Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 10 giugno 2004

1-a)

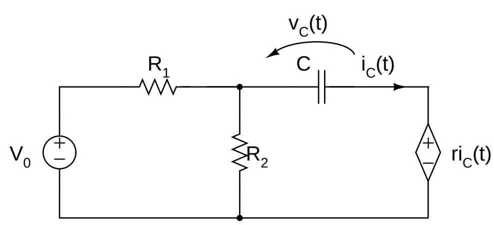
Risulta evidente che $I_1 = gV_2 + I_{R1} = gV_2 + \frac{V_1 - \alpha V_1 - V_2}{R_1} = \left(\frac{1-\alpha}{R_1}\right) V_1 + \left(g - \frac{1}{R_1}\right) V_2$ e anche $I_2 = I_{R2} - I_{R1} = \frac{V_2 - \alpha V_1}{R_2} + \frac{V_2 + \alpha V_1 - V1}{R_1} = \left[\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{R_1}\right] V_1 + \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] V_2$ da cui si ricava $\underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha}{R_1} & g - \frac{1}{R_1} \\ \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{m}\Omega^{-1}$

Per calcolare l'equivalente di Norton quando alla porta 1 e' collegato il generatore reale (I_0, R_0), basta osservare che $I_1 = I_0 - \frac{V_1}{R_0} = G_{11}V_1 + G_{12}V_2$, da cui si ricava $V_1 = \frac{I_0 - G_{12}V_2}{1 + G_{11}R_0} R_0$ e quindi $I_2 = G_{21}V_1 + G_{22}V_2 = \frac{G_{21}R_0 I_0}{1 + G_{11}R_0} + \left[G_{22} - \frac{G_{12}G_{21}R_0}{1 + G_{11}R_0}\right] V_2$ quindi, essendo $I_2 = -I_{eq} + G_{eq}V_2$ (I_2 ha verso opposto a quello della corrente di corto circuito) si ha $I_{eq} = -\frac{G_{21}R_0 I_0}{1 + G_{11}R_0} = -12\text{mA}$ e $G_{eq} = G_{22} - \frac{G_{12}G_{21}R_0}{1 + G_{11}R_0} = -1\text{m}\Omega^{-1}$.

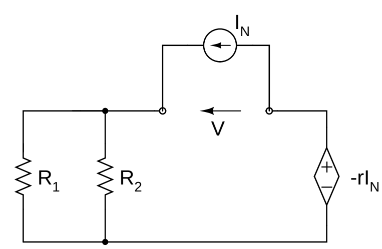
Quando anche il generatore V_0 e' collegato alla porta 2, si puo' scrivere banalmente $V_1 = \frac{I_0 - G_{12}V_0}{1 + G_{11}R_0} R_0 = 3\text{V}$, da cui $P_{R0} = \frac{V_1^2}{R_0} = 18\text{mW}$.

1-b)

Per $t < t_0 = 1$msec essendo l'interruttore aperto, e considerando il circuito a regime, si ha $i_C(t) = 0$A da cui $v_C(t) = V_{R2} - ri_C(t) = 0$V. Quindi $i_{R4}(t) = -\frac{V_1}{R_4} = -1$mA.



(a)



(b)

Per $t > t_0$ il circuito e' quello di figura (a); occorre dapprima calcolare l'andamento della tensione sul condensatore.

Quando il circuito raggiunge il regime, il condensatore e' un circuito aperto, per cui si puo' scrivere $V_{C\infty} = V_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 2$V.

Per il calcolo della resistenza equivalente vista ai capi del condensatore, si consideri la figura (b). Si ha ovviamente $V = (R_1 // R_2) I_N + rI_N$ da cui $R_{eq} = R_1 // R_2 + r = 2\text{k}\Omega$ e quindi $\tau = CR_{eq} = 10$msec.

La tensione sul condensatore puo' essere calcolata come $v_C(t) = V_{C\infty} - (V_{C\infty} - v_C(t_0))e^{-\frac{t - t_0}{\tau}} = 2\left(1 - e^{-\frac{t - 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3}}}\right)$ V.

Ne segue che $i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = C\frac{V_{C\infty} - v_C(t_0)}{\tau}e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} = e^{-\frac{t-10^{-3}}{10\cdot 10^{-3}}}\text{mA}$.

Infine, $i_{R4}(t) = \frac{ri_C(t) - V_1}{R_4} = \left[-1 + 0.1e^{-\frac{t-10^{-3}}{10\cdot 10^{-3}}}\right]\text{mA}$.

1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha: $\widetilde{V}_0 = 5\sqrt{2}e^{-j\frac{3}{4}\pi}$, $\omega = 2\text{rad/sec}$, $Z_1 = Z_{R1} + Z_{L1} = [0.5 + j4]\Omega$, $Z_2 = Z_{R2} + Z_{C_2} = [0.5 - j0.5]\Omega$ $Z_3 = j4\Omega$, $Z_4 = Z_{R4} + Z_{C4} = [0.5 + j0.5]\Omega$.

Affinche' la tensione $v_x(t)$ sia in fase con la corrente $i_X(t)$ e' sufficiente imporre che il parallelo Z_4, Z_5 sia puramente resistivo, ossia, il che e' equivalente, che la somma delle ammettenze $Y_4 + Y_5$ sia puramente reale. Questo implica $\text{Im}\left[\frac{1}{Z_{R4}+Z_{C4}} + Y_{C5}\right] = 0$ ossia $\text{Im}\left[\frac{2}{1+j}\right] + \omega C_5 = 0$ da cui si ricava $C_5 = 500\text{mF}$.

[Volendo calcolare la tensione $\widetilde{V}_X$, si puo' procedere calcolando l'equivalente di Thevenin a monte dei morsetti di uscita del trasformatore. Si ha immediatamente $\widetilde{V}_{eq} = n\widetilde{V}_3$ dove $\widetilde{V}_3$ e' la tensione ai capi dell'impedenza Z_3, e puo' essere determinata dalla legge di Kirchoff delle tensioni $\widetilde{V}_3 + r\widetilde{I}_3 = \widetilde{V}_0$ da cui si ottiene $\widetilde{V}_3 = \widetilde{V}_0\frac{Z_3}{Z_3+r}$ e quindi $V_{eq} = 10e^{-j\frac{\pi}{2}}\text{V}$.

L'impedenza equivalente risulta nulla, in quanto la tensione ai morsetti quando il circuito e' inerte ($\widetilde{V}_0$ spento) e' imposta dal generatore comandato, e la variabile di controllo e' la corrente di Z_3 che si trova collegata in parallelo al generatore comandato stesso, per cui si puo' scrivere $\widetilde{V}_3 = -r\widetilde{I}_3 = -r\frac{\widetilde{V}_3}{Z_3}$ da cui si ricava $\widetilde{V}_3 = 0\text{V}$ per cui anche $Z_{eq} = \frac{\widetilde{V}}{\widetilde{I}_N} = \frac{n\widetilde{V}_3}{\widetilde{I}_N} = 0\Omega$.

Ne risulta che $\widetilde{V}_X = \widetilde{V}_{eq}$ e quindi $v_X(t) = 10\cos(2t - \pi/2)\text{V}$ mentre la corrente $i_X(t)$ si puo' calcolare sempicemente considerando che $\widetilde{I}_X = \widetilde{V}_X(Y_4 + Y_5) = \widetilde{V}_X\text{Re}[Y_4] = \widetilde{V}_X\frac{R_4}{|Z_4|^2} = 10e^{-j\frac{\pi}{2}}\text{A}$.

Quindi $i_X(t) = 10\cos(2t - \pi/2)\text{A}$.]

2-a)

Essendo l'operazionale ideale, vale $V_- = V_+ = V_1$; ne segue che, indicando con $V_1^{(T')}$ la tensione alla porta di ingresso della matrice di trasmissione inversa, $V_1^{(T')} = V_1$. Inoltre, essendo $I_- = I_+ = 0\text{A}$, la corrente $I_1^{(T')} = I_0 - I_1 = 1\text{mA}$. Quindi, $\begin{bmatrix} V_2^{(T')} \\ I_2^{(T')} \end{bmatrix} = \underline{T'}\begin{bmatrix} V_1^{(T')} \\ I_1^{(T')} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ I_0 - I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3000 \\ -0.001 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0.001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.001 \end{bmatrix}$.

La corrente di uscita dell'operazionale vale quindi $I_{OUT} = I_2 - I_2^{(T')} = 1\text{mA}$.

2-a)

Essendo il circuito a regime, tutti i condensatori sono assimilabili a circuiti aperti, e tutti gli induttori a corto circuiti. Ne segue che la resistenza R_2, a regime, si trova in corto circuito tramite L_3 e L_1, per cui la corrente I_{L2} risulta nulla $\forall R_2 \neq 0$ (per $R_2 = 0$ si ha il parallelo di due corto circuiti, per cui le correnti I_{L2} e I_{L3} risultano indeterminate).