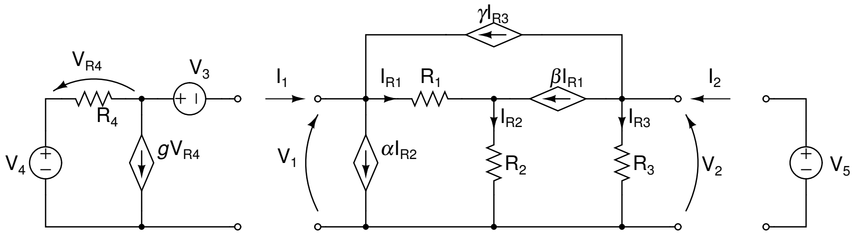
Esame di Teoria dei Circuiti – 13 Febbraio 2015 (Soluzione)

Esercizio 1



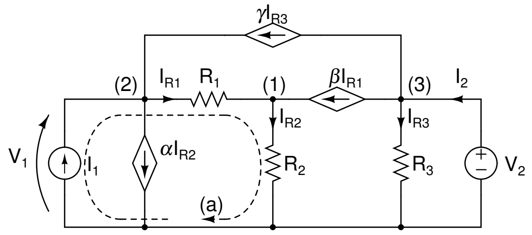
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = R_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $g = 3/2\,\mathrm{m\Omega^{-1}}$, $\alpha = 1/7$, $\beta = 6$, $\gamma = 1/4$, $V_3 = 12\,\mathrm{V}$, $V_4 = 2\,\mathrm{V}$, $V_5 = 5\,\mathrm{V}$.

Calcolare:

- la descrizione del doppio bipolo evidenziato in figura tramite la matrice ibrida $\underline{H}$, definita come $\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \underline{H} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$;
- il circuito equivalente di Norton alla porta 2 del doppio bipolo $\underline{H}$ calcolato sopra, quando alla porta 1 vengono collegati il generatore di corrente comandato $g\,V_{R4}$, i generatore di tensione ideale V_3 e V_4 e la resistenza R_4, come indicato in figura;
- la potenza dissipata dal doppio bipolo $\underline{H}$ quando alla porta di sinistra viene collegato lo stesso circuito considerato al punto precedente, e alla porta di destra il generatore ideale di tensione V_5.

Soluzione

Per determinare la descrizione del sottocircuito considerato tramite matrice ibrida $\underline{H}$ si supponga di collegare alla porta 1 (di sinistra) il generatore ideale di corrente I_1 e alla porta 2 (di destra) il generatore ideale di tensione V_2. Si calcoli quindi la tensione V_1 ai capi di I_1 e la corrente I_2 erogata da V_2.



Come prima cosa si può osservare che V_2 e R_3 sono in parallelo, per cui $V_{R3} = V_2$ e quindi $I_{R3} = V_2/R_3$. Quindi, dai nodi indicati con (1) e (2) si ha

$$(1):\; I_{R1} + \beta\, I_{R1} - I_{R2} = 0, \quad I_{R2} = (1+\beta) I_{R1}$$

$$(2):\; I_1 + \gamma\, I_{R3} - \alpha\, I_{R2} - I_{R1} = 0$$

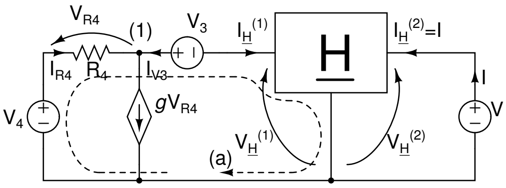
$$I_1 + \gamma \frac{V_2}{R_3} - \alpha(1-\beta) I_{R1} - I_{R1} = 0, \quad I_{R1} = \frac{I_1 + \gamma \frac{1}{R_3} V_2}{1 + \alpha + \alpha\,\beta}, \quad I_{R2} = (1+\beta) \frac{I_1 + \gamma \frac{1}{R_3} V_2}{1 + \alpha + \alpha\,\beta}$$

I valori della corrente e della tensione cercati si possono ottenere dal bilancio delle tensioni alla maglia (a) e dal bilancio delle correnti al nodo (3).

$$(a):\ V_1 = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} = \underbrace{\frac{R_1 + (1+\beta)R_2}{1+\alpha+\alpha\,\beta}}_{H_{11}=8\,\mathrm{k}\Omega} I_1 + \underbrace{\gamma\frac{1}{R_3}\frac{R_1+(1+\beta)R_2}{1+\alpha+\alpha\,\beta}}_{H_{12}=1} V_2$$

$$(3):\ I_2 = \beta\, I_{R1} + I_{R3} + \gamma\, I_{R3} = \underbrace{\frac{\beta}{1+\alpha+\alpha\,\beta}}_{H_{21}=3}\ I_1 + \underbrace{\left(\beta\,\gamma\frac{1}{R_3}\frac{1}{1+\alpha+\alpha\,\beta} + \frac{1}{R_3} + \gamma\frac{1}{R_3}\right)}_{H_{22}=1\,\mathrm{m}\Omega^{-1}} V_2$$

Per il secondo punto dell'esercizio, si consideri il circuito composto dal doppio bipolo $\underline{H}$ appena calcolato, a cui alla porta di sinistra è collegata la rete composta da V_3, V_4, R_4 e $g\,V_{R4}$. Per calcolare il circuito equivalente di Norton si è connesso alla porta 2 di $\underline{H}$ un generatore di tensione V, e si vuole calcolare la corrente I erogata.



Si indichino con $V_{\underline{H}}^{(1)}$ e $I_{\underline{H}}^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{H}$, e con $V_{\underline{H}}^{(2)}$ e $I_{\underline{H}}^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2. È immediato notare che $V_{\underline{H}}^{(2)} = V$, e che $I_{\underline{H}}^{(2)} = I$ è la corrente cercata.

Dal bilancio delle correnti al nodo indicato con (1) si ha

$$(1):\ I_{R4} - g\,V_{R4} + I_{V3} = 0, \quad \frac{V_{R4}}{R_4} - g\,V_{R4} + I_{V3} = 0$$

da cui $I_{V3} = -\frac{V_{R4}}{R_4} + g\,V_{R4}$ e $I_{\underline{H}}^{(1)} = -I_{V3} = \frac{V_{R4}}{R_4} - g\,V_{R4}$.

È possibile determinare V_{R4} dal bilancio delle tensioni alla maglia (a)

$$(a):\ V_4 - V_{R4} - V_3 - V_{\underline{H}}^{(1)} = 0$$

$$V_4 - V_{R4} - V_3 - H_{11}\left(\frac{V_{R4}}{R_4} - g\,V_{R4}\right) - H_{12}V = 0, \quad V_{R4} = \frac{V_4 - V_3 - H_{12}V}{1 + \dfrac{H_{11}}{R_4} - gH_{11}}$$

da cui si ha

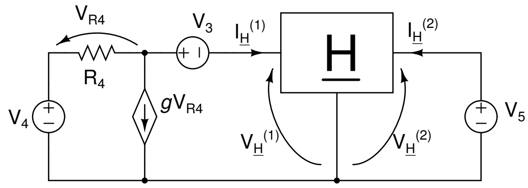
$$I_{\underline{H}}^{(1)} = \frac{V_{R4}}{R_4} - g\,V_{R4} = (1 - g\,R_4)\frac{V_4 - V_3 - H_{12}V}{R_4 + H_{11}(1 - g\,R_4)}$$

La corrente I è determinata da

$$I = I_{\underline{H}}^{(2)} = H_{21} I_{\underline{H}}^{(1)} + H_{22}V =$$

$$= \underbrace{H_{21}(1 - g\,R_4)\frac{V_4 - V_3}{R_4 + H_{11}(1 - g\,R_4)}}_{I^{(eq)} = -5\,\mathrm{mA}} + \left(\underbrace{H_{22} - (1 - g\,R_4)\frac{H_{12}H_{21}}{R_4 + H_{11}(1 - g\,R_4)}}_{G^{(eq)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\Omega^{-1}}\right) V$$

Nel terzo ed ultimo punto si chiede di calcolare la potenza dissipata dal doppio bipolo $\underline{H}$ quando alla porta di sinistra viene collegata la rete considerata al punto precedente, ed alla porta di destra il generatore ideale di tensione V_5.



Procedendo esattamente come nel caso precedente, si può calcolare

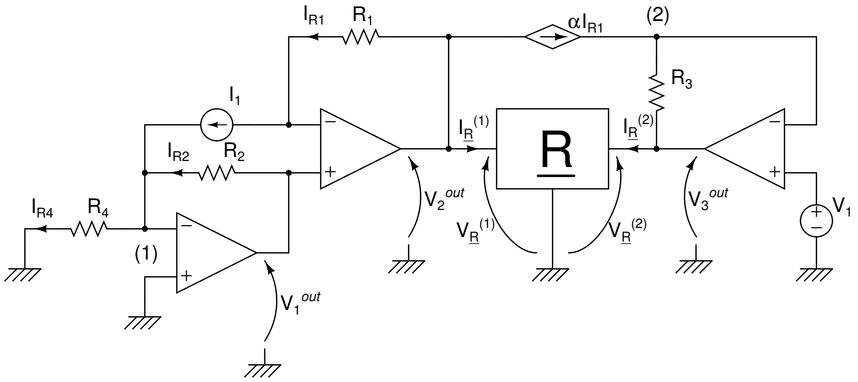
$$I_{\underline{H}}^{(1)} = (1 - g\,R_4)\frac{V_4 - V_3 - H_{12}V_5}{R_4 + H_{11}(1 - g\,R_4)} = -\frac{5}{2}\,\mathrm{mA}$$

Dalla definizione di $P_{\underline{H}}$ si ha

$$P_{\underline{H}} = V_{\underline{H}}^{(1)} I_{\underline{H}}^{(1)} + V_{\underline{H}}^{(2)} I_{\underline{H}}^{(2)} = \left(H_{11} I_{\underline{H}}^{(1)} + H_{12} V_{\underline{H}}^{(2)}\right) I_{\underline{H}}^{(1)} + V_{\underline{H}}^{(2)}\left(H_{21} V_{\underline{H}}^{(1)} + H_{22} V_{\underline{H}}^{(2)}\right) =$$

$$= H_{11}\left(I_{\underline{H}}^{(1)}\right)^2 + (H_{12} + H_{21})\, I_{\underline{H}}^{(1)} V_5 + G_{22}{V_5}^2 = 25\,\mathrm{mW}$$

Esercizio 2



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_4 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $\underline{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathrm{k}\Omega$, $\alpha = 3/5$, $V_1 = 3\,\mathrm{V}$, $I_1 = 5\,\mathrm{mA}$.

Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Determinare la potenza dissipata dal due porte $\underline{R}$.

Soluzione

Si considerino i versi delle tensioni e delle correnti come indicato in figura. Si consideri inoltre che per tutti gli amplificatori operazionali la corrente agli ingressi sia nulla e che la tensione ai due ingressi sia uguale per via del corto circuito virtuale.

Dall'ipotesi che gli ingressi degli operazionali assorbano corrente nulla, si può scrivere il bilancio delle correnti al nodo (1) come $I_1 + I_{R2} = I_{R4}$. Inoltre, dalla condizione di corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 1 si ha $V_1^- = V_1^+ = 0\,\mathrm{V}$. Poiché $V_{R4} = V_1^+ = 0\,\mathrm{V}$, si ha anche $I_{R4} = 0\,\mathrm{A}$, e quindi $I_{R2} = -I_1$. Da ciò è possibile ricavare la tensione di uscita del primo amplificatore operazionale

$$V_1^{out} = V_1^- + R_2 I_{R2} = -R_2 I_1 = -5\,\mathrm{V}$$

Passando all'operazionale indicato con 2, dall'ipotesi di corrente in ingresso nulla, si ha $I_{R1} = I_1$. Inoltre

$$V_2^- = V_2^+ = V_1^{out}$$

$$V_2^{out} = V_2^- + R_1 I_{R1} = V_1^{out} + R_1 I_{R1} = 0\,\mathrm{V}$$

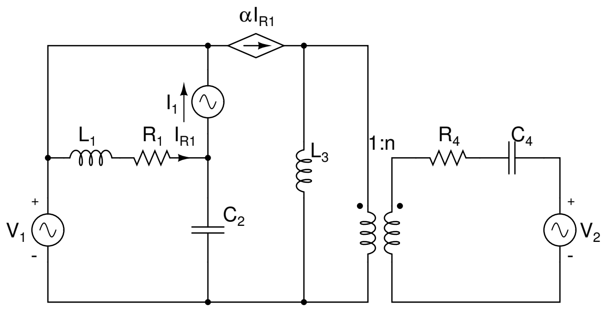
Infine, dalla condizione di corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 3 si ha $V_3^- = V_3^+ = V_1$. Per via della corrente nulla in ingresso, al nodo (2) si ha $I_{R3} = -\alpha\, I_{R1} = -\alpha\, I_1$. La tensione V_3^{out} vale quindi

$$V_3^{out} = V_3^- + R_3 I_{R3} = V_1 - \alpha\, R_3 I_1 = 0\,\mathrm{V}$$

A questo punto, si indichino con $V_{\underline{R}}^{(1)}$ e $I_{\underline{R}}^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{R}$, e con $V_{\underline{R}}^{(2)}$ e $I_{\underline{R}}^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2. È immediato notare che $V_{\underline{R}}^{(1)} = V_2^{out} = 0\,\mathrm{V}$, e che $V_{\underline{R}}^{(2)} = V_3^{out} = 0\,\mathrm{V}$. Senza calcolare le correnti $I_{\underline{R}}^{(1)}$ e $I_{\underline{R}}^{(2)}$, è possibile affermare che la potenza dissipata dal doppio bipolo $\underline{R}$ vale

$$P_{\underline{R}} = V_{\underline{R}}^{(1)} I_{\underline{R}}^{(1)} + V_{\underline{R}}^{(2)} I_{\underline{R}}^{(2)} = 0\,\mathrm{W}$$

Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 50\,\Omega$, $L_1 = 100\,\mathrm{mH}$, $C_2 = 40\,\mu\mathrm{F}$, $L_3 = 80\,\mathrm{mH}$, $R_4 = 1000\,\Omega$, $C_4 = 2\,\mu\mathrm{F}$, $n = 5$, $\alpha = 5/4$, $V_1(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t - \pi/4)$ V, $V_2(t) = 5\cos(\omega t + \pi/2)$ V, $I_1(t) = 20\cos(\omega t - \pi/2)$ mA, $\omega = 500\,\mathrm{rad/s}$.

Determinare la potenza complessa erogata dal generatore ideale di tensione V_2.

Soluzione

Nel dominio dei fasori alla pulsazione $\omega = 500\,\mathrm{rad/s}$ i tre generatori indipendenti sono schematizzabili con

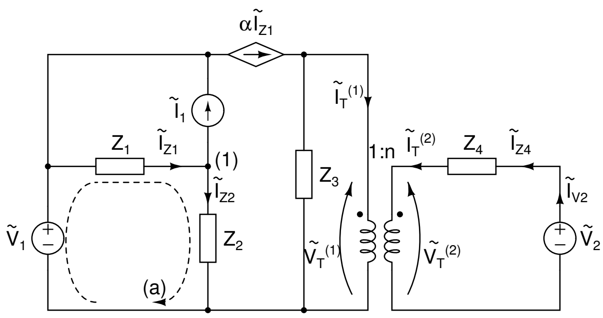
$$\tilde{V}_1 = \sqrt{2}\, e^{-j\pi/4}\,\mathrm{V} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,\mathrm{V} = 1 - j\,\mathrm{V}$$

$$\tilde{V}_2 = 5\, e^{j\pi/2}\,\mathrm{V} = j5\,\mathrm{V}$$

$$\tilde{I}_1 = 20\, e^{-j\pi/2}\,\mathrm{mA} = -j20\,\mathrm{mA}$$

mentre, rispettivamente, alla serie di L_1 e R_1, a C_2, a L_3 e alla serie di R_4 e C_4 si possono sostituire le impedenze Z_1, Z_2, Z_3 e Z_4 pari a

$$Z_1 = R_1 + j\Omega L_1 = 50 + j50\,\Omega$$
$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2} = -j50\,\Omega$$
$$Z_3 = j\Omega L_3 = j40\,\Omega$$
$$Z_4 = R_4 + \frac{1}{j\omega C_4} = 1000 - j1000\,\Omega$$



Si consideri il circuito di figura, in cui per coerenza con il cambio di notazione, il generatore di corrente comandato $\alpha\, I_{R1}$ è stato sostituito, per coerenza con la notazione fasoriale, con un generatore comandato $\alpha\, \tilde{I}_{Z1}$.

L'esercizio chiede di determinare la potenza complessa $\tilde{N}_{V2}$, definita come

$$\tilde{N}_{V2} = \frac{1}{2}\tilde{V}_1 \tilde{I}^*_{V2}$$

dove $\tilde{I}^*_{V2}$ è il fasore complesso coniugato della corrente $\tilde{I}_{V2}$. Poiché $\tilde{V}_2$ è nota, si proceda quindi calcolando $\tilde{I}_{V2} = \tilde{I}_{Z4}$

Dal nodo (1) si ha l'equazione

$$(1):\;\; \tilde{I}_{Z1} - \tilde{I}_1 - \tilde{I}_{Z2} = 0, \quad \tilde{I}_{Z2} = \tilde{I}_{Z1} - \tilde{I}_1$$

che messa a sistema con il bilancio delle tensioni alla maglia (a) permette di ricavare $\tilde{I}_{Z1}$.

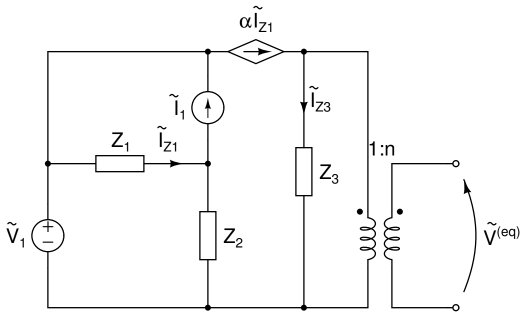
$$(a):\;\; \tilde{V}_1 - Z_1\tilde{I}_{Z1} - Z_2\tilde{I}_{Z2} = 0$$

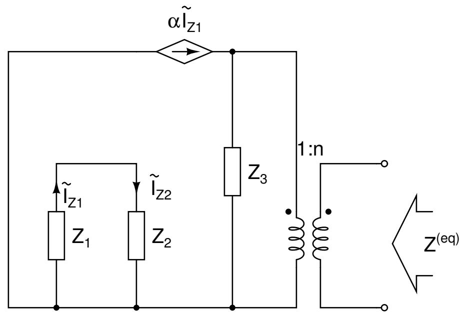
$$\tilde{V}_1 - Z_1\tilde{I}_{Z1} - Z_2\left(\tilde{I}_{Z1} - \tilde{I}_1\right) = 0, \quad \tilde{I}_{Z1} = \frac{\tilde{V}_1 + Z_2\tilde{I}_1}{Z_1 + Z_2} = -j20\,\text{mA}$$

Noto il valore di $\tilde{I}_{Z1}$ (e quindi di $\alpha\,\tilde{I}_{Z1} = -j25\,\text{mA}$) il circuito può semplicemente essere risolto con un qualunque metodo. Ad esempio, indicando con $\tilde{V}_T^{(1)}$ e $\tilde{I}_T^{(1)}$ tensione e corrente alla porta di sinistra del trasformatore, e con $\tilde{V}_T^{(2)}$ e $\tilde{I}_T^{(2)}$ tensione a corrente alla porta di destra, e considerando le equazioni del trasformatore

$$\begin{cases} \tilde{V}_T^{(2)} = n\,\tilde{V}_T^{(1)} \\ \tilde{I}_T^{(1)} = -n\,\tilde{I}_T^{(2)} \end{cases}$$

è possibile calcolare il circuito equivalente di Thevenin della rete elettrica a sinistra del trasformatore.





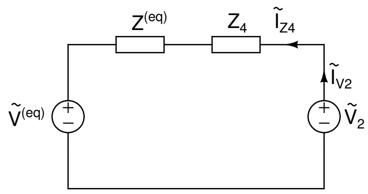
Per determinare $\tilde{V}^{(eq)}$ è sufficiente calcolare la tensione di circuito aperto, ovvero quella per cui $\tilde{I}_T^{(2)} = 0\,\mathrm{A}$ e quindi anche $\tilde{I}_T^{(1)} = 0\,\mathrm{A}$

$$\tilde{V}_{Z3} = Z_3 \tilde{I}_{Z3} = Z_3 \alpha\, \tilde{I}_{Z1}$$

$$\tilde{V}^{(eq)} = \tilde{V}_T^{(2)} = n\tilde{V}_T^{(1)} = n\tilde{V}_{Z3} = n\, Z_3\, \alpha\, \tilde{I}_{Z1} = 5\,\mathrm{V}$$

Per determinare $Z^{(eq)}$, si assuma di spegnere tutti i generatori indipendenti, ovvero $\tilde{V}_1 = 0\,\mathrm{V}$ e $\tilde{I}_1 = 0\,\mathrm{A}$, da cui si ha $\alpha\, \tilde{I}_{Z1} = 0\,\mathrm{A}$. In questo caso il circuito è equivalente alla sola impedenza Z_3 più il trasformatore, per cui si ha

$$V^{(eq)} = n^2 Z_3 = j1000\,\Omega$$



Sostituendo il circuito equivalente di Thevenin alla rete elettrica di sinistra, si arriva al circuito di figura, che è risolto da

$$\tilde{I}_{V2} = \tilde{I}_{Z4} = \frac{\tilde{V}_2 - \tilde{V}^{(eq)}}{Z^{(eq)} + Z_4} = j - 1\,\mathrm{mA}$$

da cui $\tilde{N}_{V2} = 50 - j50\,\mathrm{mVAR}$.