Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 4 settembre 2006

1-a)

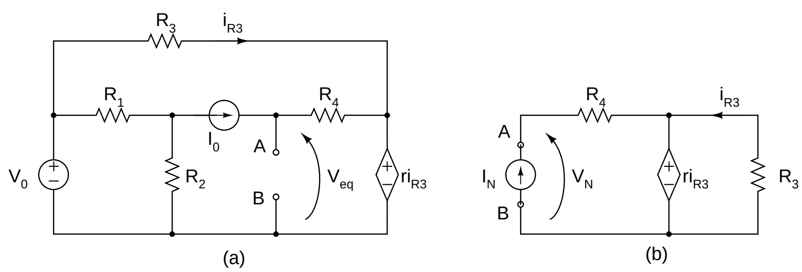
Analizzando il circuito, si ricava $I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} + \frac{V_1 - r i_{R3}}{R_1} = \frac{V_1 - V_2}{R_2} + \frac{V_1 - r(V_2/R_3)}{R_1}$ e $I_2 = \frac{V_2 - V_1}{R_2} + \frac{V_2}{R_3} + g(V_1 - V_2)$ da cui si ottiene

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} - \frac{r}{R_1 R_3} \\ g - \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathrm{m}\Omega^{-1}.$$

Collegando il generatore ideale V_0 alla porta 2, si ha $I_1 = G_{11}V_1 + G_{12}V_0$ da cui, considerando il generatore equivalente di Norton I_{eq} con verso entrante nel morsetto cui sono collegati R_1 e R_2, si ha $I_{eq} = -G_{12}V_0 = 1\mathrm{mA}$ e $G_{eq} = G_{11} = 1.5\mathrm{m}\Omega^{-1}$.

1-b)

Per $t < 0$sec il circuito é a regime e il condensatore é assimilabile ad un circuito aperto. Poiché l'interruttore é aperto, la corrente i_{R3} è nulla, il che implica che il generatore dipendente di tensione è equivalente ad un corto-circuito. Banalmente quindi $v_C(t) = V_{R4} = R_4 I_0 = 2\mathrm{V}$.



Per $t > 0$ conviene calcolare l'equivalente di Thevenin ai capi del condensatore. La tensione equivalente si ricava dal circuito di figura (a), dove si può notare che $V_{eq} = r i_{R3} + V_{R4} = r i_{R3} + R_4 I_0$ ed inoltre $i_{R3} = \frac{V_0 - r i_{R3}}{R_3}$ che implica $i_{R3} = \frac{V_0}{R_3 + r}$. Quindi sostituendo, si ricava $V_{eq} = \frac{r}{R_3 + r} V_0 + R_4 I_0 = 7\mathrm{V}$.

Per il calcolo della resistenza equivalente, dopo aver spento tutti i generatori indipendenti si ottiene il circuito di figura (b). Si noti come il parallelo $R_1 // R_2$ (formatosi dallo spegnimento di V_0) rimanga flottante, ossia non connesso al resto del circuito, per cui può essere rimosso in quanto ininfluente al calcolo di V_N. Evidentemente vale $V_N = R_4 I_N + r i_{R3}$, dove deve valere $r i_{R3} = -R_3 i_{R3}$ per cui $i_{R3} = 0$, il che implica direttamente $R_{eq} = \frac{V_N}{I_N} = R_4 = 1\mathrm{k}\Omega$.

Si può scrivere quindi , $v_C(t) = v_{C\infty} - (v_{C\infty} - v_C(0^+))e^{-t/\tau}$ dove $v_{C\infty} = V_{eq} = 7\mathrm{V}$, $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 2\mathrm{V}$ e $\tau = R_{eq}C = 1\mathrm{msec}$. Sostituendo si ricava $v_C(t) = [7 - 5e^{-100t}]\mathrm{V}$.

1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha ($\omega = 1$rad/sec): $Z_1 = R_1//(j\omega L_1) = \frac{(1+j)}{2}\Omega$, $Z_2 = R_2//(1/j\omega C_2) = \frac{(1-j)}{2}\Omega = Z_4$, $Z_3 = R_3 = 1\Omega$, $\widetilde{V}_0 = (1-j)$V, $\widetilde{I}_0 = (1+j)$A.

Dalle equazioni del traformatore, si ha $\widetilde{I}_1 = -n\widetilde{I}_2 = -n\widetilde{I}_0$. Banalmente, la corrente che scorre sull'impedenza Z_3 vale $\widetilde{I}_{Z3} = -\alpha\widetilde{I}_1 - \widetilde{I}_1 = -(1+\alpha)\widetilde{I}_1 = n(1+\alpha)\widetilde{I}_0 = 6(1+j)$A.

Si ricava immediatamente $P_{R3} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\widetilde{V}_{Z3}\widetilde{I}^*_{Z3}\right\} = \frac{1}{2}R|\widetilde{I}_{Z3}|^2 = 36$W.

2-a)

Essendo gli operazionali ideali, e operanti sempre nella zona ad alto guadagno, numerandoli coerentemente con le denominazioni delle tensioni di uscita, vale $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$ e $I_-^{(i)} = I_+^{(i)} = 0$A con $i = 1, 2$.

Essendo $V_-^{(2)} = V_+^{(2)}$ si ha direttamente $V_{R3} = 0$ che ovviamente implica $I_{R3} = 0$. Ne segue che la corrente I_{R4} risulta essere pari a I_0. Non scorrendo corrente su R_3, vale anche $I_{R1} = I_{R2} = 0$, sicchè $V_-^{(2)} = V_+^{(2)} = V_+^{(1)} = V_-^{(1)} = 0$. Ne segue immediatamente $V_{o1} = V_-^{(1)} + R_5 I_0 = 2$V e $V_{o2} = V_-^{(2)} - R_4 I_0 = -2$V. Infine dunque $V_{R7} = V_{o1} - V_{o2} = 4$V.

2-b)

Poichè viene fornito l'andamento nel tempo della tensione $V_{AB}(t)$, risulta chiaro che queso risulti nella forma $Y_k = Y_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$ dove $\tau = R_{eq}C_D$ e ovviamente R_{eq} è la resistenza equivalente vista dai morsetti del condensatore. Quindi, essendo (per confronto diretto) $\tau = 1$msec e calcolando banalmente $R_{eq} = R_D + R_C = 1\text{k}\Omega$ si ottiene $C_D = \tau/R_{eq} = 1\mu$F.