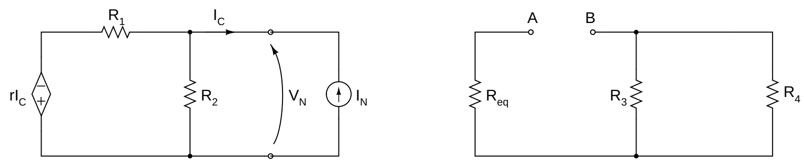
Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 16 dicembre 2004

1-a)

- Si puo' notare che $V_1 = R_1 (1-\beta) I_1$ e $V_2 = R_2 \left(I_2 + \beta I_1 - \alpha \frac{V_1}{R_1} \right)$ da cui si ricava $I_1 = \frac{V_1}{R_1(1-\beta)}$ e $I_2 = \frac{V_2}{R_2} + \left(\alpha + \frac{\beta}{\beta-1} \right) \frac{V_1}{R_1}$. Quindi, essendo $I_1 = G_{11}V_1 + G_{12}V_2$, $I_2 = G_{21}V_1 + G_{22}V_2$ si ottiene
$\underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1(1-\beta)} & 0 \\ \frac{1}{R_1}\left(\alpha + \frac{\beta}{\beta-1}\right) & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{m}\Omega^{-1}$.
- l'equivalente di Thevenin del parallelo di n due porte identici, caratterizzati ciascuno dalla matrice G puo' essere calcolato come il parallelo di n resistenze equivalenti di Thevenin calcolate per ciascun due porte. Se la porta 1 e' aperta, allora $I_1 = 0$ da cui segue $V_1 = G_{11}^{-1} I_1 = 0$ per cui $I_2 = G_{22}V_2$ ossia $R_{eq} = 1/G_{22} = R_2 = 1\text{k}\Omega$. Per ottenere $R_{eq}^{tot} = \frac{R_{eq}}{n} \leq 100\Omega$ occorre ovviamente che $n \geq 10$.

1-b)

Risulta conveniente calcolare l'equivalente di Thevenin a monte di R_2, resistenza compresa come mostrato in figura (a).



(a) (b)

Poiche' il sottocircuito e' inerte, sara' equivalente ad un'unica resitenza R_{eq}. Dalla figura (a) si puo' notare che $rI_C + R_1 \left(\frac{V_N}{R_2} + I_C \right) + V_N = 0$, per cui, essendo $I_C = -I_N$ si ottiene
$V_N = \frac{R_2}{R_1+R_2}(r + R_1) I_N$.

Quindi l'equivalente di Thevenin e' dato dalla sola resistenza $R_{eq} = \frac{R_2}{R_1+R_2}(r + R_1) = 2\text{k}\Omega$.

Per $t < 0$sec l'interruttore T_1 e' chiuso, ed essendo il circuito a regime, il condensatore e' assimilabile ad un circuito aperto. Quindi, non potendo circolare corrente su R_{eq} si ha banalmente $v_C(0) = 0$V.

Per $t > 0$sec l'interruttore T_1 si apre. Calcolando l'equivalente di Thevenin ai morsetti del condensatore, si ha che la tensione equivalente e' banalmente $V_{th} = V_0 \frac{R_3}{R_3+R_4} = 5$V. La resitenza equivalente puo' essere calcolata considerando il circuito di figura (b) ottenendo facilmente
$R_{th} = R_{eq} + R_3 // R_4 = 5\text{k}\Omega$. Si ha pertanto $v_C(t) = v_{C\infty} - (v_{C\infty} - v_C(0))\, e^{-t/\tau}$ dove $v_{C\infty} = -V_{th} = -5$V, $\tau = R_{th}C = 5$msec e $v_C(0) = 0$V. Quindi $v_C(t) = -5 \left[1 - e^{-200t}\right]$ V.

1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha: $\omega = 2\text{rad/sec}$, $v_A(t) = -\sin(2t) = \sin(2t+\pi) = \cos(\pi/2 - 2t - \pi) = \cos(2t + \pi/2)\text{V}$ da cui $\widetilde{V}_A = j\text{V}$, $\widetilde{V}_B = \widetilde{V}_C = (1+j)\text{V}$, $Z_1 = R_1 + Z_{C1} = (1-j)\Omega$, $Z_2 = R_2 + Z_{L2} = (1+j)\Omega$.

Dalle equazioni del giratore, $\widetilde{I}_2 = -G\widetilde{V}_1 = -G(-\widetilde{V}_C) = 0.25(1+j)\text{A}$. Indicando con $\widetilde{I}_1^{(T)}$ la corrente che scorre al primario del trasformatore, si puo' scrivere $\widetilde{I}_1^{(T)} = -n\widetilde{I}_2^{(T)} = n\widetilde{I}_2 = -nG\widetilde{V}_C$.

Analogamente $\widetilde{V}_1^{(T)} = \widetilde{V}_A - Z_1\widetilde{I}_1^{(T)}$, da cui $\widetilde{V}_X = \widetilde{V}_2^{(T)} = n\widetilde{V}_1^{(T)} = n\widetilde{V}_A + n^2 G Z_1 \widetilde{V}_C$.

Quindi $\widetilde{V}_X = 2(1+j)\text{V}$ da cui $v_X(t) = 2\sqrt{2}\cos(2t + \pi/4)\text{V}$.

2-a)

Essendo gli operazionali ideali, e operanti SEMPRE nella zona ad alto guadagno per ipotesi, numerandoli da sinistra a destra, vale $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$ e $I_-^{(i)} = I_+^{(i)} = 0\text{A}$ con $i = 1, 2$.

Ne segue che $V_-^{(1)} = V_+^{(1)} = V_0$, quindi $I_{R1} = I_{R2} = \frac{V_0}{R_1}$ e $V_{02} = V_-^{(1)} + R_2 I_{R1} + R_3(I_{R1} + I_0) = 14\text{V}$.

Inoltre $V_+^{(2)} = V_{01}\frac{R_5}{R_4+R_5}$ ma anche $V_-^{(2)} = V_+^{(2)} = V_0 + R_2 I_{R1}$ da cui
$V_{01} = \left(V_0 + \frac{V_0}{R_1}R_2\right)\frac{R_4+R_5}{R_5} = 16\text{V}$.

2-b)

Poiche' la luminosita' delle lampadine e' direttamente proporzionale alla corrente che le attraversa, basta costruire un circuito in cui la corrente che attraversa le lampadine verdi sia il doppio di quella che scorre in quelle gialle tenendo presente che tutte le lampadine sono caratterizzate dalla stessa resistenza elettrica. In figura sono mostrate due soluzioni possibili (le soluzioni sono molteplici).