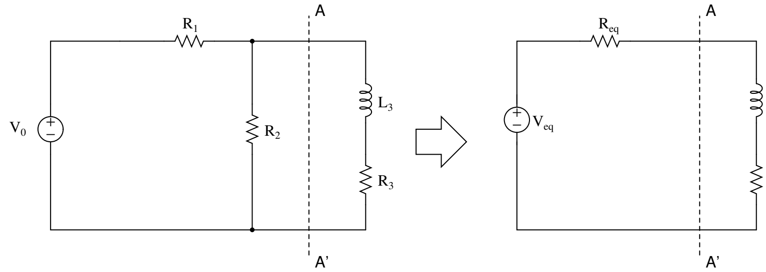
Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 30 gennaio 2002

1-a)

1. Per $t < 0$, dato che nella rete si e' gia' instaurato un regime stazionario, L_3 si comporta come un cortocircuito e quindi $i_{L_3}(0^-) = -\frac{V_1}{R_3} = -1$A.

2. In questo caso occorre considerare la rete per $t > 0$ dato che la presenza di un induttore non mantiene alcuna condizione sulla continuita' di di/dt.



Calcolando l'equicvalente di Thevenin a monte della sezione AA' si ottiene il circuito mostrato nella parte destra della figura dove $V_{eq} = V_0 \frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{V_0}{2} = 3$ V e $R_{eq} = R_1 // R_2 = 1\Omega$. Per tale circuito, vale la seguente relazione:

$$V_{eq} - (R_{eq} + R_3)\, i_{L_3}(t) - L_3 \frac{\mathrm{d}i_{L_3}(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Calcolando per $t = 0^+$ si ottiene $\frac{\mathrm{d}i_{L_3}(0^+)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L_3}\left[V_{eq} - (R_{eq} + R_3)\, i_{L_3}(0^+)\right] = \frac{1}{3}[3+3] = 2$ A/sec.

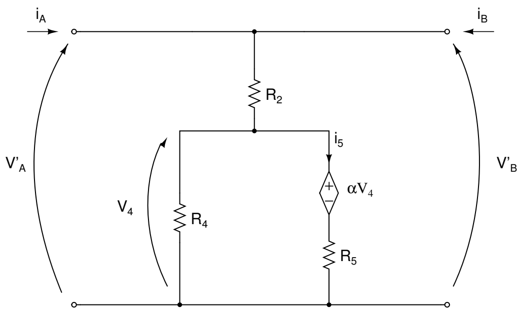
3. Sfruttando nuovamente l'equivalente di Thevenin, si ottiene un semplice circuito R-L dove $R = (R_{eq} + R_3)$, quindi:

$$i_{L_3}(t) = i_{L_3}(+\infty) + [i_{L_3}(0) - i_{L_3}(+\infty)]\, e^{-t/\tau}$$

dove $\tau = \frac{L_3}{R} = 1$sec, $i_{L_3}(0) = -1$A, mentre $i_{L_3}(+\infty)$ e' la corrente che scorre nel circuito quando si e' raggiunto un nuovo regime, ossia L_3 e' nuovamente assimilabile ad un cortocircuito e $i_{L_3}(+\infty) = \frac{V_{eq}}{R} = \frac{3}{(1+2)} = 1$A. Si ottiene quindi:

$$i_{L_3}(t) = (1 - 2\mathrm{e}^{-t})\mathrm{A} \qquad\qquad i_{L_3}(+\infty) = 1\mathrm{A}$$

1-b)



Conviene calcolare dapprima la matrice delle resistenze $\underline{R}'$ del 2-porte rappresentato in figura (ossia a meno delle resistenze R_1 e R_4); v'_A e v'_B sono le tensioni alle porte, mentre le correnti rimangono ovviamente inalterate.

Si puo' osservare che $\alpha v_4 + R_5 i_5 = v_4$, dove $i_5 = (i_A + i_B) - \frac{v_4}{R_4}$ da cui $v_4 = \frac{R_5(i_A+i_B)}{1-\alpha+R_5/R_4} = -\frac{3}{2}(i_A + i_B)$

Inoltre $v'_A = R_2(i_A + i_B) + v_4 = \left(R_2 - \frac{3}{2}\right)(i_A + i_B) = -\frac{1}{2}i_A - \frac{1}{2}i_B$

Essendo ovviamente $v'_A = v'_B$ si ottiene la matrice:

$$\begin{cases} v'_A = -\frac{1}{2}i_A - \frac{1}{2}i_B \\ v'_B = -\frac{1}{2}i_A - \frac{1}{2}i_B \end{cases} \Rightarrow \underline{R}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} (\Omega)$$

La matrice resistenza R puo' quindi essere ottenuta facilmente considerando che le resistenze R_1 e R_3 sono in serie alle porte A' e B' per cui si sommano agli elementi R'_{11} e R'_{22} della matrice :

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} (\Omega)$$

Quando la porta di uscita viene chiusa sulla resistenza R_c, viene imposta la relazione $v_B = -R_c i_B$ e quindi:

$$\begin{cases} v_A = R_{11}i_A + R_{12}i_B \\ v_B = R_{21}i_A + R_{22}i_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_A = R_{11}i_A + R_{12}i_B \\ -R_c i_B = R_{21}i_A + R_{22}i_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_A = \left[R_{11} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_c+R_{22}}\right] i_A \\ i_B = -\frac{R_{21}}{R_c+R_{22}} i_A \end{cases}$$

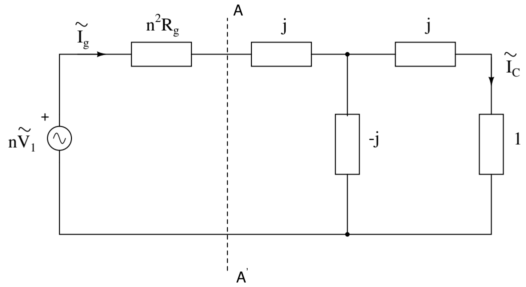
da cui si ottiene $R_{eq} = v_A/i_A = \left[R_{11} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_c+R_{22}}\right] = 0.4\Omega$.

La tesione equivalente di Thevenin e' ovviamente nulla, essendo la rete "inerte" ossia priva di generatori indipendenti.

1-c)

Conviene calcolare l'quivalente di Thevenin a monte della sezione A-A'. La tensione equivalente e' data da $\widetilde{V}_{eq} = \widetilde{V}_{AA'} = n\widetilde{V}_{BB'}$; essendo $\widetilde{I}_A$ (supposta entrante nel trasformatore) nulla, si ha che $\widetilde{I}_B = 0$ (supposta anch'essa entrante nel trasformatore), da cui $\widetilde{V}_{BB'} = \widetilde{V}_1$ e quindi $\widetilde{V}_{eq} = n\widetilde{V}_1$.

La resistenza equivalente e' data da $R_{eq} = \widetilde{V}_{AA'}/\widetilde{I}_A\,|_{\widetilde{V}_1=0} = (n\widetilde{V}_{BB'})/(-\widetilde{I}_B/n) = -n^2\left(\widetilde{V}_{BB'}/\widetilde{I}_B\right)$ da cui, essendo $\widetilde{V}_{BB'} = -R_g\widetilde{I}_B$ si ottiene $R_{eq} = n^2R_g$.



Con riferimento alla figura, $\widetilde{I}_g = n\widetilde{V}_1/Z_{eq}$ dove $Z_{eq} = n^2R_g + j + (-j)//(1+j) = 1 + n^2R_g$; applicando la formula del partitore di corrente, si ha $\widetilde{I}_C = \frac{-j}{-j+(1+j)}\widetilde{I}_g = -j\frac{n\widetilde{V}_1}{1+n^2R_g}$. La potenza dissipata sulla resistenza R_c e' quindi $P_m = \frac{1}{2}R_c\left|\widetilde{I}_C\right|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{(1+4n^2)}\right)^2$ da cui, imponendo $P_m = \frac{1}{32}W$ si ottiene $\left(\frac{n}{(1+4n^2)}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{n}{(1+4n^2)} = \pm\frac{1}{4} \Rightarrow \pm 4n = (1+4n^2) \Rightarrow 4n^2 \mp 4n + 1 = 0$ che risolta porta a $n = \pm 1/2$ ossia $n = \frac{1}{2}$, non essendo accettabile una soluzione negativa.

Essendo $\widetilde{V}_C = R_c\widetilde{I}_C$, e sostituendo il valore di n nella espressione di $\widetilde{I}_C$ trovata in precedenza, si ottiene $\widetilde{V}_C = -\frac{j}{4}$. Guardando dalla sezione B-B' verso valle, si vede una impedenza equivalente data da $Z'_{eq} = \frac{1}{n^2}[j + (-j)//(1+j)] = \frac{1}{n^2} = 4\Omega$; applicando il partitore di tensione al circuito equivalente cosi' ottenuto si ottiene $\widetilde{V}_{BB'} = \widetilde{V}_1\frac{Z'_{eq}}{Z'_{eq}+R_g} = \frac{1}{2}$ da cui segue $\widetilde{V}_C/\widetilde{V}_{BB'} = -\frac{j}{2}$.

2-a)

I bipoli I_0, I_1 e R_C formano un taglio, per cui $I_0 + I_1 - I_{R_C} = 0$ (I_{R_C} definita secondo la convenzione dell'utilizzatore) da cui $I_{R_C} = I_0 + I_1$ <u>indipendentemente dal resto del circuito</u>; la potenza dissipata dalla resistenza sara' quindi in entrambi i casi $P_{R_C} = R_C I_{R_C}^2 = R_C(I_0+I_1)^2 = 4\cdot(5)^2 = 100W$.

(Il generatore di corrente I_0 e' in serie a due sottoreti; <u>ai fini del calcolo di tensioni e correnti su ($R_c//I_1$)</u>, tali sottoreti sono del tutto ininfluenti)