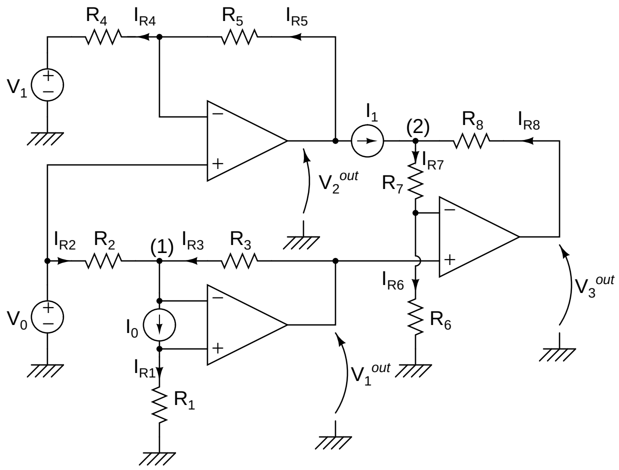
Esame di Teoria dei Circuiti - 1 aprile 2009 - Soluzione

Esercizio 1



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = R_2 = \ldots = R_8 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $V_0 = 3\,\mathrm{V}$, $V_1 = 1\,\mathrm{V}$, $I_0 = 5\,\mathrm{mA}$, $I_1 = 30\,\mathrm{mA}$. Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni di uscita degli operazionali V_1^{out}, V_2^{out} e V_3^{out}.

Soluzione

Si cominci con il calcolo di V_1^{out}. Ricordando che gli ingressi degli operazionali non assorbono corrente si ha $I_{R1} = I_0$, quindi

$$V_1^+ = I_0 R_1 = V_1^-$$

Per ricavare V_1^{out} necessario effettuare il bilancio delle correnti al nodo (1)

$$I_{R2} + I_{R3} = I_0$$

$$\frac{V_0 - V_1^-}{R_2} + \frac{V_1^{out} - V_1}{R_3} = I_0$$

da cui si ricava

$$V_1^{out} = V_1^- + R_3 I_0 - R_3 \frac{V_0 - V_1^-}{R_2} = R_1 I_0 + R_3 I_0 - R_3 \frac{V_0 - R_1 I_0}{R_2} = 12\,\mathrm{V}$$

Per quanto riguarda V_2^{out}, si ha $V_2^+ = V_0 = V_2^-$. Dato che

$$I_{R4} = \frac{V_2^- - V_1}{R_4} = \frac{V_0 - V_1}{R_4} = I_{R5}$$

si ricava che

$$V_2^{out} = V_2^- + R_5 I_{R5} = V_0 + R_5 \frac{V_0 - V_1}{R_4} = 5\,\mathrm{V}$$

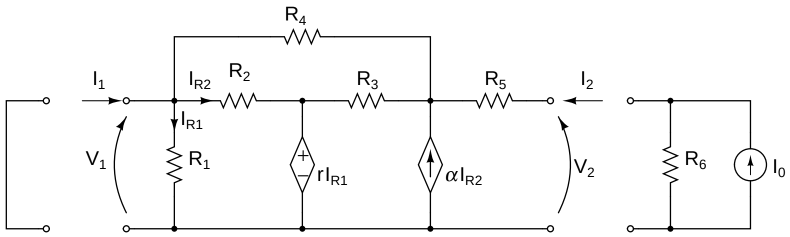
Per quanto riguarda invece V_3^{out}, si può osservare che $V_3^+ = V_1^{out} = V_3^-$. Dato che

$$I_{R6} = \frac{V_3^-}{R_6} = \frac{V_1^{out}}{R_6} = I_{R7}$$

e che (bilanco delle correnti al nodo (2)) $I_{R8} = I_{R7} - I_1$ si può ricavare V_3^{out} come

$$V_3^{out} = V_3^- + R_7 I_{R7} + R_8 I_{R8} = V_1^{out} + R_7 \frac{V_1^{out}}{R_6} + R_8 \frac{V_1^{out}}{R_6} - R_8 I_1 = 6\,\mathrm{V}$$

Esercizio 2

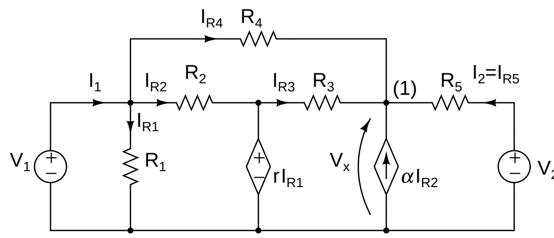


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = R_4 = R_5 = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 2/3$, $r = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $R_6 = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $I_0 = 2\,\mathrm{mA}$.
Calcolare:

- la matrice G delle conduttanze del due porte;
- il circuito equivalente di Thevenin alla porta 2, quando la porta 1 viene chiusa in corto circuito;
- il circuito equivalente di Thevenin alla porta 1, quando la porta 2 vengono collegati il generatore ideale di corrente I_0 e la resistenza R_6, come mostrato in figura.

Soluzione

Per trovare la matrice delle conduttanze G si supponga di collegare al due porte i due generatori ideali di tensione V_1 e V_2 e di calcolarne le correnti I_1 e I_2:



Chiamando V_x la tensione ai capi del generatore di corrente controllato αI_{R2}, è possibile esprimere tutte le correnti delle resistenze:

$$I_{R_1} = \frac{V_1}{R_1}$$

$$I_{R_2} = \frac{V_1 - rI_{R1}}{R_2} = \frac{V_1}{R_2} - \frac{r}{R_1 R_2}V_1$$

$$I_{R_3} = \frac{rI_{R1} - V_x}{R_3} = \frac{r}{R_1 R_3}V_1 - \frac{V_x}{R_3}$$

$$I_{R_4} = \frac{V_1 - V_x}{R_4}$$

$$I_{R_5} = \frac{V_2 - V_x}{R_5}$$

Il valore della tensione V_x si può ricavare dal bilancio delle correnti al nodo (1)

$$I_{R3} + I_{R4} + I_{R5} + \alpha I_{R2} = 0$$

$$\frac{r}{R_1 R_3}V_1 - \frac{V_x}{R_3} + \frac{V_1}{R_4} - \frac{V_x}{R_4} + \frac{V_2}{R_5} - \frac{V_x}{R_5} + \alpha\frac{V_1}{R_2} - \alpha\frac{r}{R_1 R_2}V_1 = 0$$

$$V_x = \frac{\dfrac{r}{R_1 R_3} + \dfrac{1}{R_4} + \alpha\dfrac{1}{R_2} - \alpha\dfrac{r}{R_1 R_2}}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5}}V_1 + \frac{\dfrac{1}{R_5}}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5}}V_2$$

Sostituendo i valori numerici, si ha $V_x = 2V_1/3 + V_2/3$.

A questo punto è possibile ricavare sia I_1 che I_2:

$$I_1 = I_{R1} + I_{R2} + I_{R4} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} - \frac{r}{R_1 R_2} V_1 + \frac{V_1}{R_4} - \frac{V_x}{R_4}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{r}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_4} \frac{\frac{r}{R_1 R_3} + \frac{1}{R_4} + \alpha \frac{1}{R_2} - \alpha \frac{r}{R_1 R_2}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \right)}_{G_{11}} V_1 - \underbrace{\frac{1}{R_4} \frac{\frac{1}{R_5}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}}_{-G_{12}} V_2$$

e

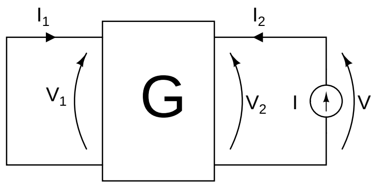
$$I_2 = I_{R5} = \frac{V_2}{R_5} - \frac{V_x}{R_5}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{R_5} \frac{\frac{r}{R_1 R_3} + \frac{1}{R_4} + \alpha \frac{1}{R_2} - \alpha \frac{r}{R_1 R_2}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}}_{G_{21}} V_1 + \underbrace{\frac{1}{R_5} \left(1 - \frac{\frac{1}{R_5}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \right)}_{G_{22}} V_2$$

Numericamente:

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \mathrm{m}\Omega^{-1}$$

Per il secondo punto dell'esercizio, il circuito da considerare è il seguente, dove per ricavare il circuito equivalente di Thevenin si è collegato alla porta due un generatore ideale di corrente I:



Date le equazione del due porte:

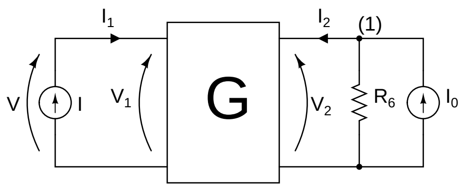
$$\begin{cases} I_1 = G_{11} V_1 + G_{12} V_2 \\ I_2 = G_{21} V_1 + G_{22} V_2 \end{cases}$$

ed osservando che $V_2 = V$, $I_2 = I$ e che $V_1 = 0$, dalla seconda equazione si ricava:

$$I = G_{22} V, \quad V = \frac{1}{G_{22}} I = V^{eq} + R^{eq} I$$

ne segue quindi che $V^{eq} = 0\,\mathrm{V}$, $R^{eq} = 1/G_{22} = 4.5\,\mathrm{k}\Omega$.

Per il terzo punto invece, si consideri il segente circuito



dove dal bilancio delle correnti al nodo (1) è possibile ricavare I_2:

$$I_2 = I_0 - \frac{V_2}{R_6}$$

Sostituendo questa espressione di I_2 nella seconda equazione del due porte, si ha:

$$I_0 - \frac{V_2}{R_6} = G_{21}V + G_{22}V_2$$

da cui, essendo $V_2 = \frac{I}{G_{12}} - \frac{G_{11}}{G_{12}}V$ come si ricava dalla prima equazione del due porte, si arriva alla risoluzione del sistema:

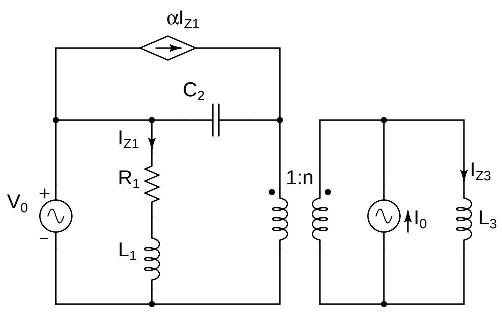
$$I_0 - \frac{I}{G_{12}R_6} + \frac{G_{11}}{G_{12}R_6}V = G_{21}V + \frac{G_{22}}{G_{12}}I - \frac{G_{11}G_{22}}{G_{12}}V$$

$$V\left(\frac{G_{11}}{G_{12}R_6} - G_{21} + \frac{G_{11}G_{22}}{G_{12}}\right) = -I_0 + \left(\frac{1}{G_{12}R_6} + \frac{G_{22}}{G_{12}}\right)I$$

$$V = \underbrace{\frac{-G_{12}R_6I_0}{G_{11} - G_{12}G_{21}R_6 + G_{11}G_{22}R_6}}_{V^{eq}} + \underbrace{\frac{1 + G_{22}R_6}{G_{11} - G_{12}G_{21}R_6 + G_{11}G_{22}R_6}}_{R^{eq}} I$$

Sostituendo i valori numerici, si ha $V^{eq} = 6\,\mathrm{V}$, $R^{eq} = 15\,\mathrm{k\Omega}$.

Esercizio 3

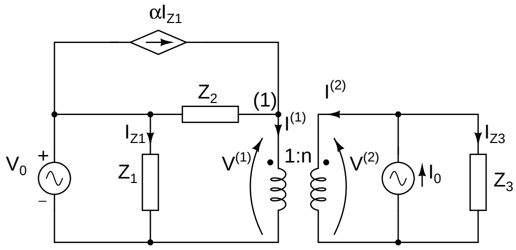


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$\omega = 200\,\mathrm{krad/s}$, $L_1 = 2\,\mathrm{mH}$, $R_1 = 400\,\Omega$, $C_2 = 50\,\mathrm{nF} = 50 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}$, $L_3 = 2.5\,\mathrm{mH}$, $\alpha = 4$, $n = 5$, $I_0 = 4\cos(\omega t)\,\mathrm{mA}$, $V_0 = 4\cos(\omega t + \pi/2)\,\mathrm{V}$.

Calcolare la corrente I_{Z3} che scorre sull'induttanza L_3.

Soluzione

Nel dominio dei fasori il circuito può essere ridisegnato come



con $Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = 400 + 400j\,\Omega$, $Z_2 = 1/(j\omega C_2) = -j100\,\Omega$, $Z_3 = j\omega L_3 = 500j\,\Omega$, $V_0 = 4e^{j\pi/2}\,\mathrm{V} = 4j\,\mathrm{V}$, $I_0 = 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}$.

Data la semplicità circuitale, si può risolvere il circuito senza dover ricorrere al circuito equivalente di Thevenin di una parte di esso.

Il valore della variabile di controllo I_{Z1} si ricava immediatamente come

$$I_{Z_1} = \frac{V_0}{Z_1}$$

Nota I_{Z1}, e chiamando con $V^{(1)}$ e $V^{(2)}$ e con $I^{(1)}$ e $I^{(2)}$, rispettivamente, le tensioni e le correnti ai due rami del trasformatore si può scrivere il bilancio delle correnti al nodo (1):

$$\alpha\frac{V_0}{Z_1} + \frac{V_0 - V^{(1)}}{Z_2} = I^{(1)}$$

$$V^{(1)} = V_0 + \alpha\frac{Z_2}{Z_1}V_0 - Z_2 I^{(1)}$$

Date le equazioni costitutive del trasformatore

$$\begin{cases} V^{(2)} = nV^{(1)} \\ I^{(1)} = -nI^{(2)} \end{cases}$$

è possibile ricavare $V^{(2)}$

$$V^{(2)} = nV_0 + n\alpha\frac{Z_2}{Z_1}V_0 + n^2 Z_2 I^{(2)}$$

Osservando che $V^{(2)} = Z_3 I_{Z3}$ e che $I^{(2)} = I_0 - I_{Z3}$, l'ultima equazione si può riscrivere come

$$Z_3 I_{Z3} = nV_0 + n\alpha\frac{Z_2}{Z_1}V_0 + n^2 Z_2\left(I_0 - I_{Z3}\right)$$

da cui si ricava

$$I_{Z3} = \frac{nV_0 + n\alpha\frac{Z_2}{Z_1}V_0 + n^2 Z_2 I_0}{Z_3 + n^2 Z_2}$$

Sostituendo i valori numerici, si ha $I_{Z3} = j/200\,\mathrm{A} = 5j\,\mathrm{mA}$. Quindi $I_{Z3}(t) = 5\cos(\omega t + \pi/2)\,\mathrm{mA}$.