Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 6 settembre 2002

1-a)

1) Sfruttando la definizione dei parametri resistenza del due porte, si ottiene:

$R_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0} = R_1//(R_2+R_3+R_4) = 8k\Omega,$

$R_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0} = \frac{R_1[i_2R_3/(R_1+R_2+R_3+R_4)]}{i_2} = 4k\Omega,$

$R_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0} = \frac{R_3[i_1R_1/(R_1+R_2+R_3+R_4)]}{i_1} = 4k\Omega,$

$R_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0} = R_3//(R_1+R_3+R_4) = 8k\Omega,$

da cui si ricava $\overline{R} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} k\Omega.$

2) Poiche' la rete e' formata da resistori, la resistenza equivalente al primario puo' essere calcolata semplicemente come $R_{eq} = R_1//[R_2+R_4+(R_3//R_0)] = 7.2k\Omega$.

3) Considerando il generatore V_0 collegato direttamente alla resistenza equivalente calcolata in precedenza, la potenza dissipata dall'intero circuito e' data dalla potenza dissipata da tale resistenza equivalente; si ha quindi $P = \frac{V_0^2}{R_{eq}} = 5m$W da cui si ricava $V_0 = \pm\sqrt{5\cdot 10^{-3}\cdot 7.2\cdot 10^3} = \pm 6$V.

1-b)

Il circuito lavora in regime sinusoidale; le impedenze valgono (essendo $\omega = 1$rad$/sec$) $Z_3 = \frac{R_3}{1+j\omega R_3C_3} = \frac{20}{1+j2\cdot 10^{-5}}$ e $Z_4 = \frac{R_4}{1+j\omega R_4C_4} = \frac{10}{1+j2\cdot 10^{-5}}$, e $\widetilde{I}_0 = 6$A.

Risulta evidente che $\widetilde{I}_0 = \widetilde{I}_1 + \widetilde{I}_2$; vale inoltre la seguente relazione $r_1\widetilde{I}_2 + R_1\widetilde{I}_1 + Z_3\widetilde{I}_1 = r_2\widetilde{I}_1 + R_2\widetilde{I}_2 + Z_4\widetilde{I}_2$. Sostituendo i valori numerici delle impedenze nella precedente equazione ed esplicitando si ottiene $\widetilde{I}_2 = 2\widetilde{I}_1$ da cui, sfruttando la relazione con la corrente $\widetilde{I}_0$, si ricava $\widetilde{I}_1 = \widetilde{I}_0/3 = 2$A e $\widetilde{I}_2 = 2\widetilde{I}_0/3 = 4A$.

1. $\widetilde{V}_1 = r_1\widetilde{I}_2 + R_1\widetilde{I}_1 = (2r_1+R_1)\widetilde{I}_1 = (2r_1+R_1)\frac{\widetilde{I}_0}{3}$ da cui si ricava $\frac{\widetilde{V}_1}{\widetilde{I}_0} = (2r_1+R_1)/3 = 10\Omega$

2. $\widetilde{V}_4 = Z_4\widetilde{I}_2 = \frac{R_4}{(1+j\omega R_4C_4)}\frac{2\widetilde{I}_0}{3}$ da cui si ricava $\frac{\widetilde{V}_4}{\widetilde{I}_0} = \frac{20}{3}\frac{1}{1+j2\cdot 10^{-5}}\Omega$.

3. $\widetilde{V}_0 = \widetilde{V}_4 - Z_3\widetilde{I}_1 = \left[\frac{2R_4}{1+j\omega R_4C_4} - \frac{R_3}{1+j\omega R_3C_3}\right]\frac{\widetilde{I}_0}{3}$ da cui, sostituendo i valori numerici si ottiene $\widetilde{V}_0 = 0$V e quindi $\frac{\widetilde{V}_0}{\widetilde{I}_0} = 0\Omega$.

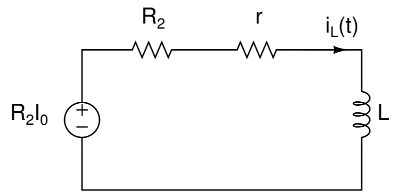
1-c)

Il resistore R_1 e' in serie ad un generatore di corrente e puo' essere rimosso.

Per $t < 0$ il circuito lavora a regime, per cui l'induttore e' assimilabile ad un corto circuito. La corrente che attraversa l'induttore e' quindi data da $i_L(0^-) = I_0\frac{R_2}{R_2+R_3} = 6$A. La corrente richiesta puo' essere calcolata come $i_u(t) = \frac{V_{R6}}{R_6} = \left[\frac{ri_L(R_5//R_6)}{R_4+R_5//R_6}\right]\frac{1}{R_6} = i_L(t)$ per cui $i_u(t) = 6$A per $t < 0$.

Per $t > 0$ conviene calcolare l'equivalente di Thevenin a valle della sezione AA; il resistore R_3 e la serie di resistori $(R_4+R_5//R_6)$ sono ininfluenti al calcolo della resistenza equivalente, essendo in parallelo ad un generatore di tensione. Si ottiene quindi banalmente $R_{eq} = r$.

Trasformando il generatore reale di corrente (I_0, R_2) in generatore reale di tensione si ottiene il circuito di figura



Risulta evidente che $R_{eq} = R_2 + r = 4\Omega$ da cui $\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 1$sec. Inoltre, $i_L(+\infty) = \frac{R_2 I_0}{R+r} = 3$A da cui si ricava $i_L(t) = i_L(+\infty) - (i_L(+\infty) - i_L(0))e^{-t/\tau} = 3\,(1 + e^{-t})\,A$.

Poiche' la relazione $i_u(t) = i_L(t)$ risulta ancora verificata, si ha $i_u(t) = 3\,(1 + e^{-t})\,A$ per $t > 0$.

2-a)

Essendo gli operazionali ideali, si ha $V_+ = V_-$; dall'operazionale 1 si ottiene $V_i = V_+^{(1)} = V_-^{(1)} = V_{o2}$.

Dall'operazionale 2 si ottiene $V_i = V_+^{(2)} = V_-^{(2)}$ ed essendo anche $V_{o2} = V_i$ la differenza di potenziale sul resistore R_2 e' nulla per cui lo e' anche la corrente che lo attraversa. Essendo gli operazionali ideali, si ha $i_-^{(2)} = 0$ per cui $i_{R1} = i_-^{(2)} + i_{R2} = 0$ per cui anche la corrente su R_1 e' nulla.

Si ottiene quindi $V_{o1} = V_-^{(2)} - R_1 i_{R1} = V_-^{(2)} = V_i$.

2-b)

I bipoli I_1, R_1, I_2, R_2 e il ramo su cui scorre i_x formano un taglio; vale quindi $-i_x + I_1 + I_2 + i_{R1} + i_{R2} = 0$ dove le correnti sui resistori si intendono con verso concorde ai generatori indipendenti. Essendo $i_{R2} = V_1/R_2 = 1$A e $i_{R1} = \frac{V_{R1}}{R_1} = \frac{V_1-(V_0+V_2)}{R_1} = -3$A si ottine $i_x = 0$A.