Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 16 marzo 2006

1-a)

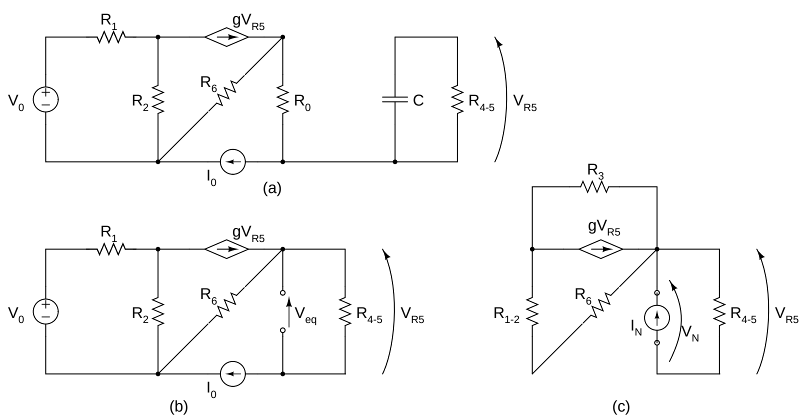
Si può scrivere $V_1 = -\beta V_{R2} = -\beta(V_1 - V_2)$ da cui si ricava $V_1 = \frac{\beta}{1+\beta} V_2$. Inoltre vale $V_2 = V_1 + R_2(i_2 - \alpha i_{R1})$ dove $i_{R1} = V_1/R_1$ per cui si puo' scrivere $V_2 = \left(1 - \alpha \frac{R_2}{R_1}\right) V_1 + R_2 i_2$. Sostituendo l'espressione di V_1 trovata in precedenza, si ottiene $V_2 = (1+\beta)\frac{R_1 R_2}{R_1 + \alpha\beta R_2} i_2$, da cui infine $V_1 = \beta \frac{R_1 R_2}{R_1 + \alpha\beta R_2} i_2$.

Ne segue $\underline{R} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \frac{R_1 R_2}{R_1+\alpha\beta R_2} \\ 0 & (1+\beta)\frac{R_1 R_2}{R_1+\alpha\beta R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}$ kΩ.

Collegando il bipolo aggregato (V_0, R_0) alla porta 1, si puo' scrivere $V_2 = R_{22} i_2$ (essendo $R_{21} = 0$), da cui si ricava immediatamente $V_{eq} = 0$, $R_{eq} = R_{22} = 600\Omega$.
Nota: il generatore dipendente di tensione impedisce di vedere cio' che accade a monte della porta 1 dalla porta 2, per cui l'equivalente di Thevenin risulta lo stesso qualsiasi sia il circuito collegato alla porta 1 (che non dia luogo ovviamente a incongruenze circuitali).

1-b)

Per $t < 0$sec il circuito è a regime e il condensatore è assimilabile ad un circuito aperto. La situazione e' mostrata in figura (a), dove $R_{4-5} = R_4 // R_5 = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}$.



Risulta evidente che $V_C = 0$ (il condensatore e' un circuito aperto, per cui la corrente sulla resitenza risulta nulla, e di conseguenza e' nulla anche la tensione). (Nota: la resitenza R_6 non era contemplata nel testo originale del compito; il suo ruolo e' esclusivamente quello di non rendere incongruente il sottocircuito a cui appartiene, in questa configurazione circuitale. Infatti, essendo $V_{R5} = V_C = 0$, si avrebbe $gV_{R5} = 0 = I_0$ il che non e' possibile)

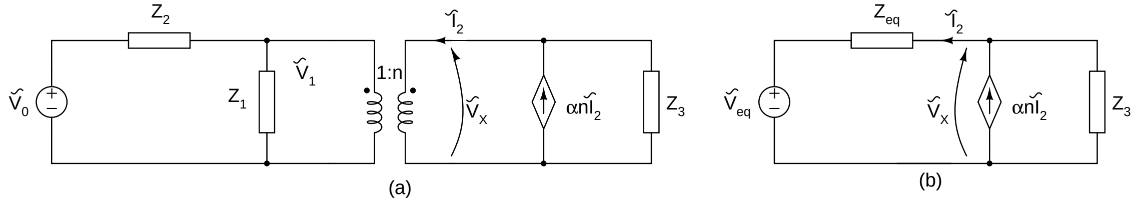
Per $t > 0$ conviene calcolare l'equivalente di Thevenin ai capi del condensatore. La tensione equivalente si ricava dal circuito di figura (b). Si nota subito che $V_{eq} = I_0 R_{4-5} = 10$V.

Per il calcolo della resistenza equivalente, dopo aver spento tutti i generatori indipendenti si ottiene il circuito di figura (c). Evidentemente vale $V_N = R_{4-5} I_N$ che implica direttamente $R_{eq} = R_{4-5} = 5\text{k}\Omega$.

Si può scrivere quindi , $v_{R5} = v_C(t) = v_{C\infty} - (v_{C\infty} - v_C(0))e^{-t/\tau}$ dove $v_{C\infty} = V_{eq} = 10\text{V}$, $v_C(0) = 0\text{V}$ e $\tau = R_{eq}C = 10\text{msec}$. Quindi $v_{R5}(t) = [10(1 - e^{-100t})]\text{V}$.

1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha ($\omega = 5\text{rad/sec}$): $Z_1 = Z_2 = 1/(j\omega C_1) = -4j\Omega$, $Z_3 = R_3 + j\omega L_3 = (1+j)\Omega$, $\widetilde{V}_0 = j\text{V}$.



Il circuito nel dominio dei fasori è mostrato in figura (a). Il generatore dipendente puo' infatti essere visto in funzione di $\widetilde{I}_2$ essendo $\alpha\widetilde{I}_1 = -n\alpha\widetilde{I}_2$ (il segno meno e' stato usato per cambiare verso alla corrente imposta dal generatore).

Con questo accorgimento, e' possibile calcolare l'equivalente di Thevenin a monte della porta 2 del trasformatore. Banalmente si ha $\widetilde{V}_{eq} = n\widetilde{V}_1 = n\widetilde{V}_0 \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} = j\text{V}$ e $Z_{eq} = n^2(Z_1//Z_2) = -8j\Omega$ (impedenza vista dalla porta di uscita di un trasformatore). Il circuito risulta quello di figura (b) dove vale $\widetilde{V}_x = Z_3(\alpha n\widetilde{I}_2 - \widetilde{I}_2)$ con $\widetilde{I}_2 = (\widetilde{V}_x - \widetilde{V}_2)/Z_{eq}$; sostituendo si ricava $\widetilde{V}_x = \frac{Z_3(\alpha n-1)}{Z_{eq}+Z_3(\alpha n-1)} = 0\text{V}$, da cui infine $v_X(t) = 0\text{V}$. (Nota: per la scelta dei valori dei parametri, $n\alpha = 1$. Ne segue che la corrente del generatore dipendente scorre per intero nel trasformatore ($\alpha n\widetilde{I}_2 = \widetilde{I}_2$), per cui su Z_3 si ha corrente nulla e quindi $\widetilde{V}_{Z3} = \widetilde{V}_x = 0$).

2-a)

Essendo gli operazionali ideali, e operanti sempre nella zona ad alto guadagno, numerandoli da sinistra a destra, vale $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$ e $I_-^{(i)} = I_+^{(i)} = 0\text{A}$ con $i = 1, 2$.

Si ha $V_{R1} = V_{R2}$ che implica $R_2 i_{R2} = R_1(I_0 - i_{R2})$, da cui $i_{R2} = \frac{R_1}{R_1+R_2} I_0$. Essendo $V_-^{(1)} = V_+^{(1)} = R_3 i_{R2} = 3\text{V}$, ed inoltre $i_{R4} = i_{R1} = I_0 - i_{R2}$ si ottiene $V_{o1} = V_+^{(2)} = V_-^{(2)} = V_+^{(1)} - R_4 i_{R1} = 1\text{V}$. Essendo quindi la resitenza R_6 sottoposta a differenza di potenziale nulla dagli ingressi dell'amplificatore operazionale ideale 2, $i_{R6} = 0$, ed essendo $I_-^{(2)} = 0$ si ha $i_{o1} = V_{o1}/R_7 = 1\text{mA}$. Infine, $V_{o2} = V_{o1} - R_5 I_{R4} = 0\text{V}$.

2-b)

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, indicando con V_x tensione che si ha quando entrambi i generatori sono ON, si ha $V_x = V_x' + V_x''$ dove V_x' e' il valore della tensione nella situazione (I_A ON, V_A OFF), mentre V_x'' e' la tensione nella situazione (I_A OFF, V_A ON), quindi $V_x' = 2\text{V}$, $V_x = V_x' + V_x'' = 6\text{V} \Rightarrow V_x'' = V_x - V_x' = 4\text{V}$.
Per la linearita' del sistema, si ha $(\alpha I_A, \beta V_A) \rightarrow V_x = \alpha V_x' + \beta V_x''$ quindi, considerando la situazione di figura (b), si ha semplicemente $V_x^{(b)} = (-1)V_x' + (0.5)V_x'' = 0\text{V}$.