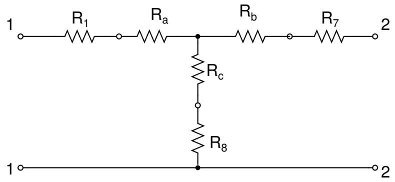
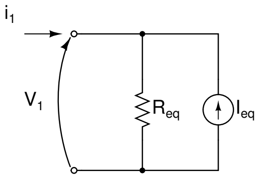
<u>Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 2 luglio 2002</u>

1-a)

Si nota che le resistenze R_2 e R_3 sono in serie cosi' come le resitenze R_4 e R_5; conviene operare una trasformazione triangolo-stella passando dal triangolo $(R_2 + R_3)$, R_6, $(R_4 + R_5)$ alla stella R_a, R_b, R_c mostrata in figura.





(b)

Si ottiene $R_a = \frac{R_6(R_2+R_3)}{R_6+(R_2+R_3)+(R_4+R_5)} = \frac{6(3+3)}{6+(3+3)+(3+3)} = 2\Omega$, $R_b = \frac{R_6(R_4+R_5)}{R_6+(R_2+R_3)+(R_4+R_5)} = 2\Omega$, $R_c = \frac{(R_2+R_3)(R_4+R_5)}{R_6+(R_2+R_3)+(R_4+R_5)} = 2\Omega$.

Il circuito quindi puo' essere ricondotto ad un'unica stella di resistenze $R_a^{'} = (R_a + R_1) = 12\Omega$, $R_b^{'} = (R_b + R_7) = 12\Omega$, $R_c^{'} = (R_c + R_8) = 12\Omega$.

La matrice resistenze si ottiene quindi come $\underline{R} = \begin{bmatrix} R_a^{'} + R_c^{'} & R_c^{'} \\ R_c^{'} & R_b^{'} + R_c^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 12 \\ 12 & 24 \end{bmatrix} \Omega$.

Per calcolare l'equivalente di Norton, conoscendo la matrice resistenza, risulta conveniente calcolare prima l'equivalente di Thevenin alla porta 1. Alla porta 2 vale $V_0 - R_0 I_2 = V_2$ (essendo la corrente I_2 entrante nel morsetto del due porte), da cui:

$$\begin{cases} V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 \\ V_2 = V_0 - R_0 I_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2 \end{cases} = \begin{cases} V_1 = (R_{11} - \frac{R_{21}R_{12}}{R_0+R_{22}})I_1 + \frac{R_{12}V_0}{R_0+R_{22}} \\ I_2 = \frac{V_0 - R_{21}I_1}{R_0+R_{22}} \end{cases}$$

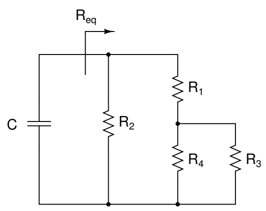
da cui si ricava $V_1 = R_{eq}I_1 + V_{th}$ con $R_{eq} = R_{11} - \frac{R_{21}R_{12}}{R_0+R_{22}} = 20\Omega$ e $V_{th} = \frac{R_{12}V_0}{R_0+R_{22}} = 2\text{V}$.

L'equivalente di Norton si ottiene immediatamente, essendo $I_{eq} = V_{th}/R_{eq} = 100\text{mA}$ e $G_{eq} = 1/R_{eq} = 50\text{mS}$.

Alternativamente, considerando la figura (b), si puo' scrivere $I_1 = V_1 G_{eq} - I_{eq}$; dalle relazioni ricavate in precedenza si ha $I_1 = \frac{R_o+R_{22}}{R_{11}R_0+R_{11}R_{22}-R_{21}R_{12}}V_1 - \frac{R_{12}}{R_{11}R_0+R_{11}R_{22}-R_{21}R_{12}}V_0 = (0.05)V_1 - 0.1$ da cui segue nuovamente $I_{eq} = 100\text{mA}$ e $G_{eq} = 50\text{mS}$.

1-b)

Per $t = 0^-$ il condensatore e' a regime ed e' quindi assimilabile ad un circuito aperto. Applicando il partitore di tensione si ottiene $v_C(0^-) = \frac{R_2}{R_1+R_2}V_0 = 2\text{V}$ e $i_{R2}(0^-) = \frac{V_0}{R_1+R_2} = 1\text{mA}$.
Per $t > 0$ il circuito da studiare e' quello mostrato in figura.

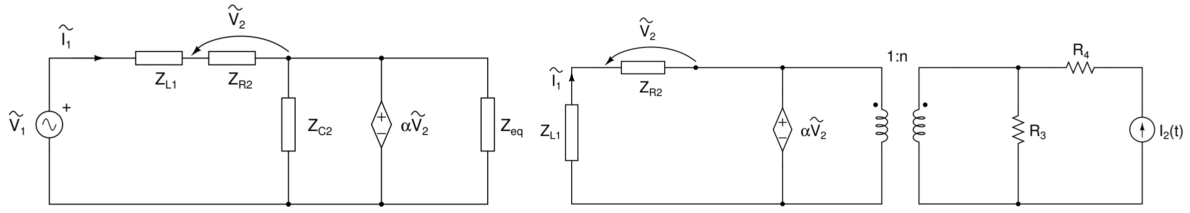


La resistenza equivalente R_{eq} vista dai morsetti del condensatore vale $R_{eq} = R_2//(R_1 + R_3//R_4) = \frac{4}{3}k\Omega$. La tensione sul condensatore vale $v_C(t) = v_C(0^+)e^{-\frac{t}{R_{eq}C}}$, percio' $i_{R2}(t) = \frac{v_C(t)}{R_2} = \frac{v_C(0^+)}{R_2}e^{-\frac{t}{R_{eq}C}}$ da cui, essendo $v_C(0^+) = v_C(0^-)$ si ottiene:

$i_{R2}(t) = e^{-\frac{3}{4}10^3 t}\text{mA}$.

1-c)

Il circuito e' in regime multifrequenziale, per cui e' necessario applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.
a) generatore $i_2(t)$ spento (circuito aperto), generatore $v_1(t)$ acceso: $\omega^{'} = \omega_1 = 2$ rad/sec.
il circuito da considerare e' quello mostrato in figura (a).



(a) (b)

Le impedenze valgono $Z^{'}_{L1} = j\omega_1 L_1 = 2j$, $Z^{'}_{C2} = 1/(j\omega_1 C_2) = -0.5j$, mentre Z_{eq} e' l'impedenza che si vede a monte del trasformatore. Poiche' sia Z_{eq} che $Z^{'}_{C2}$ sono in parallelo ad un generatore di tensione, non influiscono al calcolo della corrente $\widetilde{I}^{'}_1$, quindi possono essere rimosse. Si ottiene quindi un circuito costituito da un'unica maglia in cui vale $\widetilde{I}^{'}_1 = \frac{\widetilde{V}_1 - \alpha\widetilde{V'}_2}{Z^{'}_{L1}+R_2}$; d'altronde, applicando il partitore di tensione, si ha che $\widetilde{V'}_2 = \frac{R_2}{Z^{'}_{L1}+R_2}(\widetilde{V}_1 - \alpha\widetilde{V'}_2)$ da cui si ricava $\widetilde{V'}_2 = \frac{R_2}{Z^{'}_{L1}+(1+\alpha)R_2}\widetilde{V}_1$. Sostituendo si ottiene $\widetilde{I}^{'}_1 = \frac{\widetilde{V}_1}{Z^{'}_{L1}+(1+\alpha)R_2} = \frac{8-j2}{68}\text{A} = \frac{1}{\sqrt{68}}{}^{\angle -14.036^o} = \frac{1}{\sqrt{68}}e^{-j0.245}$ e quindi $i^{'}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{68}}\cos(2t - 0.245)$ A (essendo $\widetilde{V}_1 = 1$V).

b) generatore $i_2(t)$ acceso, generatore $v_1(t)$ spento (corto circuito): $\omega^{''} = \omega_2 = 1$ rad/sec.
Le impedenze valgono $Z^{''}_{L1} = j\omega_2 L_1 = j$, $Z^{''}_{C2} = 1/(j\omega_2 C_2) = -j$.

Considerando la maglia costituita da $Z^{''}_{L1}$, Z_{R2} e dal generatore dipendente $\alpha\widetilde{V}^{''}_2$, si ottiene la relazione $\widetilde{V}^{''}_2 = \frac{R_2}{R_2+Z^{''}_{L1}}\alpha\widetilde{V}^{''}_2$ da cui si evince immediatamente $\widetilde{V}^{''}_2 = 0$V. Essendo la tensione ai capi della resitenza R_2 nulla, la corrente su tale ramo sara' nulla anch'essa, essendo $\widetilde{I}^{''}_1 = \frac{\widetilde{V}^{''}_2}{R_2} = 0$A. Quindi, banalmente, $i^{''}_1(t) = 0$ A. (Nota: la corrente che raggiunge il primario del trasformatore scorre TUTTA sul generatore dipendente, che impone tensione nulla, ossia e' un corto circuito).

In conclusione, $i_1(t) = i^{'}_1(t) + i^{''}_1(t) = i^{'}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{68}}\cos(2t - 0.245)$ A $\cong 0.124\cos(2t - 0.245)$A.

2-a)

Essendo l'operazionale ideale, si ha $V_+ = V_-$; la corrente che scorre su R_2 verso massa, e' quindi $\widetilde{I}_{R2} = \widetilde{V}_-/R_2 = \widetilde{V}_1/R_2$. Essendo la corrente di ingresso dell'operazionale nulla, tale corrente scorre anche nel parallelo $Z_3 = R_3//Z_{C3} = \frac{R_3}{1+j\omega C_3 R_3}$, per cui si puo' scrivere $\frac{\widetilde{V}_o}{\widetilde{V}_1} = \frac{R_2\widetilde{I}_{R2}+Z_3\widetilde{I}_{R2}}{\widetilde{V}_1} = \frac{R_2+R_3+j\omega C_3 R_3 R_2}{R_2(1+j\omega R_3 C_3)} = \left(1+\frac{R_3}{R_2}\right)\left(\frac{1+j\omega C_3(R_2//R_3)}{1+j\omega C_3 R_3}\right)$.

2-b)

Le variabili indipendenti risultano essere le variabili di controllo dei generatori dipendenti ($i_1(t)$ e $v_2(t)$), quindi le relazioni a parametri ibridi si scrivono come $v_1(t) = h_{11}i_1(t) + h_{12}v_2(t)$ e $i_2(t) = h_{21}i_1(t) + h_{22}v_2(t)$; d'altronde dal circuito risulta evidente che $v_1(t) = v_2(t)/n$ e $i_2(t) = i_1(t)/n$ per cui dal confronto con le equazioni precedenti si ottiene immediatamente $h_{11} = h_{22} = 0$ e $h_{12} = h_{21} = 1/n$, che e' la matrice a parametri ibridi di un trasformatore ideale.