

## Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 20 giugno 2007

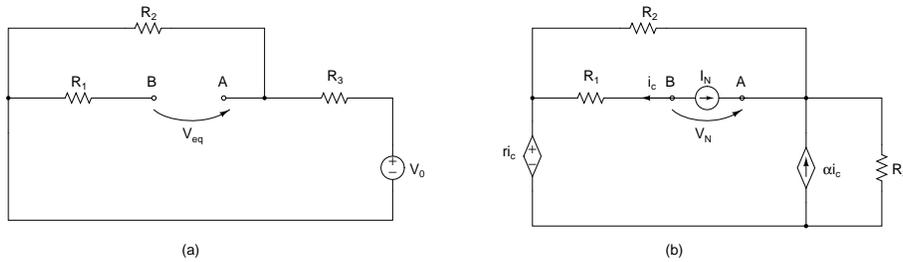
### 1-a)

Analizzando il circuito, si ricava  $V_1 = R_1 I_1 + V'_1 + R_3 I_{R3}$ ,  $V_2 = R_4 I_{R4}$ . Dalla definizione di porta, si ha che  $I_{R3} = I_1$  ed inoltre  $I'_2 = \alpha I_{R3} = \alpha I_1$ . Si ha quindi  $V_1 = (R_1 + R_3)I_1 + R'_{11}I_1 + R'_{12}\alpha I_1$  e  $V_2 = R_4(I_2 - \alpha I_{R3}) = R_4(I_2 - \alpha I_1)$  da cui si deduce

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R'_{11} + \alpha R'_{12} & 0 \\ -\alpha R_4 & R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \text{ k}\Omega.$$

Collegando il generatore reale  $\{V_0, R_0\}$  alla porta 1, si ha  $V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 = V_0 - R_0I_1$  da cui si ricava  $I_1 = \frac{V_0}{R_0 + R_{11}}$ . Dalla relazione alla porta 2 si ottiene  $V_2 = \frac{R_{21}V_0}{R_0 + R_{11}} + R_{22}I_2$  da cui segue direttamente  $V_{eq} = \frac{R_{21}V_0}{R_0 + R_{11}} = -2\text{V}$  e  $R_{eq} = R_{22} = 5\text{k}\Omega$ .

### 1-b)



Per  $t < 0$ sec il circuito è a regime e le capacità si comportano come circuiti aperti. Sapendo che sono scariche si ricava immediatamente  $V_{C1}(0^-) = 0$  e  $V_{C2}(0^-) = 0$ .

Per  $t > 0$  conviene sostituire la serie delle due capacità con un'unica capacità data dalla serie delle due:  $C_T = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 2\mu\text{F}$ .

Conviene ora calcolare l'equivalente di Thevenin ai capi della capacità  $C_T$ . La tensione equivalente si ricava dal circuito di figura (a), dove i generatori dipendenti risultano spenti essendo nulla la loro variabile di comando ( $i_C = 0$ ). Si ricava semplicemente  $V_{eq} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 6\text{V}$ .

Per il calcolo della resistenza equivalente, una volta spenti i generatori indipendenti, si ottiene il circuito di figura (b).

Si può scrivere  $V_N = V_A - V_B$ ,  $V_B = r i_C - R_1 I_N = -(r + R_1)I_N$ ,  $V_A = r i_C + R_2(\alpha i_C + I_N - \frac{V_A}{R_3}) = -r I_N + R_2(-\alpha I_N + I_N - \frac{V_A}{R_3})$  da cui si ricava  $V_A = \frac{R_2(1-\alpha)-r}{R_2+R_3} R_3 I_N$ . Sostituendo quindi si ottiene  $V_N = \left( \frac{R_2(1-\alpha)-r}{R_2+R_3} R_3 + (r + R_1) \right) I_N$ , ossia  $R_{eq} = \frac{R_2(1-\alpha)-r}{R_2+R_3} R_3 + (r + R_1) = 5\text{k}\Omega$ .

Si può scrivere quindi  $v_{C_T}(t) = v_\infty - (v_\infty - v_{C_T}(0^+))e^{-t/\tau}$  dove  $v_\infty = V_{eq} = 6\text{V}$ ,  $v_{C_T}(0^+) = v_{C_T}(0^-) = 0$  e  $\tau = R_{eq} C_T = 10\text{msec}$ . Sostituendo si ricava  $v_{C_T}(t) = 6(1 - e^{-100t})\text{V}$ .

La corrente che scorre sulle due capacità vale quindi  $i_C(t) = C_T \frac{dv_{C_T}}{dt} = 1.2e^{-100t}\text{mA}$ , da cui si può ricavare  $v_{C_2}(t) = \frac{1}{C_2} \int_0^t i_C(\tau) d\tau + v_{C_2}(0^+) = 4(1 - e^{-100t})\text{V}$ .

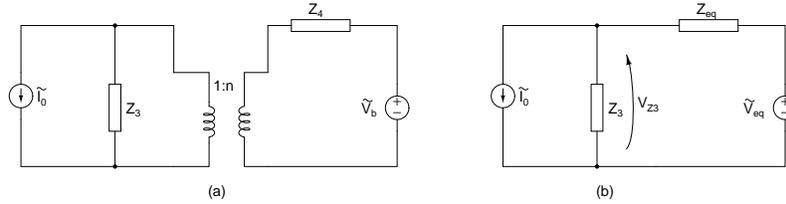
(Nota: il valore della tensione sulla capacità  $C_2$  poteva essere calcolato anche in un altro modo. Indicando con  $H(t) = \int_0^t i_C(\tau) d\tau$ , si può scrivere  $v_{C_T}(t) = \frac{H(t)}{C_1} + \frac{H(t)}{C_2}$  che implica  $H(t) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} v_{C_T}$  che

permette di calcolare  $v_{C2}(t) = \frac{H(t)}{C_2} = \frac{C_1}{C_1+C_2} v_{C_T}(t) = \frac{6}{9}6(1 - e^{-100t}) = 4(1 - e^{-100t})\text{V}$ .

Rimane quindi verificata la proprietà delle  $C$  di comportarsi "come delle  $G$ "; infatti la formula sopraindicata la si poteva dedurre formalmente dal partitore di tensione resistivo usando i parametri conduttanza, essendo per due conduttanze in serie  $G_1$  e  $G_2$  sottoposte ad una tensione serie  $V_0$ ,  $V_{G2} = \frac{G_1}{G_1+G_2}V_0$ . Si noti che tale formula è il duale della formula del partitore di corrente con due resistenze.)

### 1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha ( $\omega = 1\text{rad/sec}$ ):  $Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = (1 + j)\Omega$ ,  $Z_2 = R_4 - j(1/\omega C_2) = (1 - j)\Omega$ ,  $Z_3 = -j(1/\omega C_3) = -j\Omega$ ,  $Z_4 = R_4 + j\omega L_4 = (3 + j)\Omega$ ,  $\tilde{V}_a = \tilde{V}_b = 3(1 + j)\text{V}$ ,  $\tilde{I}_0 = 3j\text{A}$  (essendo  $i_0(t) = -3\sin(t) = 3\sin(t + \pi) = 3\cos(\pi/2 - t - \pi) = 3\cos(t + \pi/2)\text{A}$ ).



Poichè il parallelo  $\{\{\tilde{V}_a, Z_1\}, Z_2\}$  è in serie al generatore di corrente  $\tilde{I}_0$ , ai fini del calcolo della potenza reattiva dissipata da  $Z_3$  può essere rimosso. Il circuito è quello mostrato in figura (a). Calcolando l'equivalente di Thevenin a valle della porta 1 del trasformatore, si ottiene il circuito di figura (b) dove  $\tilde{V}_{eq} = \frac{\tilde{V}_b}{n}$  e  $Z_{eq} = \frac{Z_4}{n^2}$ . Risulta inoltre evidente che  $\tilde{V}_{Z3} = \frac{\tilde{V}_{eq}/Z_{eq} - \tilde{I}_0}{\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_{eq}}} = \sqrt{5}e^{-j1.11}\text{V}$ .

Quindi, si può calcolare  $Q_{C3} = \frac{1}{2}\text{Im} \left\{ \tilde{V}_{Z3} \tilde{I}_{Z3}^* \right\} = \frac{1}{2}\text{Im} \left\{ \tilde{V}_{Z3} \frac{\tilde{V}_{Z3}^*}{Z_3^*} \right\} = \frac{1}{2} \frac{|\tilde{V}_{Z3}|^2}{|Z_3|^2} \text{Im} \{ Z_3 \} = -2.5\text{VAR}$ .

### 2-a)

Essendo gli operazionali ideali, e operanti sempre nella zona ad alto guadagno, numerandoli coerentemente con le denominazioni delle tensioni di uscita, vale  $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$  e  $I_-^{(i)} = I_+^{(i)} = 0\text{A}$  con  $i = 1, 2$ .

Indicando con  $V_x$  il potenziale del nodo cui sono collegati  $R_1, R_3$  e  $I_0$ , si può scrivere  $i_{R3} = \frac{V_x - V_0}{R_3}$ ,  $i_{R1} = \frac{V_x}{R_1 + R_2} = -i_{R3} - I_0 = \frac{V_0 - V_x}{R_3} - I_0$  da cui si ricava  $V_x = \left( \frac{V_0}{R_3} - I_0 \right) \frac{R_3(R_1 + R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = 2\text{V}$ . Ne segue  $V_-^{(1)} = V_+^{(1)} = V_x \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1\text{V}$ ,  $V_{o1} = V_-^{(1)} - R_4 I_0 = -1\text{V}$ . Inoltre,  $i_{R5} = \frac{V_{o1} - V_0}{R_5} = -6\text{mA}$  da cui  $i_{R6} = I_1 + i_{R5} = -3\text{mA}$ . Si ha infine  $V_{o2} = V_-^{(2)} - R_6 i_{R6} = V_0 - R_6 i_{R6} = 8\text{V}$ .

### 2-b)

Si nota immediatamente che  $V_1^a = -V_0$ ; dalla matrice catena si ricava quindi  $V_2^a = T_{11}^a V_1^a + T_{12}^a I_1^a$  che data la struttura della matrice catena, risulta essere  $V_2^a = T_{11}^a V_1^a = 2V_1^a = -2V_0 = -2\text{V}$ . Analogamente,  $V_1^b = V_0 + V_2^a$  e  $V_2^b = T_{11}^b V_1^b + 0 = T_{11}^b (V_0 + V_2^a) = -2\text{V}$ . Quindi, dalla relazione alla porta 2 della matrice delle conduttanze,  $I_2^G = G_{21} V_1^G + G_{22} V_2^G = G_{21} V_2^b + G_{22} V_1 = 16\text{mA}$ , si ha che  $P = V_1 I_2^G = 32\text{mW}$ .