilde{I}$ supponendo di collegare tra i morsetti A e B un generatore impressivo di corrente sinusoidale $\widetilde{I}$. Conviene risolvere la rete cosi' ottenuta mediante il metodo di analisi su base nodo, assumendo per esempio il nodo B quale riferimento. Le ammettenze relative ai componenti della rete sono $Y_1 = 1$, $Y_2 = Y_3 = j$ e $Y_4 = Y_5 = -j$, per cui, indicando con 1 il nodo B e con 2 e 3 i nodi superiore ed inferiore a cui e' collegata L_5, il sistema da risolvere diviene:

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_1 & -Y_2 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_4 + Y_5 & -Y_5 \\ -Y_2 & -Y_5 & Y_2 + Y_3 + Y_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{V}_1 \\ \widetilde{V}_2 \\ \widetilde{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{I} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene $\widetilde{V}_1 = \widetilde{V}_{AB} = \widetilde{I}(2-j)$ e quindi $Z_{eq} = (2-j)$, $P = 20$W, che e' il risultato ottenuto precedentemente.)

1-b)

Il trasformatore ideale caricato da R_8 equivale ad un resistore di resistenza 600Ω che in parallelo a R_7 equivale ad un resistore $R_a = 300\Omega$. Si osserva poi facilmente che R_5, R_6 ed R_a sono in serie ad un generatore di corrente e quindi non hanno alcun effetto. Quindi il circuito equivale a quello riportato in figura.



Si puo' allora osservare che R_2 e R_3 costituiscono un taglio e quindi il circuito conserva la medesima soluzione rimpiazzando R_2 con un resistore di resistenza $R_2 + R_3$ e R_3 con un cortocircuito. Per arrivare alla soluzione basta per esempio sostituire il generatore reale di corrente (cioe' i_0 e R_1) col corrispondente generatore di tensione e scrivere la LKV alla unica maglia rimasta ottenendo

$$R_1 i_0 = (R_1 + R_2 + R_3) i_2 + R_4 (1+\alpha) i_2$$

da cui si ottiene $i_2 = 1.5\text{mA}$.

1-c)

Il condensatore di capacita' C_5 che si trova in serie al generatore di corrente non ha ovviamente alcun effetto e puo' essere eliminato. Conviene innanzitutto determinare la matrice impedenza del due porte resistivo costituito da R_2, R_3 e dal generatore di corrente. Si ha immediatamente che $i_2 = (i_a + i_b)/(1+\alpha)$, e quindi che

$$\begin{bmatrix} \frac{R_2}{1+\alpha} & \frac{R_2}{1+\alpha} \\ \frac{R_2}{1+\alpha} - \frac{R_3\alpha}{1+\alpha} & \frac{R_2+R_3}{1+\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Tenendo conto che $Z_4 = -j/\omega$ e' in serie al terminale comune e che $Z_1 = 2j\omega$ e' in serie alla porta di ingresso si ha:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{1+\alpha} + \frac{2j}{\omega} - \frac{j}{\omega} & \frac{R_2}{1+\alpha} - \frac{j}{\omega} \\ \frac{R_2}{1+\alpha} - \frac{R_3\alpha}{1+\alpha} - \frac{j}{\omega} & \frac{R_2+R_3}{1+\alpha} - \frac{j}{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} + \frac{j}{\omega} & \frac{1}{6} - \frac{j}{\omega} \\ -\frac{3}{2} - \frac{j}{\omega} & \frac{1}{2} - \frac{j}{\omega} \end{bmatrix}$$

2-a)

Il circuito opera in regime sinusoidale multifrequenziale. Pertanto occorre applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, facendo operare un solo generatore per volta. Per determinare la tensione $v_4(t)$ nei singoli casi, e' sufficiente applicare il teorema di Millmann.

1. $v_{02} = 0\text{V}$, $v_{03} = 0\text{V}$, $\omega_3 = 0$ rad/s; essendo in corrente continua, l'induttore puo' essere sostituito con un corto circuito e il condensatore con un circuito aperto. Si ottiene facilmente $v_4'(t) = \frac{v_{01}/R_1}{1/R_1+1/R_2+1/R_3+1/R_4} = 3V$.

2. $v_{01} = 0\text{V}$, $v_{03} = 0\text{V}$, $\omega_2 = 1$ rad/s; il fasore relativo al generatore v_{02} e' dato da $\widetilde{V}_{02} = (1+j)$; R_2 e L_2 formano una impedenza serie pari a $Z_2' = R_2 + j\omega_2 L_2 = 2(1+j)$ mentre R_3 e C_3 formano una impedenza parallelo pari a $Z_3' = R_3//(1/j\omega_2 C_3) = (1-j)$. Si ottiene facilmente $\widetilde{V}_4'' = \frac{\widetilde{V}_{02}/Z_2'}{1/R_1+1/Z_2'+1/Z_3'+1/R_4} = 0.24e^{-j0.12}$, da cui, passando nel dominio dei tempi, $v_4''(t) = 0.24\cos(t-0.12)\text{V}$. (Gli angoli si intendono espressi in radianti).

3. $v_{01} = 0\text{V}$, $v_{02} = 0\text{V}$, $\omega_3 = 3\text{rad/s}$; il fasore relativo al generatore v_{03} e' dato da $\widetilde{V}_{03} = (1+j\sqrt{3})/10$; R_2 e L_2 formano una impedenza serie pari a $Z_2'' = R_2 + j\omega_3 L_2 = 2(1+j3)$ mentre R_3 e C_3 formano una impedenza parallelo pari a $Z_3'' = R_3//(1/j\omega_3 C_3) = (1-j3)/5$. Si ottiene facilmente $\widetilde{V}_4''' = \frac{\widetilde{V}_{03}/Z_3''}{1/R_1+1/Z_2''+1/Z_3''+1/R_4} = 0.14e^{j1.67}$, da cui, passando nel dominio dei tempi, $v_4'''(t) = 0.14\cos(t+1.67)\text{V}$.

Quindi, si ottiene $v_4(t) = v_4'(t) + v_4''(t) + v_4'''(t) = [3 + 0.24\cos(t-0.12) + 0.14\cos(3t+1.67)]\,\text{V}$

2-b)

Nell'intervallo $[0, t_1]$, dato che i 3 resistori si trovano in serie ad un generatore di corrente, si ha semplicemente la carica del condensatore di capacita' C_3 a corrente costante. Pertanto si ha:

$v_{C_3}(t) = v_{C_3}(0) + \frac{i_0}{C_3}t$

da cui si ottiene che $v_{C_3}(t) = 10V$. Quindi quando T_1 viene aperto e T_2 chiuso si ottiene un circuito in cui $v_{C_3}(t_1) = v_{C_4}(t_1) = v_{C_4}(0) = 10V$ per cui la corrente che fluisce nel circuito e' nulla per $t > t_1$. Pertanto $v_{C_4}(t) = v_{C_4}(0) = 10V$ per ogni $t \in [0, \infty)$.