Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 26 giugno 2006

1-a)

Si può scrivere $I_{R1} = \frac{V_1 - V_{R2}}{R_1}$, $V_{R2} = (I_{R1} - \alpha I_{R4})R_2$ da cui $I_{R1} = \frac{V_1}{R_1+R_2} + \alpha \frac{R_2}{R_4(R_1+R_2)} V_2$. Poiche' inoltre si puo' scrivere $I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_3} + I_{R1}$ e $I_2 = \frac{V_2 - V_1}{R_3} + \frac{V_2}{R_3}$ si ottiene

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_3} & \alpha \frac{R_2}{R_4(R_1+R_2)} - \frac{1}{R_3} \\ \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathrm{m}\Omega^{-1}.$$

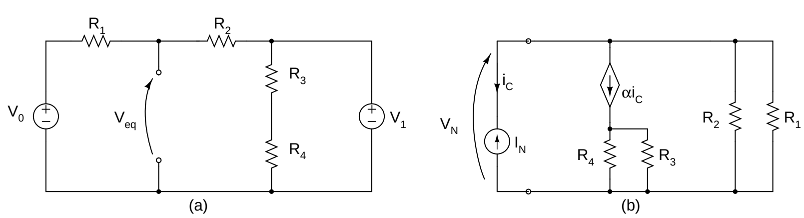
Passando alla descrizione mediante matrice di trasmissione $\underline{T'}$, cioe' $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underline{T'} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$ si ottiene $\underline{T'} = \begin{bmatrix} 2 & 1000 \\ 5 \cdot 10^{-3} & 2 \end{bmatrix}$ da cui si puo' ricavare la matrice del due porte ottenuto dal collegamento in cascata dei due doppi-bipoli identici: $\underline{T'}_{\mathtt{tot}} = \underline{T'} \cdot \underline{T'} = \begin{bmatrix} 9 & 4000 \\ 20 \cdot 10^{-3} & 9 \end{bmatrix}$.

Essendo $V_2^{tot} = 0$, data l'assenza di generatori indipendenti, si ha immediatamente $V_{eq} = 0$V. Infine, essendo come detto il circuito inerte, dalla descrizione a parametri trasmissione si ricava immediatamente $R_{eq} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{T'_{12} I_2}{T'_{22} I_2} = \frac{T'_{12}}{T'_{22}} = 444.44\Omega$.

(Alternativamente, si puo' calcolare l'equivalente di Thevenin a valle della porta 2 del primo doppio-bipolo della cascata. Si ottiene banalmente $V'_{eq} = 0$ (circuito inerte) $R'_{eq} = 1/G_{11}$ (dalla def di G_{11}). Ponendo poi $I_2 = -\frac{1}{R'_{eq}} V_2 = -G_{11} V_2$ e risolvendo il sistema di equazioni imposto dalla descrizione a matrice conduttanza, si ottiene $I_1 = \left(G_{11} - \frac{G_{12} G_{21}}{G_{11} + G_{22}} \right) V_1$ da cui
$R_{eq} = \frac{G_{11} + G_{22}}{G_{11} + G_{22} - G_{12} G_{21}} = 444.44\Omega$).

1-b)

Per $t < 0$sec il circuito è a regime e il condensatore è assimilabile ad un circuito aperto. Il generatore dipendente e' spento, e l'interruttore chiuso impone $v_C(t) = v_C(0^-) = V_1 = 4$V.



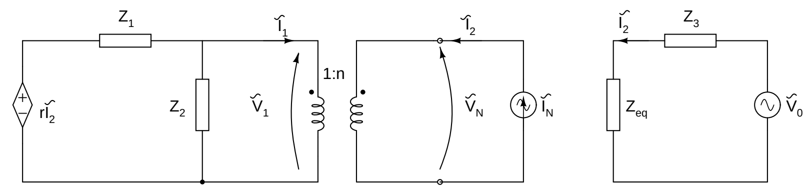
Per $t > 0$ conviene calcolare l'equivalente di Thevenin ai capi del condensatore. La tensione equivalente si ricava dal circuito di figura (a). Si nota subito che $V_{eq} = \frac{V_0/R_1 + V_1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} = 3$V (la serie $R_3 + R_4$ si trova in parallelo ad un generatore di tensione, per cui puo' essere ignorata ai fini del calcolo della V_{eq}).

Per il calcolo della resistenza equivalente, dopo aver spento tutti i generatori indipendenti si ottiene il circuito di figura (b). Si noti come il parallelo $R_3//R_4$ essendo in serie ad un generatore di corrente possa essere ignorato ai fini del calcolo della tensione V_N. Evidentemente vale $V_N = (R_1//R_2)(I_N - \alpha i_c) = (1+\alpha)(R_1//R_2)I_N$ che implica direttamente $R_{eq} = (1+\alpha)(R_1//R_2) = 2\mathrm{k}\Omega$.

Si può scrivere quindi , $v_C(t) = v_{C\infty} - (v_{C\infty} - v_C(0^+))e^{-t/\tau}$ dove $v_{C\infty} = V_{eq} = 3\mathrm{V}$, $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 4\mathrm{V}$ e $\tau = R_{eq}C = 1\mathrm{msec}$. Quindi $v_C(t) = [3 + e^{-1000t})]\mathrm{V}$.

1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha ($\omega = 1\mathrm{rad/sec}$): $Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = (1+j)\Omega$, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = (1+j)\Omega$, $Z_3 = 1/(j\omega C_3 = -j4\Omega$, $\widetilde{V}_0 = 16(1+j)\mathrm{V}$, $\widetilde{I}_0 = (1-j)\mathrm{A}$ (essendo $i_0(t) = \sqrt{2}\cos(t - \pi/4)\mathrm{A}$).



(a) (b)

Il generatore di corrente $\widetilde{I}_0$ e' ininfluente al calcolo della corrente $\widetilde{I}_2$, e puo' quindi essere rimosso. Conviene calcolare l'equivalente di Thevenin a monte della porta 2 del trasformatore. Essendo il circuito inerte, l'equivalente di Thevenin sara' una sola impedenza Z_{eq}.

Il circuito per il calcolo di tale impedenza equivalente nel dominio dei fasori è mostrato in figura (a). Poiche' $\widetilde{I}_2 = \widetilde{I}_N$, $\widetilde{I}_2 = -\widetilde{I}_1/n$, $\widetilde{I}_{Z1} = \frac{r\widetilde{I}_N - \widetilde{V}_1}{Z_1}$ e $\widetilde{V}_1 = Z_2\left(\widetilde{I}_{Z1} - \widetilde{I}_1\right)$ si ottiene $\widetilde{V}_1 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}(\frac{r}{Z_1} + n)\widetilde{I}_N$ da cui essendo $\widetilde{V}_N = n\widetilde{V}_1$ si ottiene $Z_{eq} = n(\frac{r}{Z_1} + n)\frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2} = 4(2+j)\Omega$.

Il circuito diviene quello mostrato in figura (b), da cui banalmente si ricava
$\widetilde{I}_2 = \frac{\widetilde{V}_0}{Z_{eq}+Z_3} = 2(1+j)\mathrm{A}$. Ne segue $i_2(t) = 2\sqrt{2}\cos(t + \pi/4)\mathrm{A}$.

2-a)

Essendo gli operazionali ideali, e operanti sempre nella zona ad alto guadagno, numerandoli dall'alto al basso, vale $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$ e $I_-^{(i)} = I_+^{(i)} = 0\mathrm{A}$ con $i = 1, 2$.

Essendo $V_-^{(2)} = V_+^{(2)} = V_0$, ed inoltre $i_{R6} = i_{R1} = (V_1 - V_0)/R_1$ si ottiene $V_{o2} = V_-^{(2)} - R_6 i_{R1} = 4\mathrm{V}$. Essendo la resitenza R_5 percorsa da corrente nulla, si ottiene $V_-^{(1)} = V_+^{(1)} = V_-^{(2)} = V_+^{(2)} = V_0$ e quindi $V_{R3} = V_-^{(1)} + R_2 I_0 = 4\mathrm{V}$. Ne segue $i_{R4} = -(I_0 + V_{R3}/R_3)$ da cui $V_{o1} = V_{R3} - R_4 i_{R4} = 10\mathrm{V}$. Infine si ottiene $i_{R7} = (V_{o1} - V_{o2})/R_7 = 1\mathrm{mA}$.

2-b)

La capacita' C_2 e' in parallelo ad un generatore di tensione. Banalmente $v_{C2}(t) = V_0 = 2\mathrm{V}$, $\forall t > 0$.

La capacita' C_1 e i generatori di corrente I_0 e I_1 formano un taglio, per cui $i_{C1} = I_1 - I_0 = 1\mathrm{mA}$. Ne segue $v_{C1}(t) = v_{C1}(0^+) + (1/C)\int_0^t i_{C1}(\tau)d\tau = [1+t]\mathrm{V}$.