Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 21 luglio 2006

1-a)

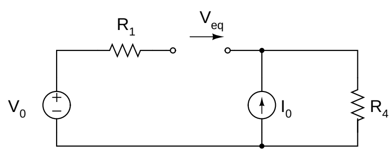
Si può scrivere $I_1 = \alpha i_{R2} + \frac{V_1-(V_2-\beta V_1)}{R_1} = \left(\frac{1+\beta}{R_1} - \frac{\alpha\beta}{R_2}\right) V_1 + \left(\frac{\alpha}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) V_2$. Poiché inoltre si può scrivere $I_2 = -\alpha i_{R2} + \frac{V_2}{R_3} + \frac{V_2-\beta V_1}{R_2} + \frac{V_1-(V_2-\beta V_1)}{R_1}$ ossia
$I_2 = \left(\frac{(\alpha-1)\beta}{R_2} - \frac{\beta+1}{R_1}\right) V_1 + \left(\frac{1-\alpha}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) V_2$ si ottiene

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{1+\beta}{R_1} - \frac{\alpha\beta}{R_2} & \frac{\alpha}{R_2} - \frac{1}{R_1} \\ \frac{(\alpha-1)\beta}{R_2} - \frac{\beta+1}{R_1} & \frac{1-\alpha}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.25 \\ -2.5 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{m}\Omega^{-1}.$$

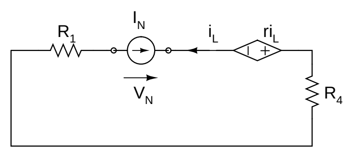
Collegando i generatori ideali I_0 e V_0 alle porte 1 e 2, si ha $I_0 = G_{11}V_1 + G_{12}V_0$ da cui $V_1 = \frac{I_0 - G_{12}V_0}{G_{11}} = -1.5$V. Dalla porta due, si ottiene inoltre $I_2 = G_{21}V_1 + G_{22}V_0 = 4.75$mA. Quindi, la potenza dissipata dal due porte risulta essere $P = V_1I_1 + V_2I_2 = V_1I_0 + V_0I_2 = 3.25$mW.

1-b)

Per $t < 0$sec il circuito é a regime e l'induttore é assimilabile ad un corto-circuito. Poiché l'interruttore é aperto, l'induttore e il generatore di corrente I_0 sono collegati in serie, il che implica $i_L(t) = i_L(0^-) = I_0 = 1$mA.



(a)



(b)

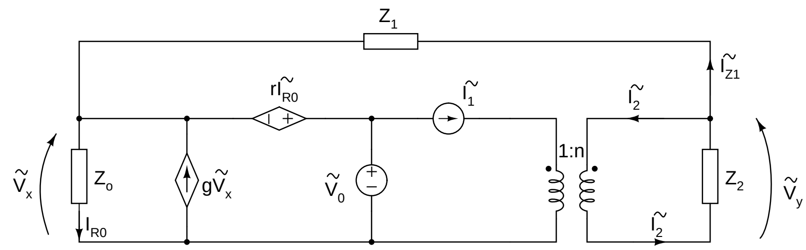
Per $t > 0$ conviene calcolare l'equivalente di Thevenin ai capi dell'induttore. La tensione equivalente si ricava dal circuito di figura (a), dove é stato rimosso il parallelo di resistenze $R_2//R_3$ ($i_L = 0$ implica che il generatore dipendente di tensione é spento, quindi é un corto-circuito), poiché in serie ad un generatore di corrente. Si nota subito che $V_{eq} = V_{R4} - V_0 = R_4I_0 - V_0 = 2$V.

Per il calcolo della resistenza equivalente, dopo aver spento tutti i generatori indipendenti si ottiene il circuito di figura (b). Si noti come la serie $R_3 + R_4$ essendo in parallelo ad un generatore di tensione sia stata omessa in quanto ininfluente al calcolo di V_N. Evidentemente vale $V_N = R_1I_N + R_4I_N - ri_L = (r + R_1 + R_4)I_N$ che implica direttamente $R_{eq} = (r + R_1 + R_4) = 5\mathrm{k}\Omega$.

Si può scrivere quindi , $i_L(t) = i_{L\infty} - (i_{L\infty} - i_L(0^+))e^{-t/\tau}$ dove $i_{L\infty} = \frac{V_{eq}}{R_{eq}} = 0.4$mA, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1$mA e $\tau = L/R_{eq} = 1\mu$sec. Quindi $i_L(t) = [0.4 + 0.6e^{-10^6 t}]$mA.

1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha ($\omega = 1$rad/sec): $Z_1 = R_1 + 1/(j\omega C_1) = (1 - j)\Omega$, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = (1 + j)\Omega$, $Z_0 = R_0 = 1\Omega$, $\widetilde{V}_0 = 3$V, $\widetilde{I}_1 = (1 + j)$A.



Come si può notare dalla figura, la corrente che scorre su Z_1 é nulla poiché al nodo cui é collegata la porta 2 del trasformatore deve valere $\widetilde{I}_2 - \widetilde{I}_2 + \widetilde{I}_{Z1} = 0$. Questo implica $\widetilde{V}_y = -\widetilde{I}_2 Z_2 = n\widetilde{I}_1 Z_2 = 2j$V, da cui $v_y(t) = 2\cos(t + \pi/2)$V $= -2\sin(t)$V.

Si può notare inoltre che $\widetilde{V}_x = \widetilde{V}_0 - r\widetilde{I}_0 = \widetilde{V}_0 - r\frac{\widetilde{V}_x}{Z_0}$ da cui si ricava $\widetilde{V}_x = \frac{Z_0}{Z_0+r}V_0 = 1$V il che implica $v_x(t) = \cos(t)$V.

2-a)

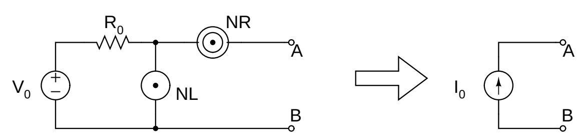
Essendo gli operazionali ideali, e operanti sempre nella zona ad alto guadagno, numerandoli coerentemente con le denominazioni delle tensioni di uscita, vale $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$ e $I_-^{(i)} = I_+^{(i)} = 0$A con $i = 1, 2, 3$.

Essendo $V_-^{(2)} = V_+^{(2)} = V_0$ si ha $I_{R1} = (V_0 - V_-^{(2)})/R_1 = 0$ da cui si ricava $V_{o2} = V_-^{(2)} - R_2 I_{R1} = V_0 = 10$V.

Inoltre, $V_-^{(1)} = V_+^{(1)} = V_-^{(2)} + V_1 = 12$V, da cui segue $I_{R3} = (V_0 - V_-^{(1)})/R_3 = -2$mA. Quindi $V_{o1} = V_-^{(1)} - R_4 I_{R3} = 14$V.

Infine, $V_-^{(3)} = V_+^{(3)} = V_{o2}\frac{R_8}{R_8+R_7} = 5$V ed essendo $I_{R5} = (V_{o1} - V_-^{(3)})/R_5 = 9$mA si ottiene $V_{o3} = V_-^{(3)} - (I_{R5} + I_0)R_6 = -5$V.

2-b)



Occorre valutare la relazione $I - V$ del bipolo. Sulla resistenza R_0 scorre la corrente $I_{R0} = (V_0 - V_{NL})/R_0 = 1$mA (essendo per definizione $V_{NL} = 0$); inoltre, essendo anche $I_{NL} = 0$, si ha che la corrente che esce dal morsetto A vale $I_A = I_{R0} = 1$mA $=$costante. La tensione ai morsetti invece risulta banalmente $V_{AB} = V_{NL} + V_{NR}$ $=$indeterminata. Il bipolo quindi impone una corrente costante a prescindere dalla tensione ai morsetti $\rightarrow$ generatore indipendente di corrente di valore $I_0 = I_{R0} = 1$mA.