Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 10 settembre 2004

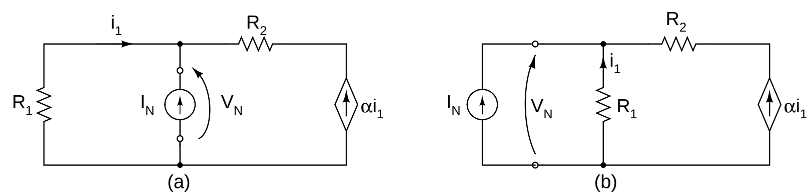
1-a)

- Si puo' notare che $V_a = R_2\,(I_1 + gV_a)$ da cui si ricava $V_a = \frac{R_2}{1-gR_2} I_1$. Quindi, essendo $V_1 = R_1 I_1 + V_a$ e $V_2 = R_4\,(I_2 - gV_a)$ si ottiene $V_1 = \left(R_1 + \frac{R_2}{1-gR_2}\right) I_1$ e $V_2 = \frac{gR_2R_4}{gR_2-1} I_1 + R_4 I_2$. La matrice delle resistenze del due porte risulta quindi essere: $\underline{R} = \begin{bmatrix} R_1 + \frac{R_2}{1-gR_2} & 0 \\ \frac{gR_2R_4}{gR_2-1} & R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ kΩ.
- Dalla espressione di V_1 si evince chiaramente che il generatore di corrente non ha influenza sulla porta 1; essendo quindi $V_1 = R_{eq} I_1 + V_{eq} = R_{11} I_1$ si ha $V_{eq} = 0$V e $R_{eq} = R_{11} = 3$kΩ.
- essendo la porta 1 a vuoto, si ha $I_1 = 0$A da cui $V_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2 = R_{22}I_0 = 10$V per cui $P = V_2 I_0 = 20$mW.

1-b)

Per $t < 0$sec l'interruttore T_1 e' aperto, per cui $i_1 = 0$; essendo il circuito a regime, l'induttore si comporta come un corto-circuito, per cui $i_L(t) = \frac{V_1}{R_2} = 3$mA.

Per $t > 0$sec gli interruttori commutano e vale $i_L(t) = (1+\alpha) i_1(t)$ (dalla legge di Khirkhoff delle correnti). Calcolando l'equivalente di Norton ai capi dell'induttore, si ha che la corrente di corto circuito vale $i_{cc} = (1+\alpha) i_1(\infty) = (1+\alpha)\frac{V_0}{R_1} = 6$mA.



Per calcolare la resistenza equivalente, si spengono i generatori indipendenti e il circuito risulta quello di figura (a), che puo' anche essere ridisegnato secondo la figura (b). Si ha $i_N = -(1+\alpha) i_1$ e $V_N = -R_1 i_1$ da cui $R_{eq} = \frac{V_N}{i_N} = \frac{R_1}{1+\alpha} = 1k\Omega$.

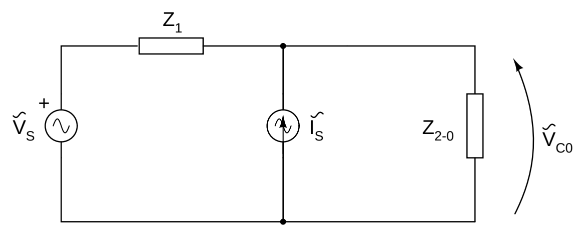
Si ha pertanto $i_L(t) = i_{L\infty} - (i_{L\infty} - i_L(0))\, e^{-t/\tau}$ dove $i_{L\infty} = i_{cc} = 6$mA, $\tau = L/R_{eq} = 1\mu$sec e $i_L(0) = 3$mA. Quindi $i_L(t) = \left[6 - 3e^{-10^6 t}\right]$ mA.

(Alternativamente, calcolando l'equivalente di Thevenin, il calcolo della resistenza equivalente rimane immutato, mentre per il calcolo della tensione equivalente, sostituito l'induttore con un circuito aperto, si ha $i_1 = -\alpha i_1$ che porta a $i_1 = 0$A, e quindi $V_{eq} = V_0$; in questo caso quindi $i_{L\infty} = V_{eq}/R_{eq} = V_0 \frac{1+\alpha}{R_1}$ che risulta ovviamente uguale a quanto ottenuto in precedenza).

1-c)

Quando gli interruttori cambiano di posizione ($t > t_1$), V_0, R_0 e C_0 formano una maglia, per cui, affinche' la corrente sulla resistenza sia *sempre* nulla, e' necessario che la differenza di potenziale ai suoi capi rimanga nulla, da cui segue $v_{C0}(t_1) = V_0$. Occorre quindi calcolare la tensione $v_{C0}(t)$ ed imporre che all'istante dello scatto degli interruttori ($t1$) la tensione sul condensatore sia pari a quella del generatore V_0.

Per $t < t_1$ il circuito lavora in regime sinusoidale; passando al dominio dei fasori si ha: $\omega = 2$rad/sec, $\widetilde{I}_S = 4\sqrt{2}$A, $\widetilde{V}_S = 4\sqrt{2}$V, $Z_1 = Z_{C1} = -j\Omega$, $Z_2 = Z_{L2} = j\Omega$, $Z_0 = Z_{C0} = -(j/2)\Omega$. Definendo $Z_{2-0} = Z_2//Z_0 = -j\Omega$ il circuito diventa quello di figura.



Applicando la sovrapposizione degli effetti si ottiene $\widetilde{V}_{C0} = \widetilde{V}_S \frac{Z_{2-0}}{Z_1+Z_{2-0}} + \widetilde{I}_S(Z_1//Z_{2-0}) = 2\sqrt{2}(1-j) = 4e^{-j\pi/4}$V. Quindi $v_{C0}(t) = 4\cos(2t - \pi/4)$V e, imponendo $v_{C0}(t_1) = V_0 = 4$V si ha che deve essere $2t_1 - \pi/4 = 0$ da cui $t_1 = \pi/8 \approx 0.393$sec.

2-a)

Essendo gli operazionali ideali, numerandoli da sinistra a destra, vale $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$ e $I_-^{(i)} = I_+^{(i)} = 0$A con $i = 1, 2$.

Ne segue che $V_-^{(1)} = V_+^{(1)} = V_{i1}$, quindi $I_{R1} = I_{R2} = I_{R3} = \frac{V_{i1}-V_{i2}}{R_1}$ e
$V_{02} = V_-^{(1)} + (R_2 + R_3)I_{R1} = 8$V.

Inoltre $V_+^{(2)} = V_{01}\frac{R_5}{R_4+R_5}$ ma anche $V_-^{(2)} = V_+^{(2)} = V_{i1} + R_2 I_{R1}$ da cui
$V_{01} = \left(V_{i1} + \frac{V_{i1}-V_{i2}}{R_1}R_2\right)\frac{R_4+R_5}{R_5} = 12$V.

2-b)

Dal teorema di Millmann $V_{eq} = \left(\sum_1^n \frac{V_p}{R_p}\right) / \sum_1^n \frac{1}{R_p} = V_p$; la conduttanza equivalente e' data dalla somma delle conduttanze, per cui $G_{eq} = \sum_1^n \frac{1}{R_p} = \frac{n}{R_p}$, $R_{eq} = \frac{R_p}{n}$. Per avere un generatore ideale di tensione e' necessario che la resistenza serie sia nulla, per cui $R_{eq} \to 0 \Longleftrightarrow n \to \infty$. La tensione del generatore cosi' ottenuto e' ovviamente pari a V_p.