Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 8 gennaio 2004

1-a)

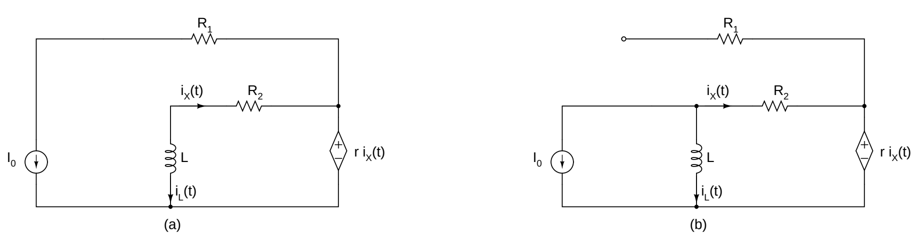
La matrice delle conduttanze della rete (a) si ricava facilmente dalla matrice delle resistenze della rete a stella: $\underline{R}^{(a)} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}$ da cui $\underline{G}^{(a)} = \frac{1}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} \begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_1 + R_3 \end{bmatrix}$.

Per la rete (b) risulta evidentemente $\underline{G}^{(b)} = \begin{bmatrix} G_4 + G_5 & -G_5 \\ -G_5 & G_5 + G_6 \end{bmatrix}$.

Per la rete (c) si puo' scrivere $i_1 = \frac{V_1-V_2}{R_7} + \frac{V_1}{R_9}$ e $i_2 = \frac{V_2}{R_8} + gV_2 - \frac{V_1-V_2}{R_7}$ da cui si ricava $\underline{G}^{(c)} = \begin{bmatrix} G_7 + G_9 & -G_7 \\ -G_7 & G_8 + g + G_7 \end{bmatrix}$ (notare che il generatore dipendente e' perfettamente equivalente ad una resistenza di conduttanza pari a g, e quindi anche la rete (c) e' una rete a stella). Poiche' i due-porte sono tutti in parallelo si puo' scrivere $\underline{G} = \underline{G}^{(a)} + \underline{G}^{(b)} + \underline{G}^{(c)} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 2 \end{bmatrix}$ mΩ^{-1}.

Collegando il generatore indipendente di corrente, si ha (essendo $i_2 = 0$) $V_{BD} = -\frac{G_{21}}{G_{22}}V_{AC}$ da cui $V_{AC} = \frac{G_{22}}{G_{11}G_{22}-G_{12}G_{21}}I_0$ e quindi, essendo la potenza dissipata dal due porte complessivo pari a quella generata dal generatore indipendente di corrente, si ha
$P = V_{AC}I_0 = \frac{G_{22}}{G_{11}G_{22}-G_{12}G_{21}}I_0^2 = 56$mW.

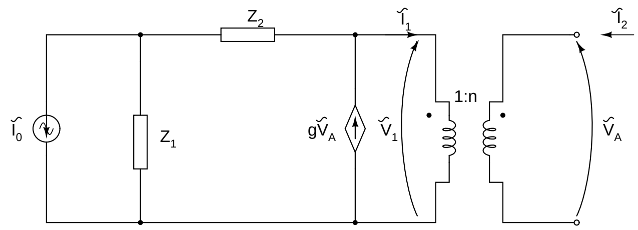
1-b)



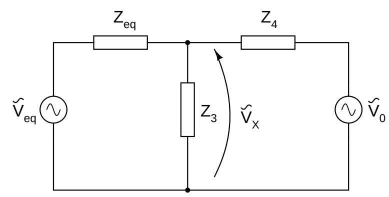
Per $t < 0$ il circuito da considerare e' quello di figura (a). Poiche' vale $ri_X(t) = -R_2i_X(t)$si ottiene $i_X(t) = -i_L(t) = -i_L(0) = 0$A.

Per $t > 0$ il circuito diventa quello di figura (b). Risulta evidente che $i_{L\infty} = -I_0$; inoltre, calcolando la resitenza equivalente che si vede ai morsetti dell'indutore (con i generatori indipendenti spenti) si ottiene banalmente $R_{eq} = R_2 + r$. Quindi si puo' calcolare $i_L(t) = i_{L\infty} - (i_{L\infty} - i_L(0))e^{-t/\tau} = -5(1 - e^{-t/\tau})$mA, dove $\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 1\mu$sec. Risulta evidente infine $i_X(t) = -(i_L(t) + I_0) = -5e^{-10^6t}$mA.

1-c)



(a)



(b)

Si ha $\omega = 1\text{rad/sec}$ e passando al dominio dei fasori si ottiene: $Z_1 = 1/j\omega C_1 + R_1 = (1-j)\Omega$, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = (1+j)\Omega$, $Z_3 = 1/j\omega C_3 = -j\Omega$, $Z_4 = j\omega L_4 = j\Omega$, $Z_5 = R_5 + j\omega L_5 = (1+j)\Omega$, $\widetilde{I_0} = 4\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\text{A}$, $\widetilde{I_1} = \sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}\text{A}$,$\widetilde{V_0} = 1\text{V}$.

Conviene innanzitutto calcolare l'equivalente di Thevenin a monte del secondario del trasformatore come mostrato in figura (a). Per il calcolo della tensione equivalente, si puo' osservare che $\widetilde{V}_1 = (g\widetilde{V}_a - \widetilde{I}_0)Z_1 + g\widetilde{V}_a Z_2 = \widetilde{V}_a/n$ da cui $\widetilde{V}_{eq} = \widetilde{V}_a = -\frac{n\widetilde{I}_0 Z_1}{1-ng(Z_1+Z_2)} = 16\text{V}$.

Per la Z_{eq} si procede analogamente avendo cura di spegnere il generatore indipendente di corrente e imponendo una corrente $\widetilde{I}_N$ sul secondario del trasformatore concorde alla corrente $\widetilde{I}_2$; si ottiene $\widetilde{I}_1 = g\widetilde{V}_N - \frac{\widetilde{V}_N}{n(Z_1+Z_2)}$ da cui $\widetilde{I}_N = -\frac{\widetilde{I}_1}{n} = -g\widetilde{V}_N/n + \frac{\widetilde{V}_N}{n^2(Z_1+Z_2)}$ e quindi $Z_{eq} = \frac{n^2(Z_1+Z_2)}{1-ng(Z_1+Z_2)} = -8\Omega$.

Ai fini del calcolo della tensione $\widetilde{V}_X$ il circuito risulta quello di figura (b). Applicando il teorema di Millmann si puo' scrivere $\widetilde{V}_X = \frac{\widetilde{V}_{eq}/Z_{eq} + \widetilde{V}_0/Z_4}{1/Z_4 + 1/Z_3 + 1/Z_{eq}} = 16\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\text{V}$.

Risulta inoltre evidente che $\widetilde{V}_Y = -\widetilde{I}_1 Z_5 = e^{j\pi}(\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}})(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}) = 2\text{V}$ e quindi $\phi = \phi_Y - \phi_X = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}\text{rad}$.

2-a)

Essendo gli operazionali ideali, vale $V_- = V_+$ e $I_- = I_+ = 0\text{A}$. Indicando con I_{R1} la corrente che scorre in R_1 si ha $I_{R1} = \frac{V_i - V^-}{R_1} = V_i/R_1$ essendo $V^- = V^+ = 0\text{V}$ e quindi $V_{R3} = 0 - I_{R1}R_2 = -\frac{R_2}{R_1}V_i = -V_i$. Vale inoltre $V_{01} = V_{R3} - R_4(I_{R1} - V_{R3}/R_3) = -3V_i$.

Per il secondo operazionale, vale $I_{R7} = 0\text{A}$, $V^- = V^+ = V_{R3} = -V_i = V_{02}$; risulta evidente quindi $V_5 = V_{01} - V_{02} = -3V_i + V_i = -2V_i$.

2-b)

I bipoli ri_1, R_x e I_3 formano un taglio per cui vale $i_x + I_3 - ri_1 = 0$;essendo ovviamente $i_1 = \frac{V_0}{R_1+R_2} = 5\text{A}$ si ottiene banalmente $i_x = ri_1 - I_3 = 0\text{A}$.