Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 9 gennaio 2006

1-a)

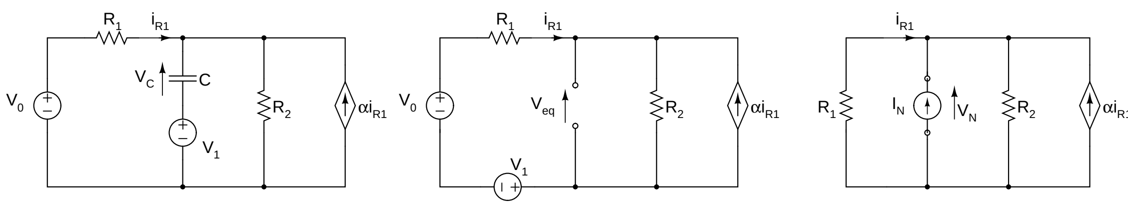
Si può scrivere $V_1 = \beta V_2 + R_2(I_1 + I_2 + \alpha I_1)$ e $V_2 = V_1 + R_1(I_2 + \alpha I_1)$, da cui per sostituzione si ricava $V_1 = \frac{(1+\alpha)R_2 - \alpha\beta R_1}{1+\beta} I_1 + \frac{R_2 - \beta R_1}{1+\beta} I_2$, $V_2 = \frac{R_2 + \alpha(R_1+R_2)}{1+\beta} I_1 + \frac{R_1+R_2}{1+\beta} I_2$.

Ne segue $\underline{R} = \frac{1}{1+\beta} \begin{bmatrix} R_2 + \alpha(R_2 - \beta R_1) & R_2 - \beta R_1 \\ R_2 + \alpha(R_1 + R_2) & R_1 + R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \mathrm{k}\Omega.$

Collegando i generatori indipendenti alle porte si può scrivere $V_0 = R_{11}I_1 + R_{12}I_0$ da cui si ricava $I_1 = (V_0 - R_{12}I_0)/R_{11} = 0.5\mathrm{mA}$ che implica $P_{Vo} = V_0 I_1 = 3\mathrm{mW}$.
Analogamente $V_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_0 = 8.5\mathrm{V}$, e quindi $P_{Io} = I_0 V_2 = 8.5\mathrm{mW}$.

1-b)

Per $t < 0$sec il circuito è a regime e il condensatore è assimilabile ad un circuito aperto. La situazione e' mostrata in figura (a).



(a) (b) (c)

Risulta evidente che $i_{R1} = \frac{V_0 - V_C - V_1}{R_1}$ e quindi essendo $V_1 + V_C = R_2(1+\alpha)i_{R1}$ si ottiene $V_C(t) = \frac{(1+\alpha)R_2}{R_1 + (1+\alpha)R_2} V_0 - V_1 = -6\mathrm{V}$, $\forall t \le 0$.

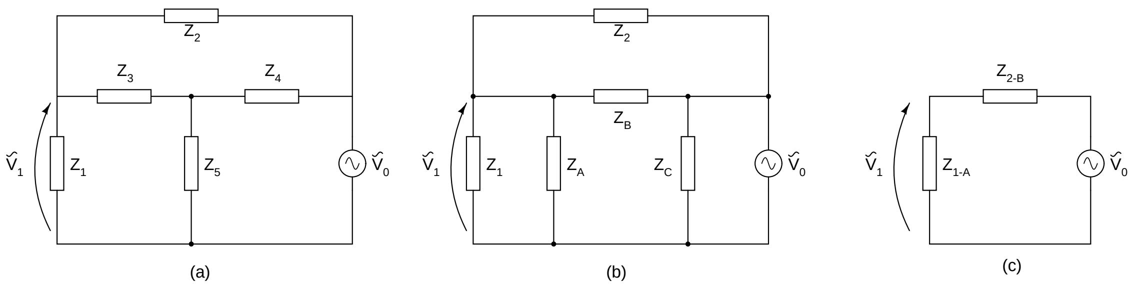
Per $t > 0$ conviene calcolare l'equivalente di Thevenin ai capi del condensatore. La tensione equivalente si ricava dal circuito di figura (b). Si ha $i_{R1} = \frac{V_0 - V_{eq} - V_1}{R_1}$ ed essendo $V_{eq} = R_2(1+\alpha)i_{R1}$ si ricava $V_{eq} = \frac{(1+\alpha)R_2}{R_1 + (1+\alpha)R_2}(V_0 - V_1) = -2\mathrm{V}$.

Per il calcolo della resistenza equivalente, dopo aver spento tutti i generatori indipendenti si ottiene il circuito di figura (c). Si ottiene facilmente $I_N = \frac{V_N}{R_2} - i_{R1} - \alpha i_{R1}$ ed essendo $V_N = -R_1 i_{R1}$ si ottiene $V_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + (1+\alpha)R_2} I_N$ ossia $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + (1+\alpha)R_2} = \frac{2}{3}\mathrm{k}\Omega$.

Si può scrivere quindi , $v_C(t) = v_{C\infty} - (v_{C\infty} - v_C(0))e^{-t/\tau}$ dove $v_{C\infty} = V_{eq} = -2\mathrm{V}$, $v_C(0) = -6\mathrm{V}$ e $\tau = R_{eq}C = 2\mathrm{msec}$. Quindi $v_C(t) = [-2 - 4e^{-500t}]\mathrm{V}$.

1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha ($\omega = 1$rad/sec): $Z_1 = j\omega L_1 = 2j\Omega$, $Z_2 = R_2 = 2\Omega$, $Z_3 = j\omega L_3 = j\Omega$, $Z_4 = R_4 + j\omega L_4 = (1+j)\Omega$, $Z_5 = R_5 + 1/(j\omega C_5) = (1-j)\Omega$, $\widetilde{V}_0 = (1+j)$V.



Il circuito nel dominio dei fasori è mostrato in figura (a). Conviene operare una trasformazione Stella-Triangolo alla stella formata dalle impendenze Z_3, Z_4, Z_5, ottenendo le impedenze/triangolo $Z_A = Z_3 + Z_5 + \frac{Z_3 Z_5}{Z_4} = 2\Omega$, $Z_B = Z_3 + Z_4 + \frac{Z_3 Z_4}{Z_5} = 2j\Omega$, $Z_C = Z_4 + Z_5 + \frac{Z_4 Z_5}{Z_3} = 2(1-j)\Omega$.

La situazione è mostrata in figura (b). Si nota che l'impedenza Z_C risulta in parallelo al generatore di tensione, per cui può essere rimossa. Semplificando i paralleli di impedenze si ottiene la situazione di figura (c) dove $Z_{1-A} = Z_1//Z_A = (1+j)\Omega$ e $Z_{2-B} = Z_2//Z_B = (1+j)\Omega$. Si ottiene banalmente $\widetilde{V}_1 = \widetilde{V}_0 \frac{Z_{1-A}}{Z_{1-A}+Z_{2-B}} = \widetilde{V}_0/2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}$V, da cui infine $v_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t+\pi/4)$V.

2-a)

Essendo gli operazionali ideali, e operanti sempre nella zona ad alto guadagno, numerandoli da sinistra a destra, vale $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$ e $I_-^{(i)} = I_+^{(i)} = 0$A con $i = 1, 2$.

Si ha $V_-^{(1)} = V_+^{(1)} = R_3 I_1 = 6$V, ed inoltre $V_-^{(1)} = R_2 I_{R2} + R_1(I_0 + I_{R2})$ da cui si ricava $I_{R2} = \frac{V_+^{(1)} - R_1 I_0}{R_1 + R_2} = 0.5$mA. Si ottiene quindi $V_{o1} = V_-^{(1)} + R_4(I_{R2} + I_1) = 10$V.

Inoltre, vale $V_-^{(2)} = V_+^{(2)} = R_1(I_0 + I_{R2}) = 5$V e quindi $I_{R5} = \frac{V_{o1} - V_-^{(2)}}{R_5} = 2.5$mA, da cui si ottiene $V_{o2} = V_-^{(2)} - R_6 I_{R5} = -5$V.

2-b)

Il taglio $\{I_0, I_1, I_2, I_3, C_2\}$ coinvolge solo generatori indipendenti di corrente e il condensatore C_2, quindi $i_{C2}(t) = I_0 + I_1 + I_2 - I_3 = 3$mA ossia il condensatore è sottoposto ad una corrente costante. Essendo $i_{C2}(t) = C_2 \frac{dv_{C2}(t)}{dt}$, si ha $v_{C2}(t) = v_{C2}(0) + \frac{1}{C_2}\int_0^t i_{C2}(\tau)d\tau = [t]$V.

Il taglio $\{I_0, I_1, I_4, I_5, L_2\}$ coinvolge solo generatori indipendenti di corrente e l'induttore L_2, il quale quindi si troverà **sempre** attraversato dalla corrente costante $i_{L2}(t) = I_0 + I_1 + I_2 - I_4 - I_5 = 2$mA, ossia l'induttore L_2 risulta assimilabile ad un corto circuito, per cui ovviamente $v_{L2}(t) = 0$V. ($v_{L2}(t) = L\frac{di_{L2}(t)}{dt} = 0$V)