Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 4 ottobre 2006

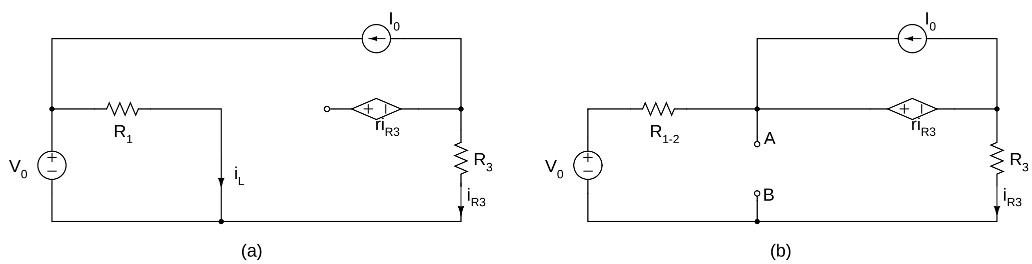
1-a)

Analizzando il circuito, si ricava $V_1 = R_1(I_1 - gR_3I_2) + R_2(I_1 + I_2) = (R_1 + R_2)I_1 + (R_2 - gR_3R_1)I_2$ e $V_2 = R_2(I_1 + I_2) + R_3I_2 - r(I_1 + I_2) = (R_2 - r)I_1 + (R_2 + R_3 - r)I_2$ da cui si ottiene

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & R_2 - gR_3R_1 \\ & \\ R_2 - r & R_2 + R_3 - r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{k}\Omega.$$

Collegando il generatore ideale V_0 alla porta 2, si ha $V_0 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2$ da cui si ricava $I_2 = \frac{V_0}{R_{22}} - \frac{R_{21}I_1}{R_{22}}$. Dalla relazione alla porta 1 si ottiene $V_1 = \frac{R_{12}}{R_{22}}V_0 + (R_{11} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{22}})I_1$ da cui segue direttamente $V_{eq} = \frac{R_{12}}{R_{22}}V_0 = 2\text{V}$ e $R_{eq} = R_{11} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{22}} = 6.4\text{k}\Omega$.

1-b)



Per $t < 0$sec il circuito é a regime e l'induttore è assimilabile ad un corto circuito. Si ottiene il circuito di figura (a) dove risulta evidente $i_L(t) = \frac{V_0}{R_1} = 2.5\text{mA}$.

Per $t > 0$ conviene calcolare l'equivalente di Thevenin ai capi dell'induttore. La tensione equivalente si ricava dal circuito di figura (b), dove si può notare che il generatore indipendente di corrente, essendo in parallelo ad un generatore di tensione può essere rimosso. Indicando con $R_{1-2} = R_1//R_2$, si può scrivere $i_{R3} = \frac{V_0 - ri_{R3}}{R_{1-2}+R_3}$ da cui si ricava $i_{R3} = \frac{V_0}{R_{1-2}+R_3+r}$ e quindi $V_{eq} = V_0 - R_{1-2}i_{R3} = \frac{r+R_3}{R_{1-2}+r+R_3}V_0 = 5\text{V}$.

Per il calcolo della resistenza equivalente si può notare che, una volta spenti i generatori indipendenti, il generatore comandato è equivalente ad un reistore di resitenza r (infatti è controllato dalla corrente che lo attraversa). Quindi, banalmente $R_{eq} = R_{1-2}//(r + R_3) = 1\text{k}\Omega$. (Supponendo di non notare questa particolarità del generatore controllato, sarebbe bastato imporre una corrente I_N ai morsetti, e quindi $i_{R3} = \frac{V_{AB} - ri_{R3}}{R_3}$ da cui si ricava $i_{R3} = \frac{V_{AB}}{R_3+r}$ e imponendo $I_N = i_{R3} + i_{R2} = \frac{V_{AB}}{R_3+r} + \frac{V_{AB}}{R_{1-2}}$ si ricava $V_{AB} = [R_{1-2}//(r + R_3)]I_N$ da cui si ottiene (ovviamente) la stessa resistenza equivalente trovata in precedenza)

Si può scrivere quindi $i_L(t) = i_{L\infty} - (i_{L\infty} - i_L(0^+))e^{-t/\tau}$ dove $i_{L\infty} = V_{eq}/R_{eq} = 5\text{mA}$, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2.5\text{mA}$ e $\tau = L/R_{eq} = 1\mu\text{sec}$. Sostituendo si ricava $i_L(t) = [5 - 2.5e^{-10^6 t}]\text{mA}$.

1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha ($\omega = 1$rad/sec): $Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = (1+j)\Omega$, $Z_2 = R_2 + (1/j\omega C_2) = (1-j)\Omega$, $Z_3 = R_3 + j\omega L_3 = (1+j)\Omega$, $\widetilde{V}_0 = (1+j)$V, $\widetilde{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j\sqrt{3})$V, $\widetilde{I}_0 = (1-j)$A.

Dalle equazioni del traformatore (n), si ha $\widetilde{I}_2^{(n)} = -\frac{\widetilde{I}_1^{(n)}}{n} = -\frac{\widetilde{I}_0}{n}$. Banalmente, questa è la corrente che entra nella porta due del trasformatore (m) per cui $\widetilde{I}_1^{(m)} = -m\widetilde{I}_2^{(m)} = \frac{m}{n}\widetilde{I}_0 = 2(1-j)$A.

Essendo per definizione $P_{V0} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\widetilde{V}_0\widetilde{I}_{V0}^*\right\}$ con $\widetilde{I}_{V0} = \widetilde{I}_1^{(m)} = 2(1-j)$A si ricava
$P_{V0} = \mathrm{Re}\left\{(1+j)(1+j)\right\} = 0$W.

2-a)

Essendo gli operazionali ideali, e operanti sempre nella zona ad alto guadagno, numerandoli coerentemente con le denominazioni delle tensioni di uscita, vale $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$ e $I_-^{(i)} = I_+^{(i)} = 0$A con $i = 1, 2$.

Si può scrivere $V_-^{(2)} = V_+^{(i)} = 0$ ed inoltre, devono valere le relazioni $V_{R3} = V_{R1} + V_{R2}$ e $I_{R3} + I_{R1} = I_0$ con $I_{R1} = \frac{V_{R3}}{R_1+R_2}$. Sostituendo si ottiene $V_{R3} = I_0\left(\frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3}\right) = 1$V da cui $I_{R3} = V_{R3}/R_3 = 1$mA e $V_-^{(1)} = V_+^{(1)} = R_2(I_0 - I_{R3}) = 0.5$V. Quindi $V_{o1} = V_-^{(1)} + R_5 I_0 = 2.5$V e $V_{o2} = V_-^{(2)} - R_4 I_{R3} = -1$V. Infine $V_{R7} = (V_{o1} - V_{o2}) - V_0 = 1.5$V.

2-b)

Se il bipolo B fosse un condensatore, allora per $t > 0$, a regime $V_{AB}(+\infty) = RI_0 = 1$V, quindi l'andamento della tensione ai morsetti dovrebbe tendere a tale valore con lo scorrere del tempo, indipendentemente dalla condizione iniziale (tra l'altro non nota). Dalle misure però risulta che la tensione non tende ad avvicinarsi al valore 1V, ma se ne allontana. Quindi il bipolo B non può essere un condensatore. Sapendo che è un induttore, la corrente i_L si può trovare banalmente come $i_L(t) = i_{L\infty} - (i_{L\infty} - i_L(0))e^{-t/\tau}$ con $i_{L\infty} = I_0$, $i_L(0) = 0$ e $\tau = L/R$. Inoltre, si ricava $V_{AB}(t) = R(I_0 - i_L(t)) = RI_0 e^{-t/\tau}$ per cui, facendo uso della misura $V_{AB}(t_1 = 1\mu\text{sec}) = 0.37$V, si può scrivere $V_{AB}(t_1) = RI_0 e^{-t_1/\tau}$ da cui ricavando τ tramite formula inversa si ha
$\tau = -\frac{t_1}{\ln[V_{AB}(t_1)/(RI_0)]} = -\frac{1\cdot 10^{-6}}{\ln(0.37/(1))} \cong 1\mu$sec per cui $L = R\tau \cong 1$mH. (Analogamente usando la misura a t_2 si ottiene $\tau = -\frac{3\cdot 10^{-6}}{\ln(0.05/(1))} \cong 1\mu$sec)