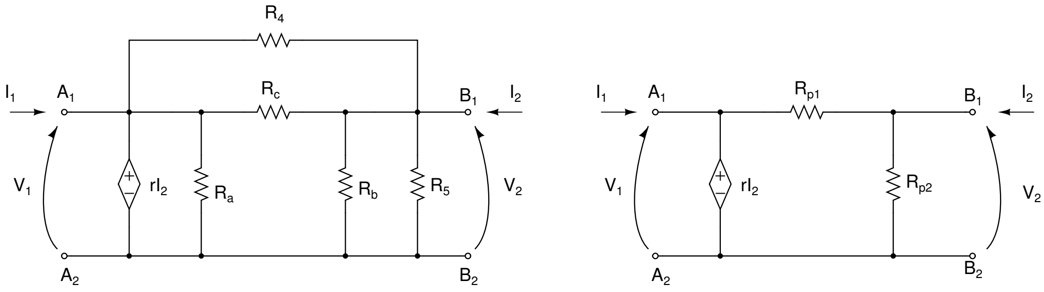
Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 23 luglio 2002

1-a) Conviene operare una trasformazione stella-triangolo passando dalla stella R_1, R_2, R_3 al triangolo R_a, R_b, R_c mostrato in figura (a). Si ottiene $G_a = \frac{G_1 G_3}{G_1+G_2+G_3} = \frac{(1/2)(1/2)}{1/2+1/2+1/2} = \frac{1}{6}\mathrm{S}$, $G_b = \frac{G_2 G_3}{G_1+G_2+G_3} = \frac{1}{6}\mathrm{S}$, $G_c = \frac{G_1 G_2}{G_1+G_2+G_3} = \frac{1}{6}\mathrm{S}$, da cui si ricava immediatamente $R_a = 1/G_a = 6\Omega$, $R_b = 1/G_b = 6\Omega$, $R_c = 1/G_c = 6\Omega$.



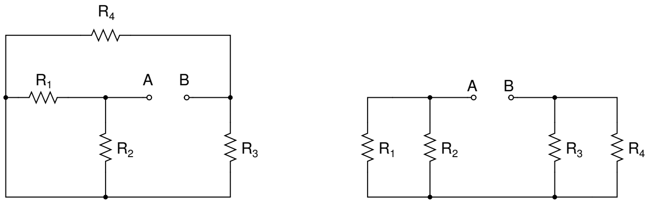
(a) (b)

Si nota inoltre che R_a e' in parallelo ad un generatore di tensione, per cui puo' essere rimossa, mentre R_b e R_c sono in parallelo rispettivamente a R_5 e a R_4. Si ottiene quindi il circuito di figura (b), dove $R_{p1} = R_4//R_c = 3\Omega$, $R_{p2} = R_5//R_b = 3\Omega$.

Risulta immediato ricavare l'espressione della tensione alla porta di ingresso: $v_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 = ri_2$ da cui segue $R_{11} = 0\Omega$, $R_{12} = r$. La corrente che scorre nella resistenza R_{p2} e' data da $i_{Rp2} = i_2 + i_{Rp1} = i_2 + \frac{(v_1 - v_2)}{R_{p1}}$ e quindi $v_2 = R_{p2}i_{Rp2} = R_{p2}i_2 + \frac{R_{p2}}{R_{p1}}(v_1 - v_2)$. Sostituendo: $v_2 = \frac{R_{p1}+r}{R_{p1}+R_{p2}}R_{p2}i_2$ da cui si ottiene $R_{21} = 0\Omega$ e $R_{22} = \frac{R_{p1}+r}{R_{p1}+R_{p2}}R_{p2}$. La matrice delle resistenze del due porte sara' quindi $\underline{R} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & \frac{R_{p1}+r}{R_{p1}+R_{p2}}R_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\Omega$.

Per calcolare l'equivalente di Thevenin alla porta 1 quando il generatore reale viene collegato alla porta di uscita, si ha che, essendo $v_2 = V_0 - R_0 i_2$, l'equazione per v_2 precedentemente calcolata fornisce $i_2 = \frac{V_0}{\frac{R_{p1}+r}{R_{p1}+R_{p2}}R_{p2}+R_0}$ che sostituita nell'equazione relativa alla porta di ingresso $v_1 = \frac{rV_0}{\frac{R_{p1}+r}{R_{p1}+R_{p2}}R_{p2}+R_0} = 5\mathrm{V}$. Risulta evidente quindi che l'equivalente di Thevenin e' costituito da un generatore indipendente di tensione di valore pari a $V_{eq} = 5\mathrm{V}$ ($R_{eq} = 0\Omega$).

1-b) Per $t = 0^-$ il condensatore e' a regime ed e' quindi assimilabile ad un circuito aperto; si ottiene quindi $v_C(0^-) = v_{R2} - V_1 = \frac{R_2}{R_2+R_1+R_4}V_1 - V_1 = -2.4\mathrm{V}$.



(a) (b)

Il condensatore raggiunge un nuovo regime per $t \to \infty$; essendo a regime $i_C = 0$ si ottiene $v_C(+\infty) = V_{R2}(+\infty) - V_{R3}(+\infty) = V_0\left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_3}{R_3+R_4}\right) = 0\mathrm{V}$. Si ha uindi una scarica del condensatore $v_C(t) = v_C(0^-)e^{-t/\tau}$ con $\tau = R_{eq}C$, essendo R_{eq} la resistenza che si vede ai capi del condensatore per $t > 0$. Il circuito da cosiderare ai fini del calcolo di tale resistenza e' quello di figura (a), che puo' essere ridisegnato ottenendo quello di figura (b).

La resistenza equivalente R_{eq} vista dai morsetti del condensatore vale $R_{eq} = (R_2//R_1) + (R_3//R_4) = 3k\Omega$. Si ha quindi $\tau = 3$ sec e $v_C(t) = -2.4e^{-t/3}$.

1-c)

Il circuito lavora in regime sinusoidale; si ha: $\widetilde{I}_0 = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}) = (1-j)\mathrm{A}$, $\widetilde{V}_1 = (1+j)V$, $Z_{L1} = j\Omega$, $Z_{C2} = -2j\Omega$.

Dall'equazione delle correnti di nodo di Kirchoff, si ha: $\widetilde{I}_{C2} = \widetilde{I}_3 + \widetilde{I}_{L1} = -\widetilde{I}_1 + \left(\frac{\widetilde{V}_1 - r\widetilde{I}_3 - \widetilde{I}_{C2}}{Z_{L1}}\right)$ dove con $\widetilde{I}_1$ e' stata indicata la corrente ENTRANTE nel morsetto del trasformatore; indicando con $\widetilde{I}_2$ la corrente del secondario del trasformatore, applicando le equazioni caratteristiche del trasformatore, e condiderando che $\widetilde{I}_3 = -\widetilde{I}_1$ si ottiene quindi $\widetilde{I}_{C2} = -(-n\widetilde{I}_2) + \left(\frac{\widetilde{V}_1 - rn\widetilde{I}_2 - \widetilde{I}_{C2}}{Z_{L1}}\right) = n\widetilde{I}_0 + \left(\frac{\widetilde{V}_1 - rn\widetilde{I}_0 - \widetilde{I}_{C2}}{Z_{L1}}\right)$ da cui si ricava $\widetilde{I}_{C2} = \frac{\widetilde{V}_1 - nr\widetilde{I}_0(Z_{L1}-1)}{Z_{L1}+Z_{C2}} = (-5+j)$ A $= \sqrt{26}^{\angle 168.69^\circ}$ A $= \sqrt{26}e^{j2.944}$A da cui $i_{C2}(t) = \sqrt{26}\cos(t + 2.944)$A

2-a)

Essendo l'operazionale ideale, si ha $V_+ = V_-$;

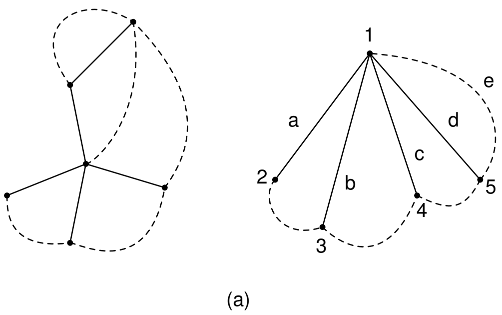
1) la corrente che scorre su R_2 e' nulla, per cui $V_u = V_- = V_+$ e $V_+ = V_0\frac{R_3}{R_1+R_3}$ quindi $k = \frac{R_3}{R_1+R_3}$;

2) $V_- = V_+ = 0\mathrm{V}$ per cui $I_{R1} = V_0/R_1$ che e' la corrente che attraversa R_2, per cui $V_u = -R_2 I_{R1} = -(R_2/R_1)V_0$ da cui $k = -\frac{R_2}{R_1}$;

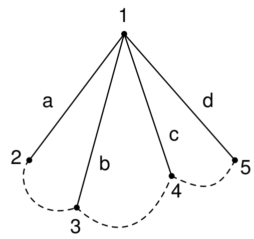
3) essendo $V_- = V_+ = 0\mathrm{V}$ ed essendo nulla la corrente sulla resistenza R_2 si ha $V_u = V_- = V_+ = 0\mathrm{V}$ da cui $k = 0$.

2-b)

Esempi di grafi in cui l'albero definisce un coalbero che e' a sua volta un albero sono mostrati in figura (a) (albero in tratto continuo); in figura (b) e' mostrato un taglio nodale che e' anche un albero. Non e' possibile che un taglio nodale/albero ammetta un coalbero che sia anche un albero. Infatti, per definizione di taglio nodale, TUTTI i rami collegati al nodo fanno parte del taglio; questo significa che il coalbero non puo' toccare il nodo in questione, per cui non potendo toccare TUTTI i nodi, viene meno una condizione necessaria per essere un albero. (Nella figura (b), il nodo 1 non viene raggiunto dal coalbero)



(a)



(b)