Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 24 marzo 2004

1-a)

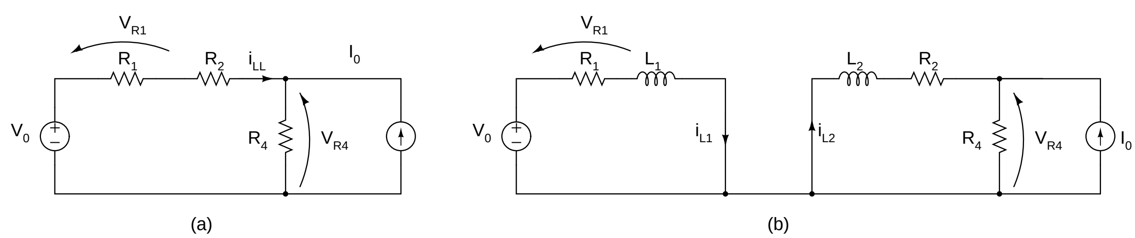
Per calcolare l'equivalente di Thevenin occorre calcolare la tensione $V_{eq} = V_{AB}^{(C.A.)}$ a circuito aperto e la resistenza equivalente R_{eq} ottenuta considerando spenti tutti i generatori indipendenti.

1) Calcolo di $V_{th} = V_{AB}^{(C.A.)}$: si nota facilmente che $V_{AB}^{(C.A.)} = \gamma V_2 - R_3 I_0$ e inoltre $\gamma V_2 = V_2 + V_1$, da cui $V_{eq} = \frac{\gamma}{\gamma-1}V_1 - R_3 I_0 = 15$V.

2) Calcolo di R_{eq}: Si sostituisca ai generatori indipendenti V_0 e V_1 un cortocircuito e al generatore indipendente I_0 un circuito aperto. Risulta evidente in tali condizioni che $V_2 = \gamma V_2$ da cui $V_2 = 0$V; tutti i bipoli del circuito fatta eccezione per R_3 si trovano quindi in parallelo ad un corto-circuito, da cui segue che $R_{eq} = R_3 = 5k\Omega$.

La potenza disspipata e' data dalla somma delle potenze dissipate dai resistori, e quindi, ricordando che a circuito aperto vale $i_3 = I_0$, si puo' scrivere $P = \frac{V_0^2}{R_0} + R_1(\alpha I_0)^2 + \frac{V_2^2}{R_2} + \frac{(V_0-\gamma V_2)^2}{R_4} + R_3 I_0^2$. Essendo $V_2 = \frac{1}{\gamma-1}V_1$ si ottiene $P = 115$mW.

1-b)



Per $t < t_0 = 0$sec essendo l'interruttore T_1 aperto, i due induttori sono in serie ed inoltre sono entrambi assimilabili ad un corto circuito, essendo il circuito a regime. Detta quindi $i_{LL}(t)$ la corrente che scorre negli induttori con verso indicato dalla figura (a), si ha $i_{LL} = \frac{V_0 - R_4 I_0}{R_1 + R_4 + R_6} = 0.1$mA. (Notare che i resitori R_3 e R_5 non hanno alcuna influenza sul circuito; infatti applicando il principio di rilocazione delle sorgenti impressive a V_0 si ottiene un sottocircuito in serie a I_0 che quindi puo' essere rimosso ai fini del calcolo delle incognite)

Quindi, per $t < 0$ si ha $V_{R1}(t) = R_1 i_{LL} = 1$V e $V_{R4}(t) = R_4(i_{LL} + I_0) = 8.4$V.

Quando l'interruttore T_1 si chiude, il circuito risulta suddiviso in due sottocircuiti indipendenti (condivisono solo il riferimento di tensione) entrambi del primo ordine.

Definendo il verso delle correnti sugli induttori come mostrato in figura (b), si ha $i_{L1}(0) = i_{L2} = i_{LL} = 0.1$mA, poiche' la corrente sugli induttori non puo' variare istantaneamente.

Per il transitorio di L_1 si ha banalmente $i_{L1}(t) = i_{L1}(+\infty) - (i_{L1}(+\infty) - i_{L1}(0))e^{-t/\tau_1} = 1 - 0.9e^{-0.5\cdot 10^6 t}$mA, essendo banalmente $i_{L1}(+\infty) = \frac{V_0}{R_1} = 1$mA e $\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} = 2\mu$sec.

Quindi, per $t > 0$, $V_{R1}(t) = R_1 i_{L1}(t) = 10 - 9e^{-0.5\cdot 10^6 t}$V.

Per il transitorio di L_2 si ha banalmente $i_{L2}(t) = i_{L2}(+\infty) - (i_{L2}(+\infty) - i_{L2}(0))e^{-t/\tau_2} = -0.8 + 0.9e^{-10^6 t}$mA, essendo banalmente $i_{L2}(+\infty) = -I_0 \frac{R_4}{R_4+R_6} = -0.8$mA e $\tau_2 = \frac{L_1}{R_4+R_6} = 1\mu$sec.

Quindi, per $t > 0$, $V_{R4}(t) = R_4(i_{L2}(t) + I_0) = 4.8 + 3.6e^{-10^6 t}$V.

1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha: $\widetilde{I}_0 = 1$A, $\widetilde{I}_1 = 2\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$A, $\omega = 1$rad/sec, $Z_{L2} = Z_{La} = j\omega L_a = j\Omega$, $Z_{Cb} = 1/j\omega C_b = -j\Omega$, $Z_{Rc} = Z_{R1} = 1\ \Omega$.

Essendo il circuito (b) a triangolo, la determinazione della matrice di ammettenze e' immediata: $\underline{Y}^{(b)} = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b & -Y_b \\ -Y_b & Y_c + Y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 1+j \end{bmatrix} \Omega^{-1}$. Per il circuito (c) e' sufficiente notare che $V_1^{(c)} = Z_{R1}I_1^{(c)} + rI_1^{(c)}$ e $V_2^{(c)} = Z_{L2}I_2^{(c)} + rI_1^{(c)}$ da cui $\underline{Z}^{(c)} = \begin{bmatrix} Z_{R1} + r & 0 \\ r & Z_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & j \end{bmatrix} \Omega$. Tramite inversione si ottengono quindi le matrici $\underline{Z}^{(b)} = \begin{bmatrix} 1+j & j \\ j & 0 \end{bmatrix} \Omega$ e $\underline{Y}^{(c)} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 3j/4 & -j \end{bmatrix} \Omega^{-1}$.

Ricordando le proprieta' dei due porte connessi in serie e parallelo si ottiene quindi:

$\underline{Y}_1 = \underline{Y}^{(b)} + \underline{Y}^{(c)} = \begin{bmatrix} 1/4 & -j \\ -j/4 & 1 \end{bmatrix} \Omega^{-1}$ e $\underline{Z}_2 = \underline{Z}^{(b)} + \underline{Z}^{(c)} = \begin{bmatrix} 5+j & j \\ 3+j & j \end{bmatrix} \Omega$.

Occorre quindi risolvere il sistema lineare $\underline{Y}_1 \begin{bmatrix} \widetilde{V}_{in} \\ \widetilde{V}_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{I}_0 \\ -\alpha \widetilde{I}_0 \end{bmatrix}$, ottenendo $\widetilde{V}_{in} = (2-4j)$V da cui $V_{in}(t) = 2\sqrt{5}\cos(t - 1.107)$V.

Per $V_{out}(t)$ si puo' scrivere banalmente $\widetilde{V}_{out} = Z_{21}^{(2)}(\alpha \widetilde{I}_0) + Z_{22}^{(2)}\widetilde{I}_1 = 4$V e quindi, nel dominio dei tempi si ha $V_{out}(t) = 4\cos(t)$V.

2-a)

Essendo gli operazionali ideali e operanti nella zona ad alto guadagno, vale $I_- = I_+ = 0$A e $V_+^{(1)} = V_-^{(1)} = V_+^{(2)} = V_-^{(2)} = V_0$. Poiche' $V_-^{(2)} - V_+^{(1)} = V_1 - R_1I_1$ si ha banalmente $V_1 = R_1I_1 = 1$V (dove l'operazionale 1 e' quello piu' in basso nello schema del circuito).

Inoltre, essendo $V_{out}^{(2)} = V_-^{(2)} - R_2I_1 = V_0 - R_2I_1$ e $V_3 = V_{out}^{(2)} - R_3(I_3 - I_2)$, si ottinene $V_3 = 8$V.