Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 2 luglio 2004

1-a)

Passando al dominio dei fasori si ha: $\omega = 1\text{rad/sec}$, $\widetilde{V}_A = j\text{V}$, $\widetilde{V}_B = 2(-1+j)\text{V}$ $Z_1 = Z_{R1}+Z_{L1} = 3(1+j)\Omega$, $Z_2 = Z_{R2} + Z_{C_2} = (1-j)\Omega$ $Z_0 = Z_{R0}//Z_{C0} = \frac{1-j}{8}\Omega$.

Risulta evidente che
$\widetilde{I}_1 = \frac{\widetilde{V}_1+\alpha\widetilde{V}_1}{Z_1} + g\widetilde{V}_2 = \frac{1+\alpha}{Z_1}\widetilde{V}_1 + g\widetilde{V}_2$
e anche
$\widetilde{I}_2 = \frac{\widetilde{V}_2+\alpha\widetilde{V}_1}{Z_2} - g\widetilde{V}_2 = \frac{\alpha}{Z_2}\widetilde{V}_1 + \left(\frac{1}{Z_2} - g\right)\widetilde{V}_2$ da cui si ricava
$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1+\alpha}{Z_1} & g \\ \frac{\alpha}{Z_2} & \frac{1}{Z_2} - g \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-j & 1 \\ 2(1+j) & j \end{bmatrix} \text{m}\Omega^{-1}$

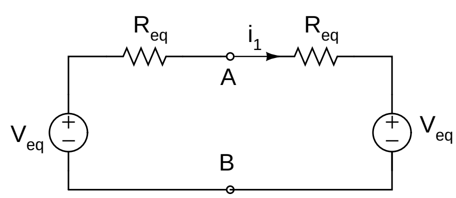
Collegando i due sottocircuiti, si puo' considerare la matrice
$\underline{Y'} = \underline{Y} + \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5+j3.5 & 0.5 \\ 1+j & j0.5 \end{bmatrix} \text{m}\Omega^{-1}$

e quindi calcolare la corrente $\widetilde{I'}_1 = Y'_{11}\widetilde{V}_A + Y'_{12}\widetilde{V}_B = (-4.5+j3.5)\text{A}$
per cui $P = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{\widetilde{V}_A\widetilde{I'}_1^*\right\} = 2.75\text{W}$.

1-b)

Per il calcolo dell'equivalente di Thevenin, si nota che il generatore dipendente ri_1 e la resistenza R_5 possono essere rimossi.
Calcolando la tensione di circuito aperto si ha ovviamente $i_1 = 0$ e quindi $V_{eq} = -\alpha V_{R3} + V_0$. Applicando la sovrapposizione degli effetti, si ottiene $V_{R3} = V_0\frac{R_3}{R_3+R_4} - I_0(R_3//R_4) = -1\text{V}$. Quindi $V_{eq} = 10\text{V}$.

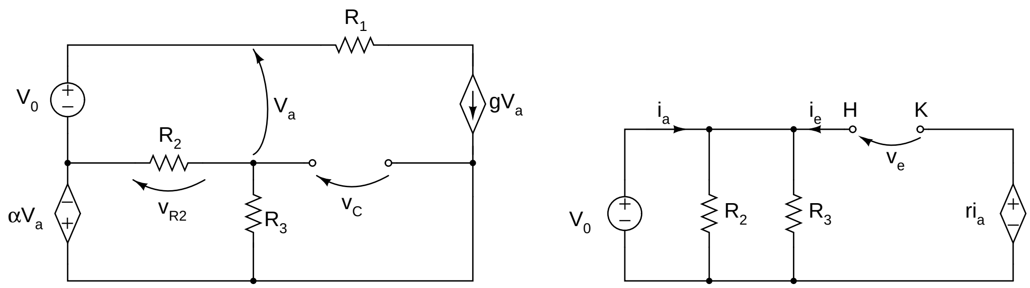
Per il calcolo della resistenza equivalente, si nota che, quando i generatori indipendenti sono spenti, R_3 e R_4 si trovano in parallelo e isolate dal resto del circuito; ne segue immediatamente $V_{R3} = 0$ ossia anche i due generatori dipendenti sono spenti. Rimane quindi la sola resistenza R_1 per cui ovviamente $R_{eq} = R_1 = 3\text{k}\Omega$.



Collegando in ingresso un circuito identico a quello in esame, si ha un parallelo di due equivalenti di Thevenin identici. Ne segue che la corrente che scorre sulle resistenze equivalenti e quindi ai morsetti e' nulla (la differenza di potenziale ai loro capi e' ovviamente nulla), per cui $i_1 = 0$ da cui $P_{R2} = \frac{V_{R2}^2}{R_2} = \frac{(V_0+ri_1)^2}{R_2} = \frac{V_0^2}{R_2} = 3\text{mW}$.

1-c)

Per $t < t_0 = 0\text{sec}$ essendo l'interruttore aperto, e considerando il circuito a regime, si ha $i_a(t) = 0\text{A}$ da cui $ri_a(t) = 0$ e il circuito diventa quello di figura (a).



(a) (b)

Risulta evidente che $V_a = V_0 + V_{R2} = V_0 + (-\alpha V_a)\frac{R_2}{R_2+R_3}$ da cui si ricava
$V_a = \frac{R_2+R_3}{R_3+(1+\alpha)R_2}V_0 = 4\text{V}$

Ne segue che, per $t < 0\text{sec}$, $v_C(t) = (-\alpha V_a)\frac{R_3}{R_2+R_3} = -6\text{V}$.

Per $t > t_0$ il circuito e' quello di figura (b); occorre dapprima calcolare l'equivalente di Thevenin ai morsetti HK.

Per il calcolo della tensione equivalente, si puo' scrivere $V_{eq} = V_0 - ri_a = V_0 - r\frac{V_0}{R_2//R_3} = 5\text{V}$.

Per il calcolo della resistenza equivalente vista ai capi del condensatore, una volta spento il generatore indipendente V_0, si puo' scrivere $v_e = -ri_a = -r(-i_e) = ri_e$ da cui si ottiene
$R_{eq} = v_e/i_e = r = 500\Omega$, e quindi $\tau = R_{eq}C = 1\text{msec}$.

La tensione sul condensatore puo' essere calcolata come
$v_C(t) = V_{eq} - (V_{eq} - v_C(t_0))e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} = 5 - 11e^{-10^3 t}\text{V}$.

2-a)

Essendo gli operazionali ideali, numerandoli da sinistra a destra, vale $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$ e $I_-^{(i)} = I_+^{(i)} = 0\text{A}$ con $i = 1, 2, 3$.

Ne segue che $V_-^{(1)} = V_+^{(1)} = V_0\frac{R_1}{R_1+R_2} = 7\text{V}$; poiche' sulle resistenze R_6, R_7, R_8 non scorre corrente si puo' scrivere $V_-^{(1)} = V_-^{(2)} = V_-^{(3)} = V_{OUT}^{(3)} = 7\text{V}$ ed anche $i_{OUT} = \frac{V_{OUT}^{(3)}}{R_9} = 1\text{mA}$.

2-b)

L'introduzione di una resistenza R_5 tra i morsetti CD cambia l'equivalente di Thevenin, ma non la potenza P_{R2}. Infatti, $V_{eq} = -\alpha V_{R3} + V_0 - R_5(gV_{R3})$, dove V_{R3} e' la stessa calcolata per l'esercizio 1b), per cui si ha $V_{eq} = 12\text{V}$. Per la resistenza equivalente, si ha lo stesso ragionamento fatto per l'esercizio 1b) con la differenza che ora la resistenza R_1 viene a trovarsi in serie alla resistenza R_5, per cui $R_{eq} = R_1 + R_5 = 5\text{k}\Omega$. Poiche' la potenza su R_2 dipende solo da V_0 e da i_1, ed essendo i_1 nulla per ragioni topologiche (parallelo degli equivalenti di Thevenin), si ha che la potenza P_{R2} rimane quella calcolata per l'esercizio 1b).