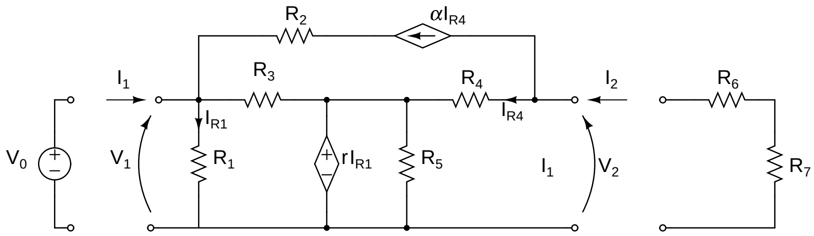
Esame di Teoria dei Circuiti - 13 giugno 2008 - Soluzione

Esercizio 1

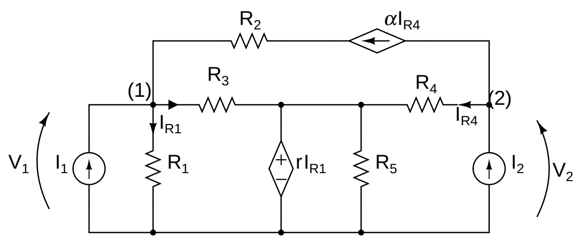


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 7$ kΩ, $R_3 = 2$ kΩ, $R_4 = 1$ kΩ, $R_5 = 3.7$ kΩ, $R_6 = 1$ kΩ, $R_7 = 2$ kΩ, $r = 2$ kΩ, $\alpha = 2$, $V_0 = 5$ V. Calcolare:

- la matrice delle resistenze del due-porte
- la potenza dissipata sulla resistenza R_7 quando alla porta 1 viene collegato il generatore ideale di tensione V_0 e alla porta 2 vengono collegate le due resistenze R_6, R_7 come indicato in figura.

Soluzione

Per trovare la matrice R si suponga di collegare al due porte i due generatori di corrente I_1 e I_2:



Bilanciando le correnti al nodo (2) si ottiene $I_2 = I_{R4} + \alpha I_{R4}$, quindi

$$I_{R4} = \frac{I_2}{\alpha + 1}$$

mentre dal bilancio al nodo (1) si ha $I_1 + \alpha I_{R4} = I_{R1} + I_{R3}$ da cui, osservando che $V_{R3} = R_1 I_{R1} - r I_{R1}$, si ricava

$$I_1 + \frac{\alpha}{\alpha + 1} I_2 = I_{R1} + \frac{R_1}{R_3} I_{R1} - \frac{r}{R_3} I_{R1}$$

$$I_{R1} = \frac{I_1 + \frac{\alpha}{\alpha+1} I_2}{1 + \frac{R_1}{R_3} - \frac{r}{R_3}}$$

A questo punto è possibile ricavare sia V_1 che V_2

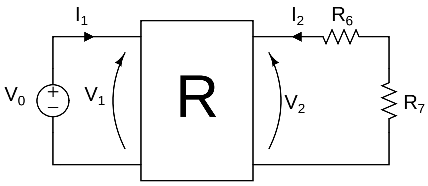
$$V_1 = R_1 I_{R1} = \underbrace{\frac{R1}{1 + \frac{R_1}{R_3} - \frac{r}{R_3}}}_{R_{11}} I_1 + \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha + 1} \frac{R1}{1 + \frac{R_1}{R_3} - \frac{r}{R_3}}}_{R_{12}} I_2$$

$$V_2 = rI_{R1} + R_4 I_{R4} = \underbrace{\frac{r}{1+\frac{R_1}{R_3}-\frac{r}{R_3}}}_{R_{21}} I_1 + \left(\underbrace{\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{r}{1+\frac{R_1}{R_3}-\frac{r}{R_3}} + \frac{R_4}{\alpha+1}}_{R_{22}}\right) I_2$$

Segue che

$$R = \begin{bmatrix} 2 & \frac{4}{3} \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ k}\Omega$$

Per il secondo punto si consideri il seguente circuito:



La potenza dissipata da R_7 vale $P_{R7} = R_7 I_2^2$. Scrivendo le equazioni del due porte

$$\begin{cases} V_0 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 \\ V_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2 \end{cases}$$

e notando che V_2 può essere espressa come $V_2 = -(R_6 + R_7)I_2$, dalla seconda equazione si ha

$$-(R_6 + R_7)I_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2, \quad I_1 = -I_2\frac{R_6 + R_7 + R_{22}}{R_{21}}$$

che sostituita nella prima dà

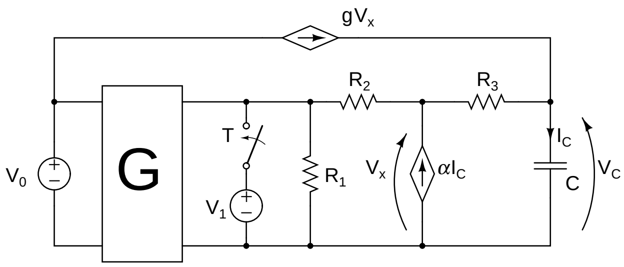
$$V_0 = -\frac{R_{11}}{R_{21}}(R_6 + R_7 + R_{22})I_2 + R_{12}I_2$$

$$I_2 = -V_0\frac{1}{\frac{R_{11}}{R_{21}}(R_6 + R_7 + R_{22}) - R_{12}} = -3 \text{ mA}$$

da cui segue

$$P_{R7} = 18 \text{ mW}$$

Esercizio 2



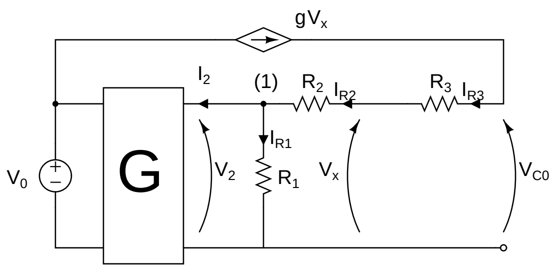
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 2$ kΩ, $R_2 = R_3 = 1$ kΩ, $g = 2$ mΩ^{-1}, $G = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ mΩ^{-1}, $\alpha = 2$, $C = 2.5$ μF, $V_0 = 3$ V, $V_1 = -1$ V.

Per $t < t_0 = 0$ sec l'interruttore T è aperto e il circuito è a regime. All'istante $t = t_0$ l'interruttore si chiude. Determinare l'andamento della tensione $V_C(t)$.

Suggerimento: Per $t > t_0$ si consiglia di calcolare l' equivalente di Thevenin del circuito connesso alla capacità inserendo un generatore di corrente e calcolandone la tensione ai suoi capi.

Soluzione

Per $t < t_0$ l'interruttore è aperto, ed essendo tutti i transitori esauriti, è possibile sostituire C con un circuito aperto. Si noti che essendo $I_C = 0$, è possibile sostituire con un circuito aperto anche il generatore di corrente comandato αI_C:



Si può notare che il generatore comandato di corrente gV_x, R_3 e R_2 sono in serie, quindi $I_{R2} = I_{R3} = gV_x$. Inoltre, esprimendo la tensione V_2 come $V_2 = R_1 I_{R1}$, si ha anche che $V_x = R_1 I_{R1} + R_2 g V_x$, $V_{C0} = V_x + R_3 g V_x$.

Da quest'ultimarelazione è possibile ricavare V_x in funzione di I_{R1}

$$V_x = \frac{R_1 I_{R1}}{1 - gR_2}$$

Inoltre dalle equazioni del due porte si ha $I_2 = G_{21} V_0 + G_{22} V_2$.

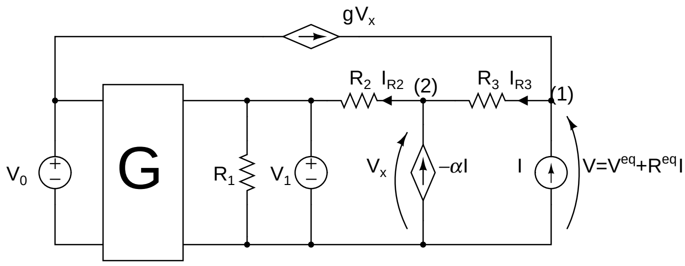
Il bilancio delle correnti al nodo indicato con (1) è $gV_x = I_2 + I_{R1}$; sostituendo

$$g \frac{R_1 I_{R1}}{1 - gR_2} = G_{21} V_0 + G_{22} R_1 I_{R1} + I_{R1}$$

$$I_{R1} = \frac{G_{21}}{g \frac{R_1}{1 - gR_2} - G_{22} R_1 - 1} V_0 = 1 \text{ mA}.$$

$$V_{C0} = V_x + R_3 g V_x = (1 + R_3 g) \frac{R_1}{1 - gR_2} I_{R1} = -6 \text{ V}.$$

Per $t > t_0$ si può calcolare l'equivalente di Thevenin del circuito conneso alla capacità sostituendo alla capacit stessa un generatore di corrente I e calcolando la tensione V ai suoi capi. Poiché si ha $I_C = -I$, si può sostituire direttamente il generatore controllato αI_C con uno $-\alpha I$:



Dal bilancio delle correnti al nodo (1) si ha $I_{R3} = I + gV_x$; dal bilancio al nodo (2) invece $I_{R2} = I_{R3} - \alpha I = (1-\alpha)I + gV_x$. Quindi

$$V_x = V_1 + R_2 I_{R2} = V_1 + R_2(1-\alpha)I + gR_2V_x$$

$$V_x = \frac{V_1 + R_2(1-\alpha)I}{1 - gR_2}$$

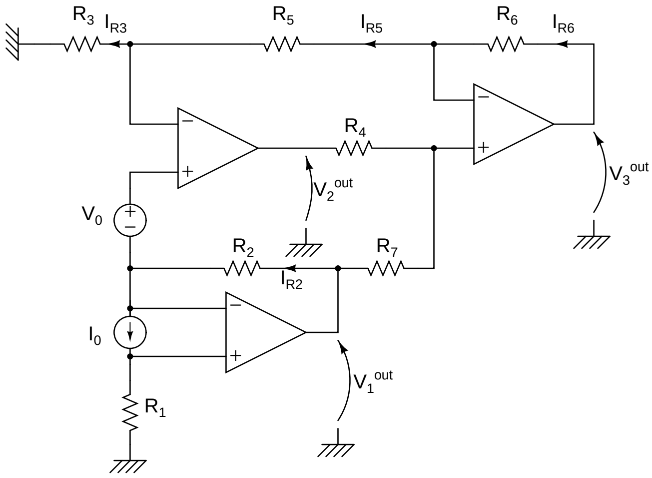
$$V = V_x + R_3 I_{R3} = \underbrace{\frac{V_1(1+gR_3)}{1-gR_2}}_{V^{eq}} + \underbrace{\left(\frac{R_2(1-\alpha)(1+gR_3)}{1-gR_2} + R_3\right)}_{R^{eq}} I$$

$$V^{eq} = 3 \text{ V}, \quad R^{eq} = 4 \text{ k}\Omega$$

Per $t > 0$ la tensione $V_C(t)$ vale

$$V_C(t) = V^{eq} + (V_{C0} - V^{eq})e^{-t/\tau}, \quad \tau = R^{eq}C = 10^{-2} \text{ sec.}$$

Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 2$ kΩ, $R_2 = 3$ kΩ, $R_3 = 4$ kΩ, $R_4 = 1$ kΩ, $R_5 = R_6 = R_7 = 3$ kΩ, $V_0 = 3$ V, $I_0 = 1$ mA. Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni V_1^{out}, V_2^{out} e V_3^{out}.

Soluzione

Ricordando che gli ingressi degli operazionali non assorbono corrente, si può osservare che

$$V_1^+ = I_0 R_1 = V_1^-; \quad I_{R2} = I_0; \quad V_1^{out} = V_1^- + R_2 I_{R2} = (R_1 + R_2) I_0 = 5 \text{ V}$$

$$V_2^+ = V_1^- + V_0 = V_2^-; \quad I_{R3} = \frac{V_2^-}{R_3} = \frac{I_0 R_1 + V_0}{R_3} = I_{R5} = I_{R6}$$

$$V_3^{out} = (R_3 + R_5 + R_6) I_{R3} = (I_0 R_1 + V_0) \frac{R_3 + R_5 + R_6}{R_3} = 12.5 \text{ V}$$

$$V_3^- = (R_3 + R_5) I_{R3} = (I_0 R_1 + V_0) \frac{R_3 + R_5}{R_3} = V_3^+$$

Per trovare V_2^{out} basta osservare (Th. di Milmann) che

$$V_3^+ = \frac{\frac{V_1^{out}}{R_7} + \frac{V_2^{out}}{R_4}}{\frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_4}} = \frac{R_4 V_1^{out} + R_7 V_2^{out}}{R_4 + R_7}$$

$$V_2^{out} = \frac{R_4 + R_7}{R_7} V_3^+ - \frac{R_4}{R_7} V_1^{out} = 10 \text{ V}.$$